АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1102—2147

*

№ 2 1959

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), профессор *В. В. Алпатов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология), профессор *В. Ю. Ломоносов* (Электротехника), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *В. В. Покшишевский* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 3
Преподавание математики 5
Основания математики и математическая логика 7
Теория чисел 13
Алгебра 20
Многочлены и линейная алгебра 20
Группы 22
Поля, кольца и структуры 24
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 33
Теория функций действительного переменного . . 41
Теория множеств 45
Приближение функций полиномами и их обобщениями 50
Теория функций комплексного переменного . . . 54
Дифференциальные уравнения 66
Обыкновенные дифференциальные уравнения 66
Уравнения в частных производных 79
Приложения к физике, технике и естественным наукам 99
Интегральные уравнения 105
Приложения интегральных уравнений . . . . —
Вариационное исчисление 110
Анализ (другие вопросы) 112
Числовые ряды 114
Специальные функции 117
Интегральные преобразования и операционное исчисление 121
Приложения общих методов математического анализа 123
Функциональный анализ 124
Теория вероятностей 140
Математическая статистика 152
Теория игр и математическая экономика . . 162
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 165
Геометрия 170
Приложения геометрии 171
Элементарная геометрия 172
Проективная геометрия 174
Начертательная геометрия 175
Алгебраическая геометрия 176
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 178
Геометрия *n*-мерного пространства 182
Теория относительности 185
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 189
Метрические методы в геометрии 192
Выпуклые многообразия . . . . . —
Численные и графические методы 195
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 202
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 219
Авторский указатель 222

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL
INSTITUTE OF THE SCIENTIFIC INFORMATION
ACADEMY OF SCIENCE OF THE USSR
Director of the Institute professor *A. I. Mikhailov*

Editors of series: corresponding member *N. V. Ageev* (Metallurgiya), professor *V. V. Alpatov* (Biologiya), professor *E. E. Zakharov* (Geologiya), professor *V. Y. Lomonosov* (Electrotekhnika), professor *S. M. Nikolsky* (Matematika), professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomiya i geodeziya), professor *V. V. Pokshishevsky* (Geografiya), academician *L. I. Sedov* (Mekhanika), *V. V. Serpinsky* (Khimiya), candidate of technical science *V. Z. Freidberg* (Mashinostroenie), professor *I. A. Khvostikov* (Geofizika), professor *E. V. Shpolsky* (Fizika).

CONTENTS

General 1
History. Personalia 3
Teaching of mathematics 5
Foundations. Mathematical logic 7
Theory of numbers 13
Algebra 20
Polynomials, linear algebra 20
Groups 22
Fields, rings, lattices 24
Algebraic theory of communication and control circuits . . . . . —
Topology 33
Theory of functions of real variables 41
Theory of sets 45
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 50
Theory of functions of complex variables 54
Differential equations 66
Ordinary differential equations 66
Partial differential equations 79
Applications to physics, technology and natural sciences 99
Integral equations 105
Applications of integral equations . . . . —
Calculus of variations 110
Analysis (other aspects) 112
Numerical series 114
Special functions 117
Integral transforms, operational calculus . . 121
Applications of general methods of mathematical analysis 123
Functional analysis 124
Theory of probability 140
Mathematical statistics 152
Theory of games, mathematical economics 162
Applications of probabilities and statistical methods 165
Geometry 170
Applications of geometry 171
Elementary geometry 172
Projective geometry 174
Descriptive geometry 175
Algebraic geometry 176
Differential geometry of 3-dimensional space 178
Geometry of *n*-dimensional space 182
Theory of relativity 185
Global theory of differentiable manifolds 189
Metric methods in geometry 192
Convex manifolds . . . . . —
Numerical and graphical methods 195
Tables . . . . . —
Computers and mathematical devices 202
Application of computer devices 219
Author index 222

Editorial Office: Moscow, D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

РЕДАКТОР *С. М. Никольский*
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, М. А. Наймарк, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, К. А. Рыбников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников.*
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*

Рефераты 1102—2147 **№ 2** **Февраль 1959 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

1102 К. О контрольных цифрах развития народного хозяйства СССР на 1959—1965 годы. Доклад на внеочередном XXI съезде Коммунистической партии Советского Союза 27 января 1959 г. Хрущев Н. С., Гос. Изд-во полит. лит-ры М., 1959, 144 стр., 1 р. 50 к.

I. ВЕЛИКИЕ ПОБЕДЫ СОВЕТСКОГО НАРОДА. II. ГЛАВНЫЕ ЗАДАЧИ СЕМИЛЕТНЕГО ПЛАНА РАЗВИТИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА СССР. Вопросы развития социалистической промышленности и транспорта. Вопросы развития социалистического сельского хозяйства. Капитальное строительство и размещение производительных сил. Рост благосостояния советского народа. О коммунистическом воспитании и народном образовании. Развитие науки и культуры. III. РЕШАЮЩИЙ ЭТАП ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОРЕВНОВАНИЯ СОЦИАЛИЗМА С КАПИТАЛИЗМОМ И СОВРЕМЕННОЕ МЕЖДУНАРОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ. Семилетний план и выполнение основной экономической задачи СССР. Дальнейшее укрепление мировой социалистической системы. Миролюбивая политика СССР и вопросы международных отношений. Коммунистическое строительство в СССР и международное рабочее движение. IV. НОВЫЙ ЭТАП КОММУНИСТИЧЕСКОГО СТРОИТЕЛЬСТВА И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАРКСИСТСКО-ЛЕНИНСКОЙ ТЕОРИИ. V. КОММУНИСТИЧЕСКАЯ ПАРТИЯ — РУКОВОДЯЩАЯ И ОРГАНИЗУЮЩАЯ СИЛА СОВЕТСКОГО НАРОДА В БОРЬБЕ ЗА ПОБЕДУ КОММУНИЗМА.

1103. Годичное собрание Академии наук СССР (25—27 марта 1958 г.). Вестн. АН СССР, 1958, № 5, 3—43

1104. Вступительная речь президента Академии наук СССР академика А. Н. Несмеянова. Вестн. АН СССР, 1958, № 5, 4—8

1105. Основные итоги научной деятельности Академии наук СССР за 1957 г. Топчиев А. В., Вестн. АН СССР, 1958, № 5, 9—28

1106. На общих собраниях отделений Академии наук СССР. В отделении физико-математических наук. Вестн. АН СССР, 1958, № 5, 48—50

Информация о годичном собрании отделения. Заслушан отчетный доклад и три научных, из которых — один математический: А. А. Марков, Неразрешимость проблемы гомеоморфии.

1107. За новый мощный скачок в развитии науки. Го Мо-жо, Вестн. АН СССР, 1958, № 5, 95—103

1108. Наши достижения в области математики за сорок лет Советской власти. Гагаев Б. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 3—8

Очень беглый обзор некоторых направлений исследований по математике в СССР за 40 лет. Б. В. Гнеденко

1109. Польская Академия наук и ее план научных исследований на 1956—1960 годы. Дембовский Ян, Ж. Польской АН, 1956, 1, № 1, 2—8

1110. Заседания Московского математического общества (26 февр. — 9 апр. 1957 г.). Успехи матем. наук. 1957, 12, № 4, 217—222

Сообщается о заседаниях Московского математического общества за указанный период. Были заслушаны следующие научные сообщения (звездочкой отмечены те из них, по которым приводятся резюме).

5 марта 1958 г. О. А. Олейник, Об уравнениях типа уравнений нестационарной фильтрации; Н. Д. Введенская, Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений методом конечных разностей; А. В. Кузнецов*. Полнота системы аксиом арифметики с правилом конструктивно-бесконечной индукции.

12 марта 1958 г. А. А. Конюшков,* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье; В. А. Андрунакиевич, Теория радикалов ассоциативных колец (обзорный доклад).

19 марта 1958 г. Л. Д. Ландау, Элементарные частицы (обзорный доклад).

26 марта 1958 г. В. А. Ильин*, Суммирование разложений по собственным функциям в порядке возрастания собственных чисел; В. Б. Лидский, Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов.

2 апреля 1958 г. А. Н. Колмогоров, Что такое кибернетика (к проекту статьи в дополнительном томе БСЭ).

Следующие заседания происходили совместно с Семинаром по методологии математики Московского университета:

28 февраля 1958 г. А. Г. Курош, О подготовке сборника «Математика в СССР за 40 лет»; С. А. Яновская, О некоторых моментах диалектики в теории математического доказательства.

14 марта 1958 г. С. В. Смирнов, О взглядах Н. И. Лобачевского на пространство, время и движение (по его лекциям по механике).

9 апреля 1958 г. Заседание, посвященное 250-летию со дня рождения Л. Эйлера (происходило совместно с Ученым советом механико-математического факультета Московского университета).

Заседание 15 марта, организованное совместно с Ученым советом механико-математического факультета Московского университета, было посвящено чествованию А. О. Гельфонда по случаю его 50-летия. О. Н. Головин

1111. Заседания Московского математического общества (16 апр.—28 мая 1957 г.). Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 5, 249—260

Сообщается о заседаниях Московского математического общества за указанный период. Были заслушаны следующие научные сообщения (звездочкой отмечены те из них, по которым приводятся резюме).

16 апреля 1958 г. Д. Е. Меньшов, О предельных функциях тригонометрического ряда; К. Т. Ахмедов*, О продолжении решений одного класса нелинейных уравнений в функциональных пространствах Банаха; А. И. Матузявичус*, Секущие поверхности двукратных расслоений.

23 апреля 1958 г. Р. В. Гамкрелидзе*, Оптимальные процессы в линейных системах; Б. И. Коренблюм, Об одном нормированном кольце функций со свертыванием.

7 мая 1958 г. Е. В. Вороновская,* Структура тригонометрических функционалов и ее следствия; В. И. Арнольд, О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных.

14 мая 1958 г. Я. Курцвейль* (г. Прага), О непрерывной зависимости от параметра в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и об обобщении понятия дифференциального уравнения; Л. А. Тумаркин, О бесконечномерных канторовых многообразиях; А. С. Солодовников, Пространства с общими геодезическими.

21 мая 1958 г. Н. С. Бахвалов*, О составлении уравнений в конечных разностях при приближенном решении уравнения Лапласа.

28 мая 1958 г. С. Стоилов (Румыния), О функциях квазианалитических в смысле М. А. Лаврентьева; А. Г. Костюченко, О собственных функциях самосопряженных операторов.

Заседание 25 апреля, организованное совместно с Учеными советами Математического института АН СССР и механико-математического факультета Московского университета, было посвящено чествованию И. Н. Векуа по случаю его 50-летия. О. Н. Головин

1112. Заседания Московского математического общества (24 сент.—29 окт. 1957 г.). Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 211—216

Сообщение о заседаниях Московского математического общества за указанный период. Приведены резюме докладов: 1 октября 1957 г. Б. И. Плоткин, Алгебраические элементы и ниль-элементы в группах. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.

22 октября 1957 г. Г. И. Кручкович, Полуприводимые римановы пространства и их связь с движениями. В. И. Лебедев, О системе уравнений типа С. Л. Соболева.

1113. Заседания Ленинградского общегородского математического семинара (9 окт. 1956 г.—28 мая 1957 г.). Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 6, 207—213

Хроника заседаний семинара за указанный период времени. На 13 состоявшихся заседаниях было заслушано 23 доклада. Помещены резюме следующих докладов: Ю. В. Линник, Некоторые новые теоремы метода наименьших квадратов с приложениями к теории локации и определения места; Т. А. Розет, О методе «склеивания» в теории волноводов; М. Ш. Бирман, О многомерных краевых задачах с малым параметром при старших производных. О. Н. Головин

1114. Апрельское собрание Американского математического общества в Беркли, 1957 г. Кли (The April meeting of the American mathematical Society held in Berkeley, 1957. Klee V. L., Jr), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, **63**, № 4, 280—292 (англ.)

1115. 2-й Международный конгресс по кибернетике, Намюр, 3—10 сент. 1958 г. Измерит. техника, 1958, № 3, 99

1116. Вторая конференция, посвященная стохастическим процессам (Druga konferencja poświęcona procesom stochastycznym), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 249 (польск.)

Информационное сообщение о 2-й конференции по стохастическим процессам (1-я конференция была в 1952 г.), состоявшейся во Вроцлаве 28—30 декабря 1954 г. В. Ф. Рогаченко

1117. Конференция по теории игр. Земба (Konferencja z teorii gier. Zieba A.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 244—245 (польск.)

Информационное сообщение о конференции по теории игр, организованной Математическим институтом Польской Академии наук во Вроцлаве 28 и 29 мая 1954 г. В. Ф. Рогаченко

1118. Математическая жизнь Рязани. Макаров И. П., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 249—250

Информация о деятельности Рязанского физико-математического общества (основано в 1956 г.) и научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений при Рязанском пединституте (работает с 1952 г.).

1119. Математика и философия. Мурман (Mathematics and philosophy. Moorman R. H.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 1, 28—37 (англ.)

Выступление председателя Юго-восточной секции Математической ассоциации США на заседании секции 16 марта 1956 г.

Автор считает, что исторические отношения математики и философии в современную атомную эпоху имеют большее значение, чем несколько лет назад. Поскольку в наши дни философия есть критическое и обширное изучение основных проблем, возникших в поисках знания, то, утверждает автор, следует применять философию, чтобы направлять соответствующее использование атомной энергии.

Главное содержание статьи состоит в рассмотрении влияния математики на философские взгляды ученых, которые были и философами, и математиками — Пифагора, Платона, Аристотеля, средневековых философов, Декарта, Спинозы, Лейбница. По существу это рассмотрение сводится к краткому изложению вклада каждого из этих мыслителей в развитие математики и довольно беглой характеристике их философских взглядов. Автор подчеркивает здесь, что каждый из указанных мыслителей применял к проблемам философии математические понятия и математические методы мышления.

Утверждая, что современные утилитарные науки возникли из математизации философии, автор призывает перестроить существующую систему образования, в которой выводы даются без теоретического обоснования их в математике и философии. Н. А. Киселева

1120. Принцип перманентности Ганкеля в свете исторического развития понятия числа от натурального числа до мнимого. Стипанич (Le principe de la permanence de Hankel à la lumière de l'évolution historique de la notion du nombre depuis le nombre naturel jusqu'au nombre imaginaire. Stipanić Ernest), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, 5, № 1-2, 57—66 (франц.)

Анализируя основные этапы исторического развития понятия числа, с одной стороны, и построение различных

числовых систем с помощью принципа перманентности Генкеля, с другой, автор приходит к выводу, что принцип перманентности не является условным соглашением, что абстрактно-логическая конструкция формальной арифметики по Ганкелю фиксирует законы исторического развития понятия числа.

Автор подчеркивает, что каждая новая числовая область возникает в результате диалектического обобщения первоначальной, и подробно останавливается на роли закона отрицания в создании новых числовых систем.

И. Г. Башмакова

1121. Заметка Уинтропа «Математика в общественных науках». Гольдберг (Note on Winthrop's «Mathematics in the social sciences». Goldberg Samuel), School Sci. and Math., 1957, **57**, № 9, 682—684 (англ.)

Трактуется арифметический факт, что $N(t)=\Pi_{k=1}^{t}\{1+\Phi(k)\}$ является решением разностного уравнения $N(t)=\{1+\Phi(t)\}\cdot N(t-1)(t=1, 2, 3, \ldots)$ при начальном условии $N(0)=1$. В какой мере это уравнение дает математическую модель социальных процессов — вопрос, выходящий из рамки данной статьи. М. И. Ельшин

1122. Список литературы по математике, изданной на Украине в 1956—1957 гг. Сост. Сакович Г. Н., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 2, 231—233

1123 Ж. Канадский математический бюллетень (Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de mathematiques. Canadian Math. Congress. Toronto, Univ. Toronto Press, Yearly Subscription price 3.00 doll.) (англ.)

Официальный орган Канадского математического конгресса. Выходит с 1958 г.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

1124. Роль эпистемологии в истории математики. Булиган (Le rôle de l'epistémologie dans l'histoire des mathématiques. Bouligand G.), Arch. internat. histoire sci., 1957, **10**, № 39, 105—111 (франц.)

Обсуждается вопрос, как сделать историю математики дедуктивной, оперативной наукой, чтобы она действительно способствовала воспитанию математиков. Для этого прежде всего необходимо, чтобы она перестала быть простым нагромождением фактов, а сделалась бы наукой, в которой было видно, как современные теории вырастают, постепенно синтезируясь, из некоторых элементарных проблем. Автор говорит, ссылаясь на свои работы, что ему удалось таким образом построить историю современной теории тригонометрических рядов и эйнштейновской теории тяготения.

Историк математики как бы вторично открывает исследуемый им материал, поэтому, кроме необходимости полного владения самим этим материалом, ему необходима еще некоторая предварительная гипотеза о построении этого материала, которая будет служить ему как бы той нитью, на которую он должен будет нанизывать отысканные им в архивах факты, вследствие чего построенная таким образом система приобретает стройность.

Автор доказывает, что необходимость подобной гипотезы вытекает из эпистемологических (относящихся к теории познания) соображений, которые вместе с тем в известной степени определяют и сам характер такой гипотезы. Этим требованиям удовлетворяют, по мнению автора, многие из публикаций «Дворца открытий» (Palais de la Découverte), представляющие собой сжатые (от 10 до 25 стр.) изложения какой-либо темы известными учеными. Имеется ряд серий таких публикаций: серия A — посвящена французским ученым; B — иностранным; C — юбилейным выставкам; наконец *D* — специально истории наук. Однако во всех сериях имеются работы весьма интересные для историка. Приводим некоторые из названных автором публикаций: Картан, Гаспар Монж, его жизнь и творчество (серия A) (E. Cartan, Gaspard Monge, sa vie, son oeuvre); Серджеску, О развитии идей математической бесконечности в XIV в. (серия B) (P. Sergescu, Le développement de l'idée de l'infini mathématique au XIV siècle); Серджеску, История числа (серия D) (P. Sergescu, L'histoire du nombre); Шатле, Об арифметических идеалах (A. Châtelet, Sur l'arithmétique des idéaux); Данжуа, О теории функции действительного переменного (A. Denjoy, Sur la théorie des fonctions de variables réelles); Картан, Теория групп (El. Cartan, La théorie des groupes); Дюбрей, Об отношениях эквивалентности и их важнейшие применения (P. Dubreil, Les relations d'équivalence et leurs principales applications); Пикар, Лобачевский — великий русский математик, его жизнь и творчество (S. Piccard, Lobatchefsky, grand mathématicien russe; sa vie, son oeuvre); Фреше, Математика в гуманитарных науках (M. Fréchet, Les mathématiques dans les sciences humaines); Доделъ, Новые успехи химических теорий и проблема рака (речь идет именно о применении математики в указанном в заглавии аспекте) (R. Daudel, Les récents progrès des théories chimiques et le problème du cancer); де Бройль, Возможна ли новая интерпретация волновой механики? (L. de Broglie, Une interprétation nouvelle de la Mécanique ondulatoire est-elle possible?) и многие другие статьи, относящиеся к различным сериям.

Б. Н. Пятницын

1125. О развитии и состоянии китайской математики. Су Бу-цин (Über die Entwicklung und den Stand der chinesischen Mathematik. Su Bu Chin), Wiss. Z. Humboldt — Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, **6**, № 5, 449—452 (нем.; рез русск., англ., франц.)

Доклад автора на математическом коллоквиуме университета в Берлине 11 декабря 1956 г. Состоит из трех частей: 1) китайская математика до освобождения (до 1949 г.); б) за последние 7 лет; в) перспективы. Сведения, сообщаемые в докладе, неполны, так как доклад составлен по личным воспоминаниям. Представляет интерес информация о периодической литературе по математике, о формах работы научных обществ, о работе в высших учебных заведениях КНР по подготовке кадров математиков.

К. А. Рыбников

1126. Математика в девяти книгах. Перевод с китайского и комментарии Э. И. Березкиной. В сб.: Истор.-матем. исследования, вып. 10, М., Гостехтеориздат, 1957, 425—584

Первый в истории перевод самого древнего китайского математического трактата, составленного не позднее 1 в. н. э. на древнекитайском языке (вэнь-янь). Переводу предпосланы: предисловие Хуа Ло-гена и вводная статья Э. И. Березкиной.

Хуа Ло-ген отмечает, что публикуемый трактат является одним из замечательнейших памятников, который сыграл большую роль в развитии китайской математики в древности и в средние века.

Перевод Э. И. Березкиной, успешно преодолевшей немалые трудности, еще раз подтверждает на практике, какое большое внимание проявляют советские ученые к развитию математических наук в Китае.

Э. И. Березкина дает обзор основных задач и методов, имеющихся в трактате, и сведения о его истории. На основе филологического и историко-математического анализа материала она пришла к выводу, что текст неоднороден: часть его соответствует начальным ступеням развития науки и является более ранней, тогда как другая его часть отражает довольно высокий уровень развития науки; эта часть была добавлена при обработке трактата в 1 в. н. э. В конце статьи приводится обзор трактата по главам и параллели между математикой древнего

Китая, Египта и Вавилона. Особо отмечается, что для китайской математики характерно ярко выраженное вычислительно-алгоритмическое направление.

Трактат состоит из девяти книг; каждая книга посвящена определенной теме и представляет законченное целое. Схема изложения: формулируется ряд однотипных задач, к каждой из них дается ответ, затем приводится общее правило для решения всех задач этого типа. Правило чаще всего представляет выраженную словами формулу для вычисления искомой величины. Никаких доказательств в трактате нет.

В книге I «Измерение полей» содержатся задачи на вычисление площадей прямоугольника, треугольника, трапеции, круга, сектора, сегмента и кольца. Точные формулы не отделены от приближенных. Число π принимается равным 3. Так как длины сторон фигур могут быть как целыми, так и дробными, то приведены правила действия с дробями. При сокращении дробей наибольший общий делитель двух чисел находится с помощью алгоритма Евклида (алгоритма попеременного вычитания).

В книге II «Соотношения между различными видами зерновых культур» собраны задачи, в которых требуется по трем данным величинам найти четвертую пропорциональную, а в книге III «Деление по ступеням»— задачи на деление некоторой величины на части, пропорциональные или обратно пропорциональные трем данным числам. В этой книге приводится и сложное тройное правило.

Книга IV «Шао-гуан» содержит метод вычисления квадратных и кубических корней, близкий к схеме Руффини — Горнера.

Книга V «Оценка работ» посвящена вычислению объемов параллелепипеда, полных и усеченных конуса и пирамиды, цилиндра, обелиска и некоторых призматических тел. Полученные здесь правила применяются для определения объемов различных гидротехнических сооружений и для расчета необходимой рабочей силы.

В книге VI «Пропорциональное деление» приводятся усложненные задачи на простое и сложное тройное правило и на пропорциональное деление. Имеются и задачи на суммирование прогрессии.

В книге VII «Избыток — недостаток» задачи, сводящиеся к линейному уравнению и система двух таких уравнений, решаются с помощью правила двух ложных положений.

В книге VIII «Фан-чэн» также рассматриваются задачи, эквивалентные системам линейных уравнений. Метод решения этих задач здесь уже иной: не арифметический, а алгебраический. Он основан на преобразовании таблицы коэффициентов уравнений приемом, близким правилу Крамера.

В книге VIII при преобразовании таблиц из коэффициентов впервые появляются отрицательные числа. Приводятся правила сложения и вычитания отрицательных чисел, а эти числа истолковываются как долг.

Книга IX «Соотношение между катетами и гипотенузой в прямоугольном треугольнике» содержит задачи, при решении которых применяется теорема Пифагора. Решение одной из задач показывает, что китайским математикам были хорошо известны формулы для нахождения бесконечного числа так называемых пифагоровых троек, т. е. целочисленных решений неопределенного уравнения $x^2 + y^2 = z^2$. В этой книге квадратные уравнения решаются двумя способами: по обычным формулам и по схеме, близкой к методу Руффини — Горнера.

Э. И. Березкина подробно комментирует трудные места трактата, излагает на языке современной математики применяемые в нем методы решения задач, восстанавливает отсутствующие в тексте чертежи, сопоставляет правила и приемы древнекитайской математики с соответствующими методами египетской, вавилонской и древнегреческой науки. Она исследует вопрос о методах решения систем линейных уравнений, выясняет, насколько правомерно говорить о наличии в трактате операций с матрицами и понятия об отрицательном числе. Анализируя алгоритм вычисления квадратных и кубических корней, Э. И. Березкина приходит к выводу, что он возник, в результате применения формулы квадрата и куба бинома для вычисления на счетной доске. Она показывает, что в этом алгоритме содержится возможность обобщения на случай вычисления корней алгебраических уравнений; при таком обобщении и возникла впервые схема, совпадающая с методом Руффини — Горнера.

И. Г. Башмакова

1127. Пифагор. Зонненбург (Pythagoras. Sonnenburg K.), Vermessungstechnik, 1957, **5**, № 9, 224 (нем.)

Краткое жизнеописание Пифагора и обзор приписываемых ему математических результатов.

1128. Каким образом математика сделалась дедуктивной наукой? I, II. Сабо (Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I, II. Szabó Árpád), Mat. lapok, 1957, 8, № 1-2, 8—36; № 3-4, 232—247 (венг.)

Венгерский вариант статьи (РЖМат, 1958, 9425).

1129. Празднование 250-летия со дня рождения Леонарда Эйлера в Ленинграде. А. Г. В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 5, М., АН СССР, 1957, 218—219

1130. К вопросу об оценке работ А. А. Чупрова и С. Пуассона. Лившиц Ф., Вестн. статистики, 1958, № 4, 70—79

1131. Джон фон Нёйман (1903—1957). Улам (John von Neumann. 1903—1957. Ulam S.), Bull. Amer. Math., Soc., 1958, **64**, № 3, Part 2, 1—49 (англ.)

Биографический очерк. Обзор научных достижений, сгруппированных по разделам: ранние работы, теория множеств и алгебра; теория функций действительного переменного, теория меры, топология и непрерывные группы; гильбертовы пространства, операторы и теория колец операторов; теория решеток и непрерывная геометрия (continuous geometry); теоретическая физика; анализ, вычислительные работы и работы по гидродинамике; теория игр; экономика, динамика, механика сплошных сред и метеорологические расчеты; теория и практика вычислений на электронных машинах, метод Монте-Карло, теория автоматов и вероятностная логика; ядерная энергия и работы в Лос-Аламосе. Библ. 125 назв. по годам (1922—1956), 17 назв. рефератов, представленных Американскому математическому обществу. К. А. Рыбников

1132. Александр Геннадиевич Курош. (К пятидесятилетию со дня рождения). Александров П. С., Глушков В. М., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 217—224

1133. Марк Григорьевич Крейн. (К пятидесятилетию со дня рождения). Колмогоров А. Н., Красносельский М. А., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 213—224

1134. Два славных юбилея. Тр. Всес. заочн. лесотехн. ин-та, 1958, № 3, 177—180

В январе 1958 г. институт отмечал: а) 70-летие со дня рождения проф. А. К. Митропольского — заведующего кафедрой высшей математики, работы которого посвящены преимущественно проблемам математической статистики. Библ. 32 назв.; б) 30-летие педагогической и научной деятельности проф. М. С. Мовнина — заведующего кафедрой теории механизмов и машин. Библ. 54 назв.

1135. Петр Константинович Рашевский. (К пятидесятилетию со дня рождения). Норден А. П., Розенфельд Б. А., Яглом И. М., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 225—231

1136. Чествование академика Симиона Стоилова (Sărbătorirea academicianului Simion Stoilow), Gaz. mat. şi. fiz., 1958, **A10**, № 5, 308—314 (рум.)

1137. Дмитрий Константинович Фаддеев. (К пятидесятилетию со дня рождения). Венков Б. А., Шафаревич И. Р., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 233—238

1138. Александр Николаевич Барсуков. (Некролог). Физика в школе, 1958, № 4, 96

1139. Памяти Отто Юльевича Шмидта (1891—1956). Лебедев Т. С., Тр. Ин-та геол. наук. АН УССР. Сер. геофиз., 1958, вып. 2, 200—203

1140. Фридеш Рисс. Некролог. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4 (76), 155—166
Перевод из Math. lapok, 1956, **7**.

1141. Тибор Селе и его математическое творчество Кертес (Tibor Szele and his mathematical life—work. Kertesz A.), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 115—125 (англ.)

Некролог и обзор научных работ профессора математики Дебреценского университета (Венгрия) Т. Селе (1918—1955), известного алгебраическими работами. Библ. 62 назв.

1142. Памяти Вильгельма Зюсса. Бенке, Герикке (Wilhelm Süß zum Gedächtnis. Behnke Heinrich, Gericke Helmuth), Math.-phys. Semesterber., 1958, **6**, № 1-2, 1—3 (нем.)

Некролог профессора математики Фрейбургского университета (ФРГ) В. Зюсса (1895—1958).

1143 К. Алексей Николаевич Савич. Математик, астроном, педагог. [1810—1883]. Очерк жизни и научно-пед. деятельности). Селиханович В. Г. М., Геодезиздат, 1957, 77 стр., илл. Список трудов А. Н. Савича, стр. 72—77,, 2 р.

1144 Д. Годы учения Н. И. Лобачевского и его первые геометрические исследования. Федоренко Б. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т истории естествозн. и техн. АН СССР, М., 1958

1145 Д. Взгляды Якоба Фридриха Фриза и его школы на философские основы математики и отношение их к основаниям математики. Кубе (Die Auffassungen Jakob Friedrich Fries' und seiner Schule über die philosophischen Grundlagen der Mathematik und ihr Verhältnis zur Grundlagentheorie. Cube Felix von.— Diss. Dokt. Naturwiss., Techn. Hochsch. Stuttgart, 1957, 157 S., ill.) (нем.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

1146. Объединенный научно-методический семинар кафедр высшей математики московских втузов. Цлаф Л. Я., Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 183—186

Подводятся итоги работы семинара за три года его существования. Задача семинара —«обсуждение основных вопросов преподавания высшей математики во втузах, обмен опытом преподавания высшей математики, изучение постановки преподавания высшей математики за рубежом, обсуждение учебников и т. п.» Заседания проводятся ежемесячно. В декабре 1956 г. произошло слияние семинара с секцией втузов Московского математического общества.

Приводится выборочный перечень вопросов, рассмотренных на первых 28 заседаниях семинара, и проект программы работы семинара. О. Н. Головин

1147. Научно-методическая конференция педагогических институтов и научных учреждений Молдавии, Тирасполь, 27 февр.—1 марта 1958 г. Бычков Б. П., Матем. в школе, 1958, № 4, 89—90

1148. Методико-дидактическая конференция математиков в Варшавском политехникуме. Страшевич (Konferencja metodyczno-dydaktyczna matematyków w Politechnice Warszawskiej. Straszewicz S.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 250—254 (польск.)

Краткое изложение трех докладов и результатов их обсуждения на методической конференции преподавателей математики Варшавского политехникума. Основными вопросами при обсуждении были: 1) роль математики в подготовке инженеров, 2) содержание курса математики в политехникуме; 3) методика преподавания важнейших разделов курса. В. Ф. Рогаченко

1149. Методико-дидактическая конференция, посвященная преподаванию аналитической геометрии (Konferencja metodyczno-dydaktyczna poświecona nauczaniu geometrii analitycznej), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 255—256 (польск.)

Информационное сообщение о методической конференции, посвященной преподаванию аналитической геометрии в высшей школе, организованной управлением университетов министерства высшего образования ПНР и состоявшейся 18—19 декабря 1953 г. в Люблине.
В. Ф. Рогаченко

1150. Методическая конференция в Крынице. Страшевич (Konferencja metodyczna w Krynicy. Straszewicz S.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 257—259 (польск.)

Информационное сообщение о методической конференции, посвященной преподаванию математики в высших технических школах, организованной управлением технических вузов Министерства высшего образования ПНР и состоявшейся 11—17 февраля 1954 г. в Крынице. Целью конференции было систематическое обсуждение содержания и методов преподавания различных разделов курса математики в технических учебных заведениях Польши. В. Ф. Рогаченко

1151. Чехословацкий журнал для учащихся средней школы. Гайдук Ю. М., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 311—314

Общая характеристика ежемесячного журнала «Rozhlegy matematicko-fysikální», издающегося с начала 1957 г. в Чехословакии. Обзор содержания за первое полугодие 1957 г.

1152. Приемные экзамены по математике в Белградском университете. Вейцман И. Б., Матем. в школе, 1958, № 4, 76—77

Рецензия на сборник задач, предлагавшихся поступающим на технические факультеты Белградского университета (составитель проф. Д. С. Митринович).

1153. О строгом мышлении и четком изложении. Фог (Om «stringent taenkning praegnant udtryksform». Fog David), Nord. mat. tidskr., 1956, **4**, № 4, 177—188 (датск.)

Статья воспроизводит доклад, прочитанный автором в датском Обществе преподавателей математики гимназий и учительских семинарий. Автор выступает с критикой официальной установки, по которой преподавание математики в датских гимназиях должно иметь преимущественной целью развитие у учащихся способности к «строгому рассуждению и четкому изложению». Автор считает, что последовательное осуществление принципа логической полноты доказательств и формулировок в условиях средней школы невозможно как по причине ограниченности учебного времени, так и ввиду психологически-возрастных особенностей восприятия учащихся. Автор полагает, что в школе следует обходить молчанием «особые» и «предельные»» случаи в доказательствах геометрических теорем, если только эти случаи не обнаруживаются самими учащимися. Перегрузка школьного курса математики логическими тонкостями имеет следствием, по мнению автора, утрату учащимися цельного представления о предмете и интереса к нему. Ю. М. Гайдук

1154. К вопросу о преподавании математики в общеобразовательной школе в связи с задачами политехнического обучения. Цвид Ф. А., Уч. зап. Благовещ. гос. пед. ин-та, 1956, **7**, 3—22

1155. Действительные числа и методика их преподавания в школах рабочей молодежи. Герус А. П., Уч. зап. Нижне-Тагильск. гос. пед. ин-та, 1957, **1**, № 1, 71—108

1156. К вопросу введения интегрального исчисления в школьном преподавании математики. Кольхазе (Ein Beitrag zur Einführung der Integralrechnung im Mathematikunterricht der Oberschule. Kohlhase Hans), Math. und Phys. Schule, 1957, **4**, № 10, 561—568 (нем.)

1157. Геометрические средства в школьном курсе математики. Хельвих (Die geometrischen Verwandtschaften im mathematischen Schulunterricht. Hellwich Manfred), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Ges.-sprachwiss. Reihe, 1956—1957, **6**, № 3, 247—250 (нем.)

Автореферат диссертации. Понятие средства вводится автором, как аттрибут, присущий группе обратимых однозначных отображений объектов геометрии. Цель статьи: отбор данных геометрии отображения для включения их в школьные программы.

Приводятся необходимые сведения из области учения об отображениях, формулируются определения, приводятся примеры понятия фигуры с этих точек зрения. В проективном трехмерном пространстве даются отдельные группы отображений с их важнейшими инвариантами. Рассматриваются афинные группы, группы подобия и др. Приводится обзор исторического развития понятия отображения и всего этого раздела геометрии. Заканчивается автореферат предложениями о введении геометрии отображений в курс математики в средней школе.

П. Я. Дорф

1158. Некоторые вопросы развития понятия функциональной зависимости в курсе алгебры IX класса. Гукасян Г. Л., Докл. Акад. пед. наук РСФСР, 1957, № 4, 29—32

Краткая заметка о том, как преподавание логарифмов и элементов теории пределов может способствовать развитию у учащихся более глубоких представлений о понятии функции.

П. Я. Дорф

1159. О доказательстве в преподавании геометрии в средней школе. Эбнер (Über den Beweis im Geometrieunterricht der Mittelstufe. Ebner Max), Math. und Phys. Schule, 1957, **9**, № 1, 14—29 (нем.)

1160. О начальном курсе тригонометрии 8-го класса средней школы. Парно И. К., Уч. зап. Кишиневск. гос. пед. ин-та, 1957, **9**, 41—45

1161. Что я имел в виду при планировании повторения материала по математике. Попеску (Ce am avut vedere la planificarea lectiilor de recapitulare la matematici. Popescu Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, **A9**, № 4, 191—197 (рум.)

1162. Сокращенные отношения при проекции в двух измерениях. Вагнер (Das Verkürzungsverhältnis bei der dimetrischen Projektion. Wagner Edwin), Math. und Phys. Schule, 1956, **3**, № 12, 556—558 (нем.)

1163. О применении камеральных приборов в школьном курсе геометрии. Жигадло В. Ф., Уч. зап. Астраханск. гос. пед. ин-та, 1957, **6**, 17—81

1164. О новом учебнике тригонометрии. (По материалам, поступившим в редакцию). Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 301—306

1165 К. Энциклопедия элементарной математики. Т. 3. Анализ. Александров, Маркушевич, Хинчин (Enzyklopädie der Elementarmathematik. Bd 3. Analysis. Alexandroff P. S., Markuschewitsch A. I., Chintschin A. J. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss, 1958, IX, 536 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского одноименной книги, вышедшей в 1952 г. в Москве, ГТТИ.

1166 К. Курс математики, преподаваемый в Высшей национальной авиационной школе и Высшей национальной горной школе. Басс (Cours de mathématiques. Professé Ecole nat. supér. aéronaut. et Ecole nat. supér mines, Paris. Bass J.), Paris, Masson et Cie., 1956, 916, p., ill., 8 500 fr.) (франц.)

1167 К. Курс прикладной высшей математики (современная математика). 1. Курс прикладного операторного исчисления, преобразование Карсона — Лапласа. Дени-Папен, Кауфман (Cours de mathématiques supérieures appliquées (mathématiques modernes). 1. Cours de calcul opérationnel appliqué, transformation de Carson — Laplace. 2e éd. Denis-Papin Maurice, Kaufmann Arnold. Paris, A. Michel, 1957, 239 p., ill., 1200 fr.) Bibliogr. France, 1957, **146**, № 8, 174 (франц.)

1168 К. Вопросы общей методики математики. (Изв. Акад. пед. наук РСФСР, вып. 92). М., 1958, 256 стр., илл., 14 р. 25 к.

1169 К. Математика. 2-е изд. Тиде (Mathematik. 2. Aufl. Thiede Günther. Dresden, Med. Fachschule, 1957, 68 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **B**, № 10, 906 (нем.)

1170 К. Применение математики. Т. 3. (Zastosowani matematyki. T. 3. Warszawa, PWN. Z. 1. 1956, 104 s., il. 15 zł.; Z. 2, 1957, s., 105—228, il., 18.50zł.), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 48, 668 (польск.)

1171 К. Сборник математических формул. 4-е изд. Бжоска, Барч (Mathematische Formelsammlung. 4. Aufl. Brzoska Franz, Bartsch Walter. Leipzig, Fachbuchverlag, 1957, X, 345 S., ill., 7.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 7, 448 (нем.)

1172 К. Элементарная математика. Подготовительный курс высшей математики. 8-е изд. перераб. Виллерс (Elementar-Mathematik. Ein Vorkurs zur höheren Mathematik. 8. durchges. Aufl. Willers Fr. A. Dresden — Leipzig, Th. Steinkopf, 1957, VI, 267 S., ill., 15.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 2, 107 (нем.)

1173 К. Преподавание математики. Блютель, Донто (L'enseignement des mathématiques. Blutel Paul Robert, Dontot René. Rabat, École livre, 1955, 196 p.), Bibliogr. France, 1957, **146**, № 12, 269 (франц.)

1174 К. Рефераты трудов Оксфордской математической конференции школьных учителей и деятелей промышленности 8—18 апреля 1957 г. (Abbreviated proceedings of the Oxford Mathematical Conference for schoolteachers and industrialists, at Trinity College, Oxford, April 8—18, 1957, and administered by Oxford University Delegacy for Extra — Mural Studies. London, Technology, 1957, 111 pp., ill., 2 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 401, 9 (англ.)

1175 К. Курс финансовой математики для 1-го экономического и коммерческого класса технических колледжей. Маларме (Cours de mathématiques financières, à l'usage des classes de l-re économiques commerciales des collèges techniques B. E. C. 2e degré, B. P., comptabilité, préliminaire expertise comptable. Malarmey Louis. Paris, Masson et Cie, 1957, 167 p., 880 fr.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 30-31, 702—703 (франц.)

1176 К. Курс финансовой математики для 2-го экономического и коммерческого класса индустриальных колледжей. Маларме (Cours de mathématiques financières, à l'usage des classes de 2e économiques commerciales, et cl. de l-res spéciales des collèges techniques. Malarmey Louis. Paris, Masson et Cie, 1957, 147 p., ill., 850 fr.), Bibliogr. France, 1957, **146**, № 30-31, 703 (франц.)

См. также: 1199, 1203—1205 1249, 1254, 1374, 1392, 1461, 1481, 1542 К, 1543 К, 1610, 1722, 1724, 1771, 1773, 1871, 1872 К, 1874 К, 1877—1880, 1885 К—1893 К, 1901, 1907, 1912, 1927, 1930 К—1933 К, 2111, 2118, 2131, 2147.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

1177. Об инверсионной сложности систем функций. Марков А. А., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 6, 917—919

Формулы в n переменных определяются естественным образом как определенного вида слова в алфавите $\Phi_n=\{0,1,x_1x_2,...,x_n,\&,\vee,\neg,(,)\}$. Формулы, начинающиеся буквой $\neg$, называются отрицательными формулами. Инверсионной сложностью системы формул $P_1,...,P_m$ называется число различных отрицательных подформул всех формул этой системы. Известно, что всякая булева функция от n аргументов может быть определена формулой в n переменных. Инверсионной сложностью $\mathrm{Inv}(f_1,...,f_m)$ системы булевых функций от n переменных $f_1,...,f_m$ называется наименьшая из инверсионных сложностей систем формул, определяющих эту систему функций. Система может состоять из одной функции.

Всякую булеву функцию от n аргументов можно рассматривать как функцию от n-мерного булевого вектора, принимающую значения 0 и 1. Автор говорит, что булев вектор $A=\{a_1,...,a_n\}$ предшествует булеву вектору $B=\{b_1,...,b_n\}$ (записывается: $A\rightarrow B$), если $a_i\leqslant b_i$ $(i=1,...,n)$ и $a_j<b_j$ для некоторого j. Знакопеременной цепью булевой функции f от n аргументов называется такая последовательность n-мерных булевых векторов $A_1, A_2,..., A_r$, что $A_i\rightarrow A_{i+1}$ $(1\leqslant i<r)$,

$$f(A_i)=\begin{cases}1 \text{ при нечетном } i,\\ 0 \text{ при четном } i\end{cases} \quad (1\leqslant i\leqslant r).$$

Знакопеременностью функции f $\mathrm{Alt}(f)$ называется наибольшая из длин знакопеременных цепей этой функции.

Утверждаются следующие теоремы:

5. 1. Для всякой булевой функции f имеет место $\mathrm{Inv}(f)=pd(D(\mathrm{Alt}(f))$, где $pd(0)=0$, $pd(r)=r-1$ при $r>0$; $D(0)=0$, $D(r)=\lceil \lg_2 r\rceil+1$ при $r>0$.

6. 1. $I(n,1)=pd(D(n+1))$.

6. 2. $I(n,m)=D(n)$ при $m>1$, где $I(n,m)$ обозначает наибольшую из инверсионных сложностей всевозможных систем m булевых функций от n аргументов.

Формулируется лемма (7. 1.), которая, по утверждению автора, играет существенную роль при доказательстве указанных результатов. С. И. Адян

1178. Эффективные операции над частично-рекурсивными функциями. Майхилл, Шепердсон (Effective operations on partial recursive functions. Myhill J., Shepherdson J. C.), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, **1**, № 4, 310—317 (англ.)

Пусть $q_n(x)$ — частично-рекурсивная функция, универсальная для всех частично-рекурсивных функций Клини С. К., Введение в метаматематику, 1957,стр (304)

Определение 1. Оператор Φ, действующий на функции, называется эффективной операцией если: а) областью определения Φ является класс $\mathfrak{M}$ всех частично-рекурсивных функций и б) существует общерекурсивная функция f такая, что $\Phi(q_n)=q_{f(n)}$ для каждого n.

Основной результат: Оператор Φ является эффективной операцией в том и только в том случае, когда он совпадает на $\mathfrak{M}$ с некоторым частично-рекурсивным оператором.

Через $r_n(x)=r(n,x)$ обозначается рекурсивная функция, пересчитывающая без повторений все функции с конечной областью определения и обладающая свойствами: 1) существует примитивно-рекурсивная функция t такая, что $r_n(x)$ определена в точности для $t(n)$ значений x, 2) существует примитивно-рекурсивная функция d такая, что $r_n=q_{d(n)}$.

Система частично-рекурсивных функций $\mathfrak{Z}$ называется вполне перечислимой, если рекурсивно-перечислимым является множество всех таких n, что $q_n(x)\in\mathfrak{Z}$. Функция $g(x)$ называется продолжением функции $f(x)$, если $g(x)=f(x)$ для всей x из области определения функции f.

При доказательстве основной теоремы существенную роль играет:

Лемма: Для того чтобы система $\mathfrak{Z}$ частично-рекурсивных функций была вполне перечислимой, необходимо и достаточно, чтобы она в точности состояла из всех частично-рекурсивных продолжений некоторой рекурсивно-перечислимой подсистемы занумерованной системы $r_1(x)$, $r_2(x),...,r_n(x),...$

Проблема: Если в определении 1 заменить класс $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{Z}$ всех общерекурсивных функций, останется ли справедливым соответствующий вариант основной теоремы?

Примечания референта. Основная теорема непосредственно вытекает из теорем 6 и 10 статьи В. А. Успенского (РЖМат, 1957, 4549), а основная лемма —из теорем 2 и 5 той же статьи. На поставленную проблему утвердительный ответ дает результат Г. С. Цейтина (РЖМат, 1958, 66). Б. А. Трахтенброт

1179. Систематическое рассмотрение разрешимых случаев проблемы разрешения для исчисления предикатов первой ступени. Клауа (Systematische Behandlung der lösbaren Fälle des Entscheidungsproblem für den Prädikatenkalkül der ersten Stufe. Klaua D.), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, **1**, № 4, 264—270) (нем.)

Проблема разрешения (разрешимости) рассматривается в терминах выполнимости, т. е. как задача на отыскание алгоритма, позволяющего по виду приведенной к предварительной нормальной форме замкнутой формулы F исчисления предикатов ответить „да" или „нет" на вопрос о выполнимости формулы F. Как известно, эта проблема разрешима лишь для некоторых классов формул исчисления предикатов, среди которых характеризуются одним только видом кванторной приставки следующие три класса формул: (I) в приставке все кванторы существования предшествуют всем кванторам общности, (II) в приставке имеется только один квантор общности, которому предшествуют и за которым следуют кванторы существования, (III) в приставке имеются два квантора общности, которым предшествуют и за которыми, следуют кванторы существования. В случаях (II) и (III) задача легко сводится к такой, где множество предшествующих кванторов существования пусто. Подкласс таких формул класса (III) обозначается (III*). Наиболее трудный случай (III) проблемы разрешения был решен Гёделем, Кальмаром и Шютте. Однако во всех предложенных решениях случая (III) доказательства правильности их исключительно громоздки и трудно обозримы.

В реферируемой работе дается новое, значительно более короткое доказательство пригодности предложенного Шютте способа решения для случая (III*), основанное на так называемом методе символического решения, с с помощью которого Черчу (Church A., Rev. philos. Louvain, 1951, 49) удалось рассмотреть все решенные до сих пор случаи проблемы разрешения для замкнутых предварительных формул исчисления предикатов первой ступени, за исключением одного только случая (III*).

Это дает основание видеть в методе символического решения систематизирующий общий способ рассмотрения проблем разрешения для замкнутых предварительных формул исчисления предикатов первой ступени.

С. А. Яновская

1180. Семантическое описание дедуктивно замкнутых множеств формул узкого исчисления предикатов. Ассер (Eine semantische Charakterisierung der deduktiv abgeschlossenen Mengen des Prädikatenkalküls den ersten Stufe. Asser Günter), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, **1**, № 1, 3—28 (нем.)

Теорема Линденбаума о том, что всякое множество формул исчисления высказываний, дедуктивно замкнутое относительно системы правил вывода, включающей правило подстановки, является множеством тождеств некоторой, подходяще выбранной нормальной матрицы (McKinsey J. C. C., J. Symbolic Logic, 1941, **6**, 122), следующим образом переносится в узкое исчисление предикатов (у. и. п.).

Пусть фиксирована некоторая (вообще говоря, произвольная) система S правил вывода в у. и. п. S определяет в у. и. п. некоторое отношение выводимости Abl: именно, $XAblH$ означает, что формула H выводима из множества X формул у. и. п. с помощью S. Пусть $Ab(X)$, соответственно $Abu(X)$, есть множество всех формул у. и. п., выводимых из X с помощью S, соответственно с помощью трех правил: переименования предикатных и свободных и связанных индивидуальных переменных. Множество X формул у. и. п. называются дедуктивно замкнутым для Abl, если $X=Ab(X)$.

При интерпретации формул у. и. п. используется предикатно-логическая матрица $\mu=|M, M^*, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \Phi_1, \Phi_2|$, где M — непустое множество значений истинности, M^* — подмножество M, называемое множеством выделенных значений M, φ — одноместная операция на M, называется отрицанием, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, — двуместные операции на M, называются соответственно конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией и эквивалентностью, Φ_1 и Φ_2 — кванторные функции всеобщности и существования (их аргументами являются непустые подмножества $\subseteq M$, а значениями — элементы из M); мощность множества M называется мощностью матрицы μ.

Для любых матрицы μ и области индивидуумов J i-членным μ-аттрибутом на J называется отображение, сопоставляющее каждой i-ке индивидуумов из J однозначно определенное значение истинности из множества значений M матрицы μ. Множество $\mathfrak{A}$ μ-аттрибутов на J называется нигде не пустым, если для всякого натурального $n\geqslant 1$ существует в $\mathfrak{A}$ хотя бы один n-членный μ-аттрибут на J. Как обычно, определяются также μ-значение формулы H при интерпретации, выполнимость, тождественность H над μ, над μ в J, над μ в J и $\mathfrak{A}$ (тождественность H над μ, над μ в J и над μ в J и $\mathfrak{A}$ символически обозначается через $ag^{\mu}H$, $ag^{\mu}_{J}H$, $ag^{\mu}_{J\mathfrak{A}}H$ соответственно). Множество тождественных формул над μ, над μ в J, над μ в J и $\mathfrak{A}$ обозначается соответственно через ag^{μ}, ag^{μ}_{J}, $ag^{\mu}_{J\mathfrak{A}}$. Матрица μ называется дедуктивно наследственной (deduktionserblich) для отношения выводимости Abl, соответственно в J, в J и $\mathfrak{A}$, если ag^{μ}, соответственно $ag_{J}{}^{\mu}$, $ag^{\mu}_{J\mathfrak{A}}$, дедуктивно замкнуто для Abl.

Доказывается следующая основная теорема 5: Для всякого дедуктивно замкнутого для Abl множества X формул у. и. п. существует предикатно-логическая матрица μ, (непустое) множество J индивидуумов и (нигде не пустое) множество $\mathfrak{A}$ μ-аттрибутов на J так, что $X=ag^{\mu}{}_{J}\mathfrak{A}$.

Из этой теоремы и ее доказательства немедленно следуют:

Теорема 6. Множество X формул у. и. п. в том и только в том случае дедуктивно замкнуто для Abl, если существует (счетная) матрица μ, счетное множество индивидуумов J и счетное множество $\mathfrak{A}$ μ-аттрибутов на J так, что 1) μ дедуктивно наследственна для Abl в J и $\mathfrak{A}$ и 2) $X=ag^{\mu}_{J\mathfrak{A}}$.

Теорема 7. $XAblH$ тогда и только тогда, когда для каждой (счетной) матрицы μ, каждого счетного множества J индивидуумов и каждого счетного множества $\mathfrak{A}$ μ-аттрибутов на J имеет место: если μ дедуктивно наследственна для Abl в J и $\mathfrak{A}$ и $X\subseteqq ag^{\mu}_{J\mathfrak{A}}$, то $ag^{\mu}_{J\mathfrak{A}}H$.

Из теоремы 7 легко получается критерий невыводимости (теорема 8).

Если в качестве S берутся обычные правила вывода в у. и. п: правила переименования предикатных и индивидуальных переменных, правило отделения (если $XAblH_1$ и $XAbl$ $(H_1\to H_2)$, то $XAblH_2$), кванторные схемы, то теоремы 5—8 можно уточнить: именно, в качестве μ можно брать нормальные матрицы и дедуктивную наследственность μ заменить на нормальность μ.

Имеется ряд указаний, каким образом основные результаты можно перенести в исчисления предикатов высших ступеней, в полное ступенчатое исчисление, а также как истолковать их в многозначных логиках предикатов. Д. А. Захаров

1181. Заметки об исчислении предикатов. Хинтикка (Notes on the quantification theory. Hintikka K. Jaako J.), Comment. phys.-math., 1955, **17**, № 12, 13 pp. (англ.)

Статья является добавлением к другой работе автора (Form and content in quantification theory. Acta Philos. Fennica, fasc. VIII, Helsinki, 1955), содержащей некоторое построение исчисления предикатов.

Приводится неконструктивное (с использованием аксиомы выбора) доказательство эквивалентности понятий выполнимости формул исчисления предикатов и совместимости их (последнее означает существование модели, способ построения которой определяется в упомянутой работе). Классы формул, построенные в ходе этого доказательства, образуют дерево (частично упорядоченное множество, в котором элементы, меньшие данного, образуют цепь и выполняется условие обрыва убывающих цепей), которое исследуется во второй половине статьи. В. К. Детловс

1182. Об определении «формального вывода». Монтагью, Хенкин (On the definition of «formal deduction». Montague Richard, Henkin Leon), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 2, 129—136 (англ.)

Рассматривается система естественных условий, которым должно удовлетворять понятие формального вывода. Для определенности в качестве формальной системы Σ берется узкое исчисление предикатов.

Как правило, возникает необходимость определить для каждого множества формул Γ и произвольной формулы A класс $D(\Gamma, A)$ формальных выводов формулы A из посылок Γ, что порождает отношение $\vdash$: $\Gamma\vdash A$ имеет место тогда и только тогда, когда $D(\Gamma, A)$ не пусто. Считается желательным, чтобы определение $D(\Gamma, A)$ удовлетворяло следующим условиям:

1) для каждого разрешимого множества формул Γ множество $D(\Gamma, A)$ разрешимо;

2) $\Gamma\vdash A$, коль скоро A является элементом Γ или аксиомой;

3) если $\Gamma\vdash A$ и $\Gamma\vdash A\supset B$, то $\Gamma\vdash B$;

4) если $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$, то $\Gamma\vdash A\supset B$, где $\cup$ — знак теоретико-множественной суммы;

5) если $\Gamma\vdash A$ и переменное a не входит свободно ни в одну из формул Γ, то $\Gamma\vdash(a)A$;

6) если $\Gamma\vdash A$, то $\Gamma\cup\Delta\vdash A$;

7) если $\Lambda\vdash A$, то A — формальная теорема (Λ — пустое множество);

8) если $\Gamma \vdash A$, то существует конечное подмножество $\Gamma_1 \subset \Gamma$ такое, что $\Gamma_1 \vdash A$.

Существует много других определений $D(\Gamma, A)$, которые ведут к понятию $\vdash$, удовлетворяющему условиям 1)—8), но уже условия 2)—8) определяют понятие $\vdash$ в некотором смысле однозначно, а именно, легко доказывается следующая теорема: Пусть $\vdash_1$ $\vdash_2$ удовлетворяют условиям 2)—8). Тогда для любого множества формул Γ и любой формулы A $\Gamma \vdash_1 A$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash_2 A$.

Ответ на вопрос о независимости условий 2) — 8) дает следующая теорема: Для любого $p = 2), 3), \ldots, 8)$ существует отношение $\vdash_p$, которое не удовлетворяет условию p и удовлетворяет всем остальным условиям из числа 2), . . . , 8). Ю. И. Янов

1183. О некоторых свойствах бинарных отношений. Оно (On some properties of binary relations. Ono Katuzi), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 161—170 (англ.).

Пусть RS — относительное произведение бинарных отношений R и S на множестве V, R^{-1} — обращение R, $\overline{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R(R^{-1}R)^n$. Отношение R называется замкнутым (closed), если $RR^{-1}R = R$ (для любого R отношение $\overline{R}$ замкнуто; для замкнутости R необходимо и достаточно $R = \overline{R}$). Отношение T называется транзитивным, если $T^2 \subseteq T$. Отношение S называется расширением отношения R, если $R \subseteq S$ и $\overline{S}R^{-1}\overline{S} \subseteq \overline{R}$. Система отношений называется связанной (associable), если существует общее расширение отношений системы.

Изучаются связанные системы отношений. Среди результатов:

Теорема 8. Чтобы система отношений была связанной, необходимо и достаточно, чтобы отношения системы были связанными попарно.

Теорема 9. Для связанности двух отношений эквивалентности C и D необходимо и достаточно, чтобы $CD = C \cap D$.

В § 3 рассматриваются разложения замкнутых и транзитивных отношений, специализацией F и G уточняется теорема Риге о представимости замкнутого отношения R в виде $R = F^{-1}G$ (F и G — функции), указываются некоторые приложения, Кроме того, доказывается

Теорема 12. Если транзитивное отношение T удовлетворяет условию: $T \cap T^{-1}$ $(TT^{-1} \cup T^{-1}T) \cap I$ (I — тождественное отношение на V), то T можно представить в виде $T = F^{-1}SF$, где F — функция, а S — частичный порядок (т.е. $FF^{-1} \subseteq I$, $S^2 \subseteq S$ и $S \cap S^{-1} I$).

Д. А. Захаров

1184. Приложения математической логики к различным разделам математики. Крейсел (Applications of mathematical logic to various branches of mathematics. Kreisel G.), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, **A5**, 37—50 (англ.)

Доклад, относящийся к различным вопросам оснований математики, тематически не очень связанным между собой. Начало доклада посвящено основаниям геометрии. Формулам $\mathfrak{A}$ комплексной аффинной геометрии сопоставляются формулы $\mathfrak{A}'$ комплексной проективной геометрии, таким образом, что из истинности $\mathfrak{A}$ вытекает истинность $\mathfrak{A}'$ (идея этого сопоставления связана с принципом Понселе). Указывается, что для действительных пространств соответствующее утверждение неверно.

Далее автор рассматривает различные системы арифметики. Рассматривается предложение, соответствующее, в терминах квантификации, первой ε-теореме Гильберта — Бернайса и отмечается, что оно теряет силу после присоединения схемы индукции.

Помимо обычного правила индукции (B), рассматривается следующее, отличающееся от него лишь заменой импликации на эквивалентность:

$$(S) \qquad \frac{A(0),\ A(n) \sim A(n')}{A(n)}.$$

С помощью нестандартных моделей рассматриваются взаимоотношения между системами, содержащими правила (B) и (S). Отмечается результат Бернайса: всякое предложение, доказуемое с помощью (B), может быть доказано и с помощью (S), но при этом, вообще говоря, должны быть использованы вспомогательные функции — т. е. такие, которые не входят ни в доказываемую формулу, ни в уравнения, определяющие функции, входящие в эту формулу. Предлагается определить понятие „элементарного" или непосредственного доказательства (direct proof) как такого доказательства, которое не содержит вспомогательных функций; при этом автор говорит, что теория (S_1) „проще", чем (S_2), если всякая формула, которая может быть непосредственно доказана в (S_1), может быть непосредственно доказана и в (S_2), но не наоборот. (Аналогично вводится понятие эквивалентных систем.) Отмечается значение этих понятий для рекуррентной арифметики, в которой не всякая доказуемая формула допускает непосредственное доказательство. В арифметическом формализма Z_μ Гильберта и Бернайса, где рекурсивные определения устранимы с помощью μ-символа, всякая доказуемая формула допускает непосредственное доказательство. По мнению автора, это означает, что употребление кванторов нарушает непосредственность доказательства.

В связи с элементарным исчислением со свободными переменными (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, B. 1, Berlin, 1934, § 7) автор делает ряд замечаний и, в частности, отмечает неверность своего более раннего утверждения о том, что в этом исчислении всегда могут быть устранены вспомогательные функции и предикаты.

Автор касается также нестандартных арифметических моделей для арифметики, которая может быть построена в теории множеств.

Отмечается возможность „дизъюнктивной интерпретации" анализа (не содержащего теории точечных множеств), при которой каждой формуле $\mathfrak{A}$ анализа сопоставляется последовательность формул рекурсивной арифметики A_n, причем если $\mathfrak{A}$ доказуема (в анализе), то некоторая A_n доказуема (в рекурсивной арифметике), а если $\mathfrak{A}$ опровержима, то каждая A_n сводится к ложной формуле путем подстановки (вместо переменных A_n) чисел и функций некоторого класса. Хотя вместо A_n с функциональной переменной можно взять формулу A'_n без переменных этого рода, вывести $\mathfrak{A}$ из A_n средствами исчисления предикатов невозможно: для этого нужна индукция.

Последние страницы посвящены рассмотрению той роли, которую играет следующее „ω-условие": если доказуема формула $(Ex)\,A(x)$ с общерекурсивным $A(a)$, то для некоторого натурального числа n формула $A(n)$ истинна. В этой связи рассматриваются примеры из теории функций комплексного переменного и из аналитической теории чисел.

Отмечается, что условие общей рекурсивности функции можно сформулировать как доказуемость формулы вида $(x)\,(Ey)\,H(p, x, y)$ в системе, удовлетворяющей ω-условию. Указывается на аналогичную роль этого условия в теории рекурсивных операторов и на дальнейшую связь с теоремой Брауэра о равномерной непрерывности непрерывных функций. Кроме того, утверждается, что функции вида $\mu_y(z)\,A(n, y, z)$ образуют базу

всех ограниченных функций в том смысле, что если некоторый оператор определен для всех функций указанного вида, то он определен и для всех ограниченных функций.

Изложение очень сжатое, местами мало понятное. Встречаются очевидные небрежности. В конце приводится замечание Робинсона относительно возможности аксиоматизации некоторых геометрических систем в узком исчислении предикатов, а также его вопрос относительно элементарности, в смысле автора, доказательства теоремы о простых числах, принадлежащего Сельбергу (Selberg). На этот вопрос автор ответил, что доказательство Сельберга по существу элементарно в отличие от классических доказательств этой теоремы.

А. С. Есенин-Вольпин

1185. Полнота в теории типов. Тиле (Vollständigkeit im Stufenkalkül. Thiele Helmut), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1957, **3**, № 3-4, 211—224 (нем.)

Хенкин (Henkin L., J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 81-91 доказал теорему о полноте для теории типов. При этом им было обобщено понятие модели путем введения нестандартных моделей. Автор подвергает понятие нестандартной модели дальнейшему обобщению, допуская, наряду с хенкинскими, произвольные интерпретации ступенчатого исчисления, использующие переменные многих родов. Это позволяет ему обобщить теорему Хенкина о полноте на теорию типов без аксиомы объемности. Помимо этого, техника автора доставляет возможность различных выборов логических констант, причем функциональная полнота не требуется. Кроме того, автор в формулировках своих теорем не требует замкнутости формул.

В отличие от Хенкина, который пользовался чёрчевской формализацией теории типов, автор имеет дело с обычной одномерной теорией типов (ступени ω).

А. С. Есенин-Вольпин

1186. Замечание о теореме Сколема, касающейся невозможности характеристики натурального ряда. Маэхара (Remark on Skolem's theorem concerning the impossibility of characterization of the natural number sequence. Maehara Shôji), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 10, 588—590 (англ.)

Сколем (Skolem Th., Fundam. math., 1934, **23**, 150—161) доказал, что всякое конечное или счетное множество M предложений, истинных для натурального ряда N и выразимых посредством замкнутых формул исчисления предикатов первой ступени, истинны также в некоторой другой интерпретации.

Эта теорема может быть доказана также с помощью гёделевских теорем о полноте и неполноте. Утверждается, что при этом множество M должно быть рекурсивным.

Доказывается следующая теорема: Пусть M — произвольный класс аксиом и M' — система аксиом, получающаяся присоединением к M всех предложений вида $1=1$, $1\neq 2$, $1\neq 3$, . . . , $2\neq 1$, $2=2$, $2\neq 3$, . . . , $3\neq 1$, $3\neq 2$, $3=3$, . . . , Пусть система M' непротиворечива и τ — индивидуальный символ, не входящий в M, а система M^* получается из M путем присоединения аксиом $1\neq\tau$, $2\neq\tau$, $3\neq\tau$, . . . Тогда система M^* непротиворечива.

Логическое исчисление, в связи с которым рассматривается M, должно удовлетворять лишь двум весьма общим условиям, из которых достаточно отметить второе: вывод остается выводом при замене любого индивидуального символа на числовую константу.

Референт отмечает, что сформулированное выше утверждение о рекурсивности M в действительности не является необходимым и может быть заменено рекурсивной перечислимостью M (Клини С. К. Введение в метаматематику, 1957, 375, теорема 44).

А. С. Есенин-Вольпин

1187. Об операции сечения в системе генценовского типа. I, II. Исэки (On the cut operation in Gentzen calculi. I, II. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 10, 719—721; 1957, **33**, № 2, 98—99 (англ.)

Через LK и LI обозначаются соответственно классическая и интуиционистская формальные системы генценовского типа G_1 (Клини С. К., Введение в метаматематику, стр. 389—391).

Во второй заметке доказывается следующая теорема: Правило сечения в LK-системе может быть заменено правилами

$$(1)\qquad \frac{\Gamma\to\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B},\ \Delta\,\Pi,\Gamma\to\mathfrak{A}}{\Gamma,\Pi\to\Delta,\ \mathfrak{B}},$$

$$(2)\qquad \frac{\to\mathfrak{A}\mathfrak{A}\to}{\to}.$$

В первой заметке эта теорема ошибочно утверждалась без правила (2).

Указывается, что аналогично можно доказать теорему: Правило сечения в LI-системе может быть заменено правилами

$$(5)\qquad \frac{\Gamma\to\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}\quad\Gamma,\Pi\to\mathfrak{A}}{\Gamma,\Pi\to\mathfrak{B}},$$

$$(6)\qquad \frac{\to\mathfrak{A}\quad\mathfrak{A}\to}{\to}.$$

Из этих двух предложений автор, используя теорему Генцена о нормальной форме (там же, стр. 400), получает теорему 3:

Любое доказуемое утверждение в LK-системе может быть доказано без правил (1) и (2); в LI-системе — без (5) и (6).

С. И. Адян

1188. Формализация m-значного импликативного исчисления высказываний Лукасевича. Роз (Formalisation du calcul propositionnel implicatif à m valeurs de Lukasiewicz. Rose Alan), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 18, 1263—1264 (франц.)

Устанавливается, что m-значное импликативное исчисление высказываний Лукасевича может быть формализовано, для чего достаточно взять единственное правило вывода modus ponens и следующие схемы аксиом:

$A1.\ P\to(Q\to P)$; $A2.\ (P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R))$; $A3.\ P\vee Q\to Q\vee P$; $A4.(P\to Q)\vee(Q\to P)$ и $A5.(P\overrightarrow{\ }_{m-1}Q)\vee P$, где $P\vee Q=_{\mathrm{df}}(P\to Q)\to Q$ и символ $\overrightarrow{\ }_i$ определен соотношениями $P\overrightarrow{\ }_1Q=_{\mathrm{df}}P\to Q$, $P\overrightarrow{\ }_{i+1}Q=_{\mathrm{df}}P\to(P\overrightarrow{\ }_iQ)$. Эта аксиоматизация является полной в слабом смысле. Данный результат сравнивается с аналогичным результатом Шрётера (РЖМат, 1959, 90). Далее отмечается, что присоединение к A1—A5 схемы аксиом A6 $(P\to\bar{Q})\to(Q\to P)$ приводит к формализации (полной в слабом смысле) m-значного исчисления высказываний, основанного на двух примитивных $\to$ и —. В то же время схемы аксиом A1—A4 и A6 позволяют формализовать в том же смысле $\aleph_0$-значное исчисление высказываний, построенное на базе $\to$ и —.

С. В. Яблонский

1189 Замечания к исчислению высказываний Клини. Охаси (Bemerkungen zum Kleeneschen Aussagenkalkül. Ohasi Kempatiro), Норинсё суйсан косюсё кэнкю хококу. Сидзэн какагу-хэн, J. Shimonoseki Coll. Fish. Sci., 1957, № 3, 31—34 (нем.)

Рассматривается система аксиом Клини для исчисления высказываний (Клини С. К., Введение в мета-

математику, 1957, стр. 77). Доказывается независимость каждой аксиомы этой системы от остальных. Для каждой аксиомы строится соответствующая таблица истинности и указываются выделенные значения так, что все аксиомы, за исключением рассматриваемой, принимают выделенные значения, в то время как рассматриваемая аксиома принимает значение, отличное от выделенных. С. И. Адян

1190. Нормальные формы для формул множества $S(D)$ двузначного исчисления высказываний. Михайлеску (Forme normale in multimea $S(D)$ a calculului propozitional bivalent. Mihailescu Eugen), An. stiint. Univ. Iasi., 1956, Sec. 1, 2, № 1-2, 15—27 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается система аксиом, полученная добавлением к системе $L(C, E, A, R)$ (Ann. scient. Univ, Jassy, 1939, 24, 73—152) новой аксиомы

$$EDpqRApqq,$$

где логические операции E суть эквивалентность, R — несовместность; A — дизъюнкция, а D задается таблицей

	0	1
0	0	0
1	1	0

Для трех типов формул, содержащих только операцию D (формул множества $S(D)$), находятся нормальные формы, записываемые через E, A и R. С. И. Адян

1191. Нормальные формы в двузначных исчислениях высказываний. Михайлеску (Forme normale în calcul propozitiilor bivalente. Mihailescu Eugen), Bul. stiint., Acad. RPR, Sec. mat. si. fiz., 1956, 8, № 2,я 297—327 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются различные двузначные исчисления высказываний. Логические операции — импликация C эквивалентность E, конъюнкция K и несовместность R определяются аксиомами:
(1) $CCC\,pq\,Crs\,Ct\,CCsp\,Crp$; (2) $CE\,pq\,Cpq$, $CE\,pq\,Cqp$, $CCpq\,CC\,qp\,Epq$; (3) $CK\,pqp$, $CK\,pqq$, $Cp\,Cq\,Kpq$; (4) $EERpq\,Rrs\,EEpq\,Ers$; (5) $EKR\,pqr\,RK\,pr\,Kqr$.

Доказывается полнота исчислений $L(CE)$, $L(C, E, K)$ и $L(C, E, K, R)$, построенных соответственно на аксиомах (1)—(2), (1)—(3) и (1)—(4). При доказательстве полноты $L(C, E, K, R)$ используется метод нормальных форм. Б. Ю. Пильчак

1192. Дедуктивная эквивалентность и выводимость. Хиж (Inferential equivalence and natural deduction. Hiż H.), J. Symbolic Logic, 1957, 22, № 3, 237—240 (англ.)

Рассматриваются исчисления высказываний, построенные с помощью импликации ($\supset$), отрицания ($\sim$) и метасимвола H, означающего дедуктивную эквивалентность высказываний. В качестве первого аргумента H берется одна формула (схема) p, а в качестве второго — две $\{q_1, q_2\}$, так что отношение H записывается в виде $pH\{q_1, q_2\}$. Предлагается следующая система из 5 основных правил вывода:

1) $\dfrac{pH\{q_1, q_2\}}{p\supset q_1,\ p\supset q_2}$,

2) $\dfrac{pH\{q_1, q_2\},\ p}{q_1,\ q_2}$, 3) $\dfrac{pH\{q_1, q_2\},\ q_1,\ q_2}{p}$,

4) $\dfrac{p\supset q,\ q\supset p}{pH\{q, q\}}$, 5) $(p\supset q)\supset rH\{q\supset r,\ \sim p\supset r\}$.

Смысл этих правил поясняется на примере правила 2), которое читается так: „Если $pH\{q_1, q_2\}$—метатеорема, и p—теорема, то q_1 и q_2 суть теоремы“.

Эта система полна, так как из нее выводятся все аксиомы и правило зачеркивания полной системы аксиом исчисления высказываний Лукасевича (см. стр. 160 книги Чёрча; РЖМат, 1958, 7446К). Показывается независимость правил 1)—5). В качестве другой системы основных правил можно взять 1), 2), 5) и

1′) $\dfrac{pH\{q_1, q_2\}}{q_1\supset(q_2\supset p)}$,

4′) $\dfrac{p\supset q_1,\ p\supset q_2,\ q_1\supset(q_2\supset(q_2\supset p))}{pH\{q_1, q_2\}}$

Эта система также полна и потому в смысле выводимости формул вычисления высказываний эквивалентна первой, однако по отношению к выводимости метатеорем вторая система сильнее, так как в ней выводима теорема $\sim(p\supset q)H\{p, \sim q\}$, которая не выводима в первой системе. Ю. И. Янов

1193. Ненормальные матрицы для исчисления высказываний. Черч (Non-normal thruth-tables for the propositional calculus. Church Alonzo), Bol. Soc. mat. mexicana, 1953, 10, № 1-2, 41—52 (англ.)

Рассматриваются системы матриц (таблиц истинности), являющиеся моделями классического исчисления высказываний. Автор отмечает, что любая система матриц, гомоморфная двухэлементной булевой алгебре, будет характеристической для классического исчисления высказываний (т. е. будет точной моделью этого исчисления), если в качестве выделенных значений взять элементы, образом которых является единица булевой алгебры. Системы матриц такого типа называются нормальными в смысле Карнапа, а все другие ненормальными в смысле Карнапа или слабо ненормальными. Любую булеву алгебру $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как характеристическую систему матриц (классического исчисления высказываний) с единственным выделенным значением (единицей алгебры $\mathfrak{A}$). Такая система матриц слабо ненормальна, если булева алгебра содержит более двух элементов. Всякая система матриц $\mathfrak{B}$, которая гомоморфно отображается на булеву алгебру $\mathfrak{A}$, являющейся слабо ненормальной системой матриц, и притом так, что образ всех выделенных значений есть единица $\mathfrak{A}$, также является слабо ненормальной. Все полученные таким образом системы матриц регулярны (если p выделено, а q не выделено, то $p\supset q$ не выделено). Если определение операции $\supset$ на некотором множестве элементов не удовлетворяет требованию регулярности, то остальные операции можно доопределить так, чтобы получилась характеристическая система матриц, не гомоморфная никакой булевой алгебре. Такие характеристические системы матрицы называются сильно ненормальными. Автор приводит 5 систем матриц, из которых три являются слабо ненормальными, а две сильно ненормальными, и ставит вопрос о том, существуют ли другие сильно ненормальные системы матрицы, не являющиеся очевидными уточнениями приведенных или прямыми произведениями их. Автор на примерах показывает, что ненормальные системы матриц могут быть использованы для доказательства независимости аксиом узкого исчисления первой и высших ступеней. Н. А. Карпова

1194. Вывод с помощью исключения пар дополнительных. Саймондс, Чизом (Inference by complementary elimination. Symonds Bernard K., Chisholm Roderick M.), J. Symbolic Logic, 1957, 22, № 3, 233—236 (англ.)

Приводится правило вывода с помощью исключения символов вида p и $-p$, называемое правилом исклю-

чения дополнительных (здесь $-p$ рассматривается как отрицание p). Применение к набору посылок правила исключения дополнительных осуществляется в три этапа (в приводимых примерах нет никаких других связей, кроме конъюнкции, дизъюнкции и отрицания): 1) посылки соединяются знаком дизъюнкции и называются дизъюнктивной посылкой, 2) если имеются n посылок, то из дизъюнктивной посылки исключается $n-1$ или менее пар, в которых один член является отрицанием другого, 3) формула, полученная посредством применения второго этапа, может быть улучшена только путем исключения лишних скобок и дизъюнкций и является следствием из данных посылок.

Например, имеем посылки: $(p \vee q)$, $(w \vee -q \vee r)$, $(-p \vee s) - r$.

Дизъюнктивная посылка:

$$(p \vee q) \vee (w \vee -q \vee r) \vee (-p \vee s) \vee -r.$$

Подчеркнем и пронумеруем пары дополнительных:

$$\underset{1}{(p} \vee \underset{2}{q)} \vee (w \vee \underset{2}{-q} \vee \underset{3}{r)} \vee \ (\underset{1}{-p} \vee s) \vee \underset{3}{-r}.$$

Исключаем три пары дополнительных:

$$(\vee) \vee (w \vee \cdot \vee) \vee (\vee s) \vee$$

и, наконец, получаем формулу $(w \vee s)$, которая действительно является следствием из первоначальных посылок.

С помощью описанных правил проводится вывод:
modus ponens $(-p \vee q)\, p / \therefore q$,
modus tollens $(-p \vee q), -q / \therefore -p$,
дизъюнктивного силлогизма

$$(p \vee q), -p / \therefore q$$

и гипотетического силлогизма

$$-p \vee q, -q \vee r / \therefore -p \vee r.$$

Рассматриваются также другие аналогичные типы исключений. Б. И. Фиников

1195. О парадоксе фундированных классов. Монтагью (On the paradox of grounded classes. Montague Richard), J. Symbolic Logic, 1955, **20**, № 2, 140 (англ.)

Парадокс класса всех фундированных классов, обнаруженный Шэн Ю-дином (РЖМат, 1954, 5027), приводится к форме, не требующей таких понятий, как натуральное число или бесконечная последовательность. Для этого понятие фундированного класса заменяется следующим понятием, которое эквивалентно ему, если принимать аксиому выбора. Класс x называется регулярным, если и только если $(k)(x \in k \supset (\exists y)(y \in k \& \neg (\exists z)(z \in k \& z \in y)))$. Показывается, что класс всех регулярных классов не может быть ни регулярным, ни нерегулярным. А. В. Кузнецов

1196. Два семантических парадокса. Шэн Ю-дин (Two semantical paradoxes. Shen Yuting), J. Symbolic Logic, 1955, **20**, № 2, 119—120 (англ.)

Приводятся два семантических парадокса, заключенных в следующих двойственных друг другу предложениях: 1) „То, что я говорю, не может быть доказано", 2) „То, что я говорю, может быть опровергнуто". Разбирается связь этих парадоксов с известной теоремой Гёделя о неполноте таких формальных систем, как формальная арифметика. Парадокс получается и в том случае, когда к 1) или 2) добавить впереди один или несколько раз слова „Может быть доказано, что ...". А. В. Кузнецов

1197. Формальные определения перечислимости. Субьета (Definiciones formales de humerabilidad. Zubieta R. Gonzalo), Bol. Soc. mat. mexicana 1956, **1**, № 1, 49—56 (исп.)

Обычное определение однозначной функции (а следовательно, и перечислимого множества) опирается на понятие упорядоченной пары (x, y) элементов x и y. В некоторых формальных системах (например, система Куайна (Quine W. V., Amer. Math. Monthly, 1937, 44 70—80)) возможны различные, не эквивалентные друг другу определения упорядоченной пары, что приводит к различным, опирающимся на них, понятиям однозначной функции и перечислимого множества. Н. М. Нагорный

1198. Об одном классе бинарных последовательностей. Зирлер (On a class binary sequences. Zierler Neal), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 675—681 (англ.)

Автор рассматривает последовательности наборов n чисел, принимающих значения 0 и 1. Последовательности j-х компонент наборов, входящих в последовательность, имеют период $p_j > j = 1, \ldots, n$ (p_j — взаимно простые целые числа, большие единицы). Очевидно, периодичность последовательности j-х компонент есть необходимое и достаточное условие периодичности последовательности наборов. Множество таких последовательностей будем обозначать X. Далее рассматривается множество F функций, определенных на всех последовательностях наборов длины n и принимающих значения 0 и 1. Очевидно, значения функции на каждом элементе множества X представляют собой бесконечную периодическую последовательность. Вводится в рассмотрение множество $Q = \{f(x) : f \in F,\ x \in X\}$, m — число элементов Q. Легко видеть, что $m \leqslant 2^{2^n + p_1 + \ldots + p_n}$.

Затем рассматриваются условия совпадения элементов множества Q, когда f и $g \in F$ различны. Выводится, что

$$m = T(0) + T(1) \sum q_i + T(2) \sum q_i q_j + \ldots + T(n)\, q_1 \ldots q_n,$$

где $q_i = 2^{p_i - 1} - 1$, $i = 1, \ldots, n$,

$$T(K) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} 2^{2^j}$$

Для каждой функции $f \in F$ определяется множество $N(f)$ таких $j = 1, \ldots, n$, что f не зависит от j-й компоненты любого из наборов, входящих в последовательности $x \in X$, и показывается, что если каждая последовательность j-х компонент содержит и нули и единицы, то при условии, что наименьший период последовательности j-х компонент равен r_j, наименьший период последовательности $f(x)$ таков: $r = \prod_{j \notin N(f)} r_j$.

Н. А. Карпова

1199. Взаимосвязь в математизируемых естественных науках. Фрей (Der Verknüpfungszusammenhang in den mathematisierten Naturwissenschaften. Frey Gerhard), Philos. natur., 1955, **3**, № 2, 238—251 (нем.)

Обсуждается вопрос о возможности описания различных физических явлений с помощью математических теорий, исходящих из транзитивных и асимметричных

двучленных отношений типа «причинности». В частности, затрагивается проблема применимости такого рода теорий к квантовой физике.

А. В. Гладкий

1200. Диспозициональные утверждения. Беркс (Dispositional statements. Burks Arthur W.), Philos. Sci., 1955, 22, № 3, 175—193 (англ.)

Оперируя понятиями «логической необходимости» и «причинной необходимости», автор «определяет» причинную импликацию pcq («$p \to q$ причинно необходимо»), «невырожденную причинную необходимость» Cp («p причинно необходимо, но не логически необходимо») и «непарадоксальную причинную импликацию» $(p \text{ прс } q) = (C(p \to q) \& \overline{Cp} \& \overline{C\bar{q}})$. Эти понятия используются для исследования утверждений определенного типа, называемых автором диспозициональными (dispositional). В качестве примера приводится утверждение «этот предмет растворим в царской водке», которое автор предлагает записывать в виде $(E\varphi)(\varphi(b) \& \varphi(b) \& A(b) \text{прс} D(b))$, где $A(b)$ означает «b помещен в царскую водку» $D(b)$ — «b растворяется», а $\varphi(b)$ есть некоторое дополнительное условие, достаточное для растворимости b в царской водке.

Целью автора является применение построенной теории к некоторым вопросам натурфилософии.

А. В. Гладкий

1201. Символическая логика в приложении к исследованию селективных токов (La logique symbolique appliquée à l'étude des courants sélectifs), Ind. franç.— achats et entret. matér. industr., 1957, **6**, № 69, 1309, 1311—1313, 1315—1317 (франц.; рез. англ.)

Популярная статья, в которой излагаются начала булевой алгебры и принципы ее применения к контактным и электронным схемам. Библ. 3 назв.

Г. Н. Поваров

1202. Аксиоматические системы, концептуальные схемы и непротиворечивость математических теорий. Мак-Нотон (Axiomatic systems, conceptual schemes, and the consistency of mathematical theories. McNaughton Robert), Philos. Sci., 1954, **21**, № 1, 44—53 (англ.)

Математическая теория может мыслиться в виде индуктивной модели (системы воображаемых вещей), которую автор называет концептуальной схемой. В работе развивается мысль о том, что наличие концептуальных схем необходимо и достаточно для обоснования аксиоматических систем.

А. С. Есенин-Вольпин

1203. Философские принципы и технические проблемы в математической логике. Стернфелд (Philosophical principles and technical problems in mathematical logic. Sternfeld Robert), Methodos, 1956, **8**, № 32,269—288 (англ.)

Отстаивается точка зрения, что каждая логико-математическая система является воплощением определенных философских принципов и что роль математической логики поэтому не ограничивается созданием тех или иных математических или символических инструментов для научных целей. Автор считает поэтому, что критика предшествующей системы с точки зрения последующей не имеет силы, поскольку эти системы основаны на совершенно различных философских принципах, например, критика Расселом системы Фреге не доказывает несостоятельности последней, ибо понятия предложения и класса понимаются Фреге и Расселом по-разному. Приводится дискуссия автора в Мак-Нотоном (R. McNaughton).

А. А. Зыков

1204. Отношения мышления к символическим выражениям логики и математики. Пьяже (Les activités mentales en rapport avec les expressions symboliques logiques et mathématiques. Piaget Jean), Synthese, 1954, **9**, № 2, 73—90 (франц.)

Автор выступает против как чисто психологической, так и логической трактовок логики и рассматривает ее законы как нормы правильного мышления, складывающегося из взаимодействия между организмом и средой, в частности через язык. Мышление невозможно без чувственных образов, которые могут быть символическими. Содержание и формы мышления в свою очередь взаимодействуют.

Отношения между логистикой, логикой и экспериментальной психологией сравниваются с отношениями между математикой, математической физикой и физикой.

В. А. Айзенштейн

1205. Аксиоматика сложного созерцания. Реенпяя (Axiomatik der Anschauungs-Mannigfaltigkeit. Reenpää Yrjö), Suomalais. tiedeakat. toimituks., Sar. A., 1953, **1**, № 157, 1—24 (нем.)

Делается попытка дать систему аксиом, описывающих понятие «сложное восприятие».

В. А. Айзенштейн

1206. Простой пример ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности. Цейтин Г. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда **1**, М., АН СССР, 1956, 187—188

См. также: 1361, 1724, 1725, 1773

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

1207. Особый случай оценки тригонометрических сумм с простыми числами. Виноградов И. М., Изв. АН СССР, Сер. матем., 1958, 22, № 1, 3—14

Пусть $S = \sum_{p<P} \exp\{2\pi i k f_{(p)}\}$, где P достаточно велико, суммирование производится по простым числам p, k — целое положительное, $f(x) = A_n x^n + \ldots + A_1 x$, x — целое постоянное $\geqslant 12$, A_s $(s = 1, \ldots, n)$ — вещественные, $A_s = a_s/q_s + \delta_s/p^s$, $(a_s, q_s) = 1$, $0 < q_s$, $|\delta_s| \leqslant p^{\nu}$, $\nu = 1/n$.

Автором (РЖМат, 1958, 3575) была дана общая теорема об оценке сумм S в зависимости от общего наименьшего кратного Q, чисел $q_1, \ldots, q_n$, которая, однако, в случае $Q \leqslant p^{\nu}$ дает грубые результаты. Устанавливается, что если $k \leqslant p^{3\nu^2}$, то при произвольно малом постоянном $\varepsilon > 0$: 1) при $Q < p^{\nu}$

$$S \ll p \exp\{19 (\ln \ln p)^2\} (k, Q)^{0,5\nu} Q^{-0,5\nu+\varepsilon},$$

причем в случае, когда по меньшей мере для одного $s = s'$ выполнено неравенство $|\delta_{s'}| \geqslant 1$, имеет место также оценка

$$S \ll p \exp\{19 \ln \ln p)^2\} |\delta_{s'}|^{-0,5\nu} Q^{0,5\nu+\varepsilon}.$$

2) при $Q < H$, $H = \exp\sqrt{\ln p}$

$$S \ll p\,(\ln p)^2\, Q^{-0{,}5\nu+\varepsilon}\,(k,\,Q)^{0{,}5\nu},$$

причем в случае, когда по меньшей мере для одного $s = s'$ выполняется неравенство $|\delta_{s'}| \geqslant 1$, справедлива также оценка

$$S \ll p\,(\ln p)^2 Q^{-0{,}5\nu+\varepsilon}\,|\delta_{s'}|^{-0{,}5\nu} + pH^{-1}.$$

Указывается также применение полученных оценок к вопросу о распределении дробных долей $f(p)$.

К. К. Марджанишвили

1208. Средние тригонометрических сумм и автокорреляционные функции. Басс, Бертрандиа (Moyennes de sommes trigonométriques et functions d'autocorrélation. Bass Jean, Bertrandias Jean-Paul), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 26, 2457—2459 (франц.)

Рассматривается класс S комплексных функций на оси $-\infty < t < \infty$, исчезающих при $t < 0$, ограниченных и для которых существуют средние:

$$M(u) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt;\quad \gamma(h) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \overline{u}(t)\,u(t+h)\,dt.$$

Пусть A — подкласс S такой, что 1) $Mu = 0$, 2) $\gamma(h)$ непрерывна, $\gamma(0) < \infty$; $\gamma(h)\to 0$ при $h\to\infty$. О функциях класса A доказывается несколько простых лемм, и из них выводятся известные теоремы Ван-дер-Корпута об оценках тригонометрических сумм (Van der Corput, Acta Math., 1931, **56**, 373) (эти оценки еще проще получаются непосредственно). Далее, при помощи указанных теорем о тригонометрических суммах строятся некоторые специальные функции f класса A, а из них — более общие функции класса A с помощью линейного фильтра: $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\lambda)\,s(\lambda)d\lambda$, где $s(\lambda) \in L^1(-\infty, \infty)$.

Ю. В. Линник

1209. О нулях функции $\zeta(s)$. Коробов Н. М., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 3, 431—432

Пусть

$$S = \sum_{x=1}^{P} \exp 2\pi i F(x),$$

$F(x) = q^{-1}(a_1 x + \ldots + a_{n+1}x^{n+1})$, где a_i, q — целые рациональные числа. Видоизменяя метод И. М. Виноградова для этого специального случая, автор получает новую оценку:

$$S \ll P^{1-\alpha\rho},\ \alpha > 0;\ \rho = (n\ln n)^{-2{,}5}. \qquad (1)$$

Оценка (1) позволяет получить следующие следствия: $\zeta(1+it) = O\{\ln^{5/7+\varepsilon}|t|\}$ при $|t|\to\infty$; $\zeta(s)\neq 0$ в области $\sigma \geqslant 1 - A\ln^{-5/7-\varepsilon}|t|$, $A = A(\varepsilon)$; t любое вещественное; $\pi(x) = \mathrm{li}\,x + O(x\exp\{a(\ln x)^{7/12-\varepsilon}\})$,

$\pi(x)$ — число простых чисел $\leqslant x$, $\mathrm{li}\,x = \int_2^x \ln^{-1}x\,dx$.

Н. Г. Чудаков

1210. О функции $\zeta(s)$. Виноградов И. М., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 4, 631

Дается оценка $\zeta(1+it) = O\left((\ln t\ln\ln t)^{2/3}\right)$ (1)

для достаточно больших t, являющаяся следствием новой оценки одной тригонометрической суммы методом, являющимся некоторым развитием прежнего метода автора.

Примечание референта. Оценка (1) позволяет улучшить ряд результатов теории распределения простых чисел. После работ Харди и Литлвуда впервые применивших оценки тригонометрических сумм к теории распределения простых чисел, существенное улучшение результатов этой теории стало возможным благодаря созданию нового метода оценки тригонометрических сумм, данного И. М. Виноградовым, и было осуществлено Н. Г. Чудаковым (Матем. сб., 1936, 1 (43), № 4, 591—602) и рядом других авторов. Наилучший из предшествующих данной работе результатов оценки $\zeta(1+it)$ принадлежит Н. М. Коробову (реф.), именно $\zeta(1+it) = O\left((\ln t)^{5/7+\varepsilon}\right)$. К. К. Марджанишвили

1211. О границе нулей функции Римана $\zeta(s)$. Коробов Н. М., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 243—245

1212. О рядах Дирихле с функциональным уравнением. Рихерт (Über Dirichletreihen mit Funktionalgleichung. Richert Hans-Egon), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1957, **11**, 73—124 (нем.)

Рассматриваются ряды Дирихле, обладающие функциональным уравнением. Пусть $Z(s) = \sum f(n)\,n^{-s}$. Положим: $E = E(Z) = \inf\xi$, где ξ — числа, для коих в каждой конечной области полуплоскости $\sigma \geqslant \xi$ аналитическое продолжение $Z(s)$ регулярно, за возможным исключением конечного числа полюсов.

Пусть выполняются требования:

I. $E(Z) = -\infty$. При этом существуют действительные числа α, α' такие, что $f(n) = O\left(n^{\alpha+\varepsilon}\right)$ ($\varepsilon > 0$ — любое) и $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,n^{-s}$ сходится при $\sigma > \alpha'$ абсолютно.

II. Для некоторого действительного γ

$$Z(s) = C^{\upsilon s+\theta}\,G(s)\,Z_1(\gamma - s),$$

где $C\,(>0)$ и θ — действительные константы; θ — комплексная константа

III $$G(s) = \prod_{j=1}^{M}\frac{\Gamma(\beta_j - b_j s)}{\Gamma(\delta_j + d_j s)};$$

β_j, δ_j действительны;

IV. $Z_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_1(n)\,n^{-s}$, где указанный ряд имеет конечную абсциссу сходимости.

Про эти ряды доказывается 13 теорем и 15 лемм довольно громоздкого вида. Типичные теоремы:

Теорема 2. Пусть $Z(s)$ удовлетворяет условиям I—IV; и $\alpha \geqslant -1$. Тогда при $x\to\infty$:

$$\sum_{1<n<x} f(n)\,(x-n)^{\varkappa} = F_{\varkappa}(x) + O\left(x^{\alpha+(\varkappa+1)\left(1-\frac{\overline{\alpha_1}+\alpha+1-\gamma}{q(\overline{\alpha_1}-\gamma)+\varkappa+1}\right)+\varepsilon}\right) + O\left(x^{\varkappa+\frac{\lambda-1/2-\varkappa}{q}+\varepsilon}\right) + O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right),$$

где $F_{\varkappa}(x)$ — некоторая сумма вычетов, а q, α' вычисляется по α, α' и $G(s)$ в условии III.

Теорема 8. Пусть k_1 и k_2 — два натуральных числа; χ_1, χ_2 — два неглавных характера соответственно

mod k_1 и mod k_2; $L(s,\chi_j)$ $(j=1,2)$ — соответственные L-ряды; $X(n)=\Sigma_{d|n}\chi_1(d)\chi_2(n/d)$. Тогда $\Sigma_{1\leqslant n\leqslant x}X(n)=O(x^{15/46+\varepsilon})$. Ю. В. Линник

1213. Обобщенная теорема простых чисел. Мицуи (Generalized prime number theorem. Mitsui Takayoshi), Нихон сугаку сюхо, Japan. J. Math., 1956, 26, 1—42 (англ.)

Теорема Зигеля об исключительном нуле L-рядов Дирихле распространяется на L-ряды полей алгебраических чисел. Этот результат и аппарат рядов Гекке приводят к следующему уточнению теоремы Гекке о многомерном распределении простых алгебраических чисел (Hecke E., Math. Z., 1920, 6, 11—51).

Пусть K — поле алгебраических чисел степени n и его сопряженные перенумерованы так, что первые r_1 являются вещественными, остальные $2r_2=n-r_1$ — мнимые, причем $r_1+k=$ e поле $(k=1,\ldots,r_2)$ комплексно сопряжено с r_1+r_2+k-м полем. Предположим, что K, следуя Гекке, расширено до области идеальных чисел. Сопряженные к идеальному числу ω обозначим через $\omega^{(k)}$ $(k=1,\ldots,n)$. Пусть ρ — целое идеальное число, $\mathfrak{a}$ — целый идеал поля K, $\mathfrak{a}\neq 0$, $(\rho,\mathfrak{a})=1$, $Y=Y_1\ldots Y_{r_1+r_2}$, $Y_q\,(q=1,\ldots,r_1+r_2)$ — вещественные числа, $2<Y_q\leqslant Y^{a_k}(q,\ k=1,\ldots r_1+r_2)$, $N\mathfrak{a}<\log^A Y$, a и A — некоторые положительные постоянные; $\vartheta_p\,(p=r_1+1,\ldots,r_1+r_2)$ — вещественные числа, $0<\vartheta_p\leqslant 1$. Тогда число простых идеальных чисел ω, удовлетворяющих условиям $\omega=\rho \bmod \mathfrak{a}$, $|\omega^{(q)}|<Y_q\,(q=1,\ldots,r_1+r_2)$, $0\leqslant\arg\omega^{(p)}<2\pi\vartheta_p\,(p=r_1+1,\ldots,r_1+r_2)$, равно

$$\vartheta_{r_1+1}\cdots\vartheta_{r_1+r_2}H\int\cdots\int dt_1\cdots dt_{r_1+r_2}/\log(t_1\ldots t_{r_1+r_2})+O(Y\exp(-cY)), \quad (1)$$

где область интегрирования определяется неравенствами $2\leqslant t_q\leqslant Y_q e_q\,(q=1,\cdots,r_1+r_2)$, $e_q=1$ при $q=1,\cdots r_1$; $e_q=2$ при $q=r_1+1,\ldots,r_1+r_2$; $H=w(2^{r_1}h\varphi(\mathfrak{a})R)^{-1}$; w — число корней из 1 в K, h — число классов идеалов, $\varphi(\mathfrak{a})$ — обобщенная функция Эйлера, R — регулятор, константа c и константа в O зависят только от a, A и поля K.

Эта теорема содержит как частный случай обобщения на простые идеалы, принадлежащие заданному классу вычетов mod $\mathfrak{a}$, известной теоремы Пейджа — Зигеля — Вальфиша о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях. Для этого случая дается отдельное доказательство.

Примечание референта. Формула (1) получена референтом (Матем. сб., 1952, 31 (73); 3, 507—542) для более общих областей, однако способ зависимости остаточного члена от ρ и $\mathfrak{a}$ не рассмотрен. И. П. Кубилюс

1214. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии Пань Чэн-дун (On the least prime in an arithmetical progression. Pan Cheng-tung), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 311—313 (англ.)

Пусть $P_{\min}(D,l)$ обозначает наименьшее простое число $\equiv l \pmod D$, $(D,l)=1$. По известной теореме Ю. В. Линника $\ln P_{\min}(D,l)<A\ln D$. Используя сравнительно простое доказательство К. А. Родосского этой теоремы (РЖМат, 1955, 37), автор впервые получает для постоянной A оценку сверху. Оказывается, что $A<10^4$ для достаточно больших D. Отметим одну промежуточную оценку. Доказывается, что количество L-функций по mod D, имеющих нули в прямоугольнике $1-\psi\ln^{-1}D\leqslant\sigma\leqslant 1$, $|t|\leqslant e^{U\psi}\ln^{-1}D$, где $\psi\in[0{,}005;\ 0{,}1\ U^{-1}\ln D]$ и $U>0$, не превосходит $\exp[(4000+U)\psi]$.

Примечание референта. Замечена опечатка: в формулировке вспомогательной леммы в выражении $1+c\ln^{-1}D(|t|+1)$ знак „+“ следует заменить на „—“. К. А. Родосский

1215. О некоторых свойствах множеств чисел $[\alpha n+\beta]$ при иррациональном α с вводными замечаниями о некоторых комбинаторных проблемах. Сколем (Über einige Eigenschaften der Zahlenmengen $[\alpha n+\beta]$ bei irrationalem α mit einleitenden Bemerkungen über einige kombinatorische Probleme. Skolem Th. Kgl. norske. vid. selskabs forhandl., 1957, 30, № 19, S. 42—49) (нем.)

Пусть α,β — положительные иррациональные числа и x, y пробегают все целые числа; $[\xi]$ обозначает наибольшее целое число $\leqslant\xi$. Доказывается, что условия $1/\alpha+1/\beta=1$, $\gamma/\alpha+\delta/\beta\equiv 0 \pmod 1$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы множество чисел $[\alpha x+\beta]$ дополняло множество $[\beta y+\delta]$. Арифметическая функция $f(n)=[(1+\sqrt{5})n/2]$ удовлетворяет рекуррентному уравнению $f(n+1)=f(n)+n++2-f(f(n)-n+1)$ и $f(n)$, $f(n)+n$ при $n=1,2,\ldots$ представляет множество всех натуральных чисел без повторения. Для того чтобы конечное множество натуральных чисел $(1,2,\ldots,2n)$ разлагалось на пары (a_k,a_k++k) $(k=1,\ldots,n)$, необходимо и достаточно, чтобы $n\equiv 0$ или $1 \pmod 4$. Э. К. Фогелс

1216. О хаусдорфовой размерности множеств, характеризующихся цифровыми свойствами. V. Фолькман (Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. V. Volkmann Bodo), Math. Z., 1956, 65, № 4, 389—413 (нем.)

Предыдущие выпуски этой серии см. РЖМат, 1954 2547; 1955, 41, 42, 602.

Пусть $g\geqslant 2$ — целое число. Рассматриваются g-адитические разложения вещественных чисел ρ, $0<\rho\leqslant 1$: $\rho=\sum_{j=1}^{\infty}e_j g^{-j}$, e_j — целые числа, $0\leqslant e_j\leqslant g-1$; бесконечно много $e_j\neq 0$. Последовательность $\{e_j\}$ называется g-адической цифровой последовательностью числа ρ. Упорядоченное множество i цифр $\{f_1,\ldots,f_i\}=F$ назовем отрезком (Sequenz); $i=|F|$ назовем его длиной. Говорим, что число ρ содержит отрезок F, если для некоторого n: $e_{n+1}=f_1,\ldots,e_{n+i}=f_i$; в противном случае говорим, что ρ свободно от F.

Пусть $F_1,\ldots,F_m$ — различные отрезки. Через $K(F_1,\ldots,F_m;\ g)$ обозначаем множество чисел ρ, $0<\rho\leqslant 1$, свободных от $F_1,\ldots,F_m$. Определяется хаусдорфова размерность этого множества. В случае $m=1$ это было сделано в предыдущей работе (РЖМат, 1955, 42), однако содержащееся там доказательство содержит пробелы. Получен ряд следствий. Результаты переносятся на последовательности натуральных чисел. А. В. Малышев

1217. О хаусдорфовой размерности множеств, характеризующихся цифровыми свойствами. VI. Фолькман (Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. VI. Volkmann Bodo), Math. Z., 1958, 68, № 5, 439—449 (нем.)

Вещественное число ρ, $0<\rho\leqslant 1$, называется (g-адически) просто нормальным, если для его g-адического разложения (реф. 1216) выполняются условия:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_j(\rho,n)}{n}=\frac{1}{g},\quad A_j(\rho,n)=\sum_{\substack{i=1\\ e_i=j}}^{n}1\ (j=0,\ldots,g-1).$$

Число ρ называется нормальным, если все числа ρ, $g\rho$, $g^2\rho,\ldots$ — g^k-адически просто нормальны (для любого

натурального k). Обозначим через $\mathfrak{p}_l(\rho) = \left(\frac{A_0(\rho, l)}{l}, \ldots, \frac{A_{q-1}(\rho, l)}{l}\right)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ последовательность точек g-мерного пространства, а через $V(\rho)$ — множество предельных точек этой последовательности. $V(\rho) \subset H$, где H — симплекс $\sum_{j=0}^{g-1} x_j \leqslant 1$, $x_j \geqslant 0$ $(j = 0, \ldots, g-1)$. Доказаны теоремы: 1. Для каждого ρ множество $V(\rho)$ есть континуум. 2. Если V есть континуум, принадлежащий H, то найдется число ρ с $V(\rho) = V$. Пусть $G(V)$ — множество таких ρ. Тогда хаусдорфова размерность

$$\dim G(V) = \min_{\xi \in V} d(\xi), \quad d(\xi) = \frac{\sum_{l=0}^{g-1} x_l \ln x_l}{\ln \frac{1}{g}}.$$

3. Пусть S — любое множество из H; $C(S)$ — множество чисел ρ с условием $V(\rho) \subset S$. Тогда

$$\dim C(S) = \max_{\xi \in S} d(\xi).$$

4. Пусть T и S — любые множества в H, $T \subset S$; $G(T, S)$ — множество чисел ρ с условием $T \subset V(\rho) \subset S$; T^* — пересечение всех континуумов в H, содержащих T. Тогда

$$\dim G(T, S) = \min_{\xi \in T^*} d(\xi),$$

если $T^* \subset S$; в противном случае $G(T, S)$ пусто.

А. В. Малышев

1218. Свойства решений диофантовых неравенств в поле формальных степенных рядов. Постников А. Г., Матем. сб., 1956, 40, № 3, 295—302

Рассматриваются степенные ряды от x

$$\omega(x) = \sum_{n=-l}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

с коэффициентами из некоторого поля. Совокупность всех таких рядов образует поле. Число $l = \| \omega(x) \|$ называется порядком ряда, причем порядок тождественного нуля принимается равным $-\infty$.

Теорема 1. Пусть имеется степенной ряд (1) и натуральное k. Можно найти два отличных от тождественного нуля многочлена $P(x^{-1})$ и $Q(x^{-1})$ таких, что

$$\| Q(x^{-1}) \omega(x) - P(x^{-1}) \| \leqslant -k - 1,$$

$$\| Q(x^{-1}) \| \leqslant k. \qquad (2)$$

Теорема 2. Пусть имеется степенной ряд (1) и многочлены $P(x^{-1})$, $Q(x^{-1})$, $P^*(x)$, $Q^*(x)$, удовлетворяющие неравенствам (2) и

$$\| Q^*(x^{-1}) \omega(x) - P^*(x^{-1}) \| \leqslant -k,$$

$$\| Q^*(x^{-1}) \| \leqslant k - 1.$$

Найдутся константы a и b такие, что если ввести обозначения

$$A(x^{-1}) = P(x^{-1}) - P^*(x^{-1})(ax^{-1} + b),$$

$$B(x^{-1}) = Q(x^{-1}) - Q^*(x^{-1})(ax^{-1}) + b),$$

то

$$\| B(x^{-1}) \omega(x) - A(x^{-1}) \| \leqslant -k+1,$$

$$\| B(x^{-1}) \| \leqslant -k-2.$$

Для случая, когда коэффициенты ряда $\omega(x)$ удовлетворяют некоторым условиям, указываются рекуррентные соотношения между решениями диофантовых неравенств типа (2).

Аналогичные результаты получены для двумерного случая, основная часть их опубликована автором без доказательства ранее (РЖМат, 1956, 6341; 1957, 1938 К).

И. П. Кубилюс

1219. Об экспоненциальном ряде Артина-Хассе. Дьёдонне (On the Artin-Hasse exponential series. Dieudonné Jean), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 210—214 (англ.)

Пусть a_i $(0 \leqslant i < \infty)$ — последовательность p-адических чисел. Доказывается, что коэффициенты ряда

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{p^i}\right)$$

являются целыми p-адическими числами тогда и только тогда, если $a_i - a_{i-1}/p$ при всех $i \geqslant 0$ есть целое p-адическое число ($a_{-1} = 0$). В частном случае, когда $a_i = p^{-i}$, ряд $F(x)$ представляет собой экспоненциальный ряд $F_0(x)$ Артина-Хассе. Заменяя в ряде $F_0(x)$ коэффициенты c_n их вычетами по модулю p, получим ряд $E_0(x)$ с коэффициентами из $GF(p)$. Пусть $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ — вектор Витта. Приписывая переменной x_i вес p^i, рассмотрим формальный степенной ряд $E_0(X) = \prod_{i=0}^{\infty} E_0(x_i)$. Показывается, что для любого поля K характеристики p всякий формальный K-гомоморфизм аддитивной группы векторов Витта W_k в мультипликативную группу Витта W_1^* имеет вид $X \to E_0(A \cdot X)$, где A — некоторый вектор Витта с элементами из K (произведение $A \cdot X$ понимается в смысле умножения векторов Витта).

З. И. Боревич

1220. Заметка об одной работе Дьёдонне. Карлиц (Note on a paper of Dieudonné. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 32—33 (англ.)

Дьёдонне доказал (реф. 1219) следующую теорему: Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — бесконечная последовательность рациональных чисел; рассмотрим степенные ряды $\exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{p^m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где p — фиксированное простое число.

Для того чтобы все коэффициенты c_n были p-адическими целыми числами, необходимо и достаточно, чтобы для всех $i \geqslant 0$ выполнялось условие $a_i = (a_i - 1) p^{-1} + b_i$ $(a_{-1} = 0)$, где каждое b_i — p-адическое целое.

Рассматриваются ряды $\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, для которых доказывается теорема: Для того чтобы все коэффициенты c_n были целыми рациональными, необходимо и достаточно, чтобы для всех $k \geqslant 1$ было $\sum_{r s = k} r a_r \mu(s) \equiv 0 \pmod{k}$, где $\mu(s)$ — функция Мёбиуса. Дается обобщение этой теоремы.

В. А. Голубев

1221. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями. Бредихин Б. М., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 5, 855—858

Пусть G — мультипликативная полугруппа вещественных чисел $x \geqslant 1$, упорядоченных по их величине; $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — система образующих эту полугруппу, т. е. каждое $\alpha = \omega_1^{x_1} \omega_2^{x_2} \ldots$, где x_i — целые неотрицательные числа, причем только конечное число $x_i \neq 0$; α однозначно представимо через $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Пусть $\nu(x) = \sum_{\alpha < x} 1$; $\pi(x) = \sum_{\omega < x} 1$. Автор доказывает, что если $\nu(x) = C x^{\Theta} + O(x^{\Theta_1})$, $\Theta_1 < \Theta$, то

$$\pi(x) \sim \Theta^{-1} x^{\Theta} (\ln x)^{-1} \quad \text{при } x \to \infty. \qquad (1)$$

Доказательство следует из обобщенного метода Сельберга (Selberg A., Ann. Math., 1949, 50, № 2). Автор дал применение тождества (1) к оценке числа простых чисел поля Гаусса и к одной проблеме обращения аддитивных задач.

Н. Г. Чудаков

1222. Формула преобразования для дедекиндовой модулярной функции и связанные с ней функциональные уравнения. Исэки (The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations. Iseki Shô), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 653—662 (англ.)

Автор доказывает функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\frac{n}{k}(z - ih)\right) + \frac{\pi}{12k}\left(z - \frac{1}{z}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\frac{n}{k}\left(\frac{1}{z} - iH\right)\right) + \frac{1}{2}\log z + \pi i s(h, k), \qquad (1)$$

где h и k — натуральные и $(h, k) = 1$; целое H таково, что $hH \equiv -1 \pmod{k}$, z — комплексное, $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\lambda(x) = -\log(1 - \exp(-2\pi x)),$$

$$s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \left(\frac{\mu}{k} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)$$ (сумма Дедекинда).

Тождество (1) представляет собой формулу преобразования для $\log \eta(\tau)$, где $\eta(\tau)$ — модулярная функция Дедекинда. Далее автор доказывает тождество

$$F_p\left(\frac{z - ih}{k}\right) + B_{p+1}\frac{(2\pi/k)^p}{2(p+1)!}\left(z^p - (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{z}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\zeta(p)\left(1 - (1)^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}\right) +$$

$$+ \frac{(2\pi z)^p}{2(p+1)!}\sum_{s=1}^{p}\binom{p+1}{s}(iz)^{-s}\sum_{\mu=1}^{k} B_{p+1-s}\left(\frac{\mu}{k}\right) B_s\left\{\frac{h\mu}{k}\right\} =$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1} F_p\left(\frac{z^{-1} - iH}{k}\right),$$

где $\{x\}$—дробная часть числа x; B_ν, $B_\nu(x)$—числа и функции Бернулли, $F_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-p}(1 - \exp(-2\pi x m)) \times \times \exp(-2\pi x m)$.

Н. Г. Чудаков

1223. Заметка о тождествах Роджерса-Рамануджана. Карлиц (A note on the Rogers—Ramanujan identities. Carlitz Leonard), Math. Nachr., 1958, **17**, № 1-2, 23—26 (англ.)

Приводится несколько более естественный, чем в книге Харди „Рамануджан" (Cambridge, 1940), вывод двух тождеств Роджерса-Рамануджана

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(q)_m} = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{5m+1})^{-1} (1 - q^{5m+4})^{-1}$$

и

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2+m}}{(q)_m} = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{5m+2})^{-1} (1 - q^{5m+3})^{-1},$$

где $(q)_m = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)$, $q_0 = 1$.

Вывод этих тождеств основан на изучении свойств функций $I_n(t)$, определяемых соотношением

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(t) x^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n x t)(1 + q^n x^{-1} t).$$

Б. В. Левин

1224. Квадратные уравнения с несколькими неизвестными. Берч, Давенпорт (Quadratic equations in several variables. Birch B. J., Davenport H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 2, 135—138 (англ.)

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j$, $(f_{ij} = f_{ji})$ — неопределенная квадратичная форма с n переменными ($n \geqslant 3$) и целыми коэффициентами. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$— положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами. Пусть далее $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — матрицы форм f и g; γ_{n-1} — постоянная Эрмита. Доказано, что если существуют нетривиальные решения уравнения $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, то найдется решение, удовлетворяющее неравенству

$$0 < g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \gamma_{n-1}^{n-1} \left[2 \operatorname{Sp}(\mathfrak{F}\mathfrak{G}^{-1})^2\right]^{(n-1)/2} |\mathfrak{G}|.$$

В. Д. Подсыпанин

1225. Число решений некоторых диофантовых уравнений. Столт (Die Anzahl von Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen. Stolt Bengt), Arch. Math., 1958, **8**, № 6, 393—400 (нем.)

Рассматривается решение в натуральных числах уравнения

$$x^2 + x + \frac{1}{4}(D + 1) = y^q, \qquad (1)$$

где $D \equiv 3 \pmod 4$ и свободно от квадратов, q — нечетное простое число. Число классов идеалов поля $R(\sqrt{-D})$ не делится на q. Это уравнение было исследовано Пирсоном (Pearsson B., Arkiv. mat., 1949, **1**, 45—57), который показал, что значения y, удовлетворяющие уравнению (1), удовлетворяют уравнению

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{q}{2r+1}(4y - D)^{m-r}(-D)^r = 2^{q-1}\left(\frac{-D}{q}\right), \qquad (2)$$

где $m = (q-1)/2$.

Изучая уравнение (2), автор показывает, что уравнение (1) при данных D и q имеет не более одного

решения, если $D \equiv 7 \pmod 8$ или $D \equiv 3 \pmod 8$ и $q \equiv 5 \pmod 6$, и не более трех решений, если $D \equiv 3 \pmod 8$ и $q \equiv 1 \pmod 6$. В. Д. Подсыпанин

1226. Проблема точек решетки для неопределенных квадратичных форм с рациональными коэффициентами. Венугопал-Рао (The lattice point problem for indefinite quadratic forms with rational coefficients. Venugopal Rao V.), J. Indian Math. Soc., 1957, 21, № 1-2, 1—40 (англ.)

Обобщается тождество Харди (Hardy G. H., Quart. J. Math., 1915, 46, 263—283; Proc. London Math. Soc., 1916, 15, 192—213)

$$\sum_{0<n<x} r(n)(x-n)^{\alpha} = \frac{\pi x^{1+\alpha}}{1+\alpha} - x^{\alpha} + \\ + \pi^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\, x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n) J_{1+\alpha}(2\pi\sqrt{nx})}{n^{1/2+\alpha/2}}, \quad (1)$$

$\alpha \geqslant 0$ — вещественное, x — нецелое, для количества $r(n)$ представлений числа n формой $f = x^2 + y^2$ на случай неопределенных квадратичных форм f с m переменными (Случай положительных квадратичных форм f рассматривался разными авторами, в частности, Бохнером и Чандрасакараном).

Пусть $f = \mathfrak{f}[\mathfrak{a}]$ — рациональная форма, $\mathfrak{f}[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}'\mathfrak{f}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — рациональные векторы; t — число. По Зигелю (Siegel C. L., Ann. Math., 1936, 37, 230—263) вводится понятие „меры" $\mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t)$, представлений, являющейся аналогом количества представлений $A(\mathfrak{f},\mathfrak{a},\mathfrak{b},t) = \sum_{\mathfrak{f}[\mathfrak{a}+\mathfrak{a}]=t} \exp(2\pi i \mathfrak{a}'\mathfrak{b})$ в случае положительной формы $\mathfrak{f}$. Эта мера конечна, кроме случаев $m = 3$ и $-t|\mathfrak{f}|$ — квадрат, $m = 4$, $t = 0$ и $|\mathfrak{f}|$ — квадрат, которые исключаются из дальнейшего рассмотрения. Автор получает формулы, аналогичные (1), для суммы Ритца

$$R = \sum_{-t<x} \mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t)(x-t)^{\alpha}, \quad \alpha > \frac{m-1}{2},$$

где суммирование ведется по всем возможным t в указанных пределах. Если $|\mathfrak{f}| > 0$, то, как и в случае положительных форм, получается ряд, включающий функции Бесселя 1-го рода. В случае $|\mathfrak{f}| < 0$ получается комбинация бесконечных рядов, зависящих от функций Бесселя $Y_{\mu}(x)$, $K_{\mu}(x)$, функций Ломмеля $S_{\mu,\nu}(x)$ и аналогичных последним новых функций $G_{\mu,\nu}(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (\nu^2 + x^2)y = x^{\mu+1}$$

Указанные формулы выписаны точно, но являются довольно громоздкими, а потому и не приводятся нами. Исследованы необходимые свойства функций $G_{\mu,\nu}(x)$. Библ. 19 назв. А. В. Малышев

1227. О сходимости среднего значения функции по решетке. Шмидт (On the convergence of mean values over lattices. Schmidt Wolfgang), Canad. J. Math., 1958, 10, № 1, 103—110 (англ.)

Уточняется формула Роджерса о среднем (РЖМат, 1957, 63). Найден более широкий класс случаев, когда обе части формулы конечны. Мы не приводим теорем Роджерса и Шмидта ввиду их крайней громоздкости. А. В. Малышев

1228. Средние значения по решеткам. Шмидт (Mittelwerte über Gitter. Schmidt Wolfgang), Monatsh. Math., 1957, 61, № 4, 296—276 (нем.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство всех линейных преобразований A пространства R_n с определителем 1, $\mathfrak{A}$ — группа собственных унимодулярных преобразований U. Тогда в $\mathfrak{A}$ имеется фундаментальная область $F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})$ группы $\mathfrak{U}$ для преобразования $A \to AU$. Пусть ω — введенная Зигелем (Siegel C. L., Ann. Math., 1945, 46, 340 — 347) инвариантная мера в пространстве $\mathfrak{A}$, нормированная так, чтобы $\int_{F(\mathfrak{A}|\mathfrak{U})} d\omega = 1$.

Дается новое доказательство формулы Роджерса (РЖМат, 1957, 63) для интеграла

$$\int_{F(\mathfrak{A}|\mathfrak{U})} \sum_{g_1,\ldots,g_k} f(Ag_1, \ldots, Ag_k)\, d\omega,$$

где $f(X_1,\ldots,X_k)$ — неотрицательная, интегрируемая по Борелю функция, определенная для всех $X_1, \ldots, X_k$ из R_n, $k < n$, и при суммировании $g_1, \ldots, g_k$ независимо друг от друга пробегают все целые точки пространства R_n. И. П. Кубилюс

1229. О числе решений в неполной системе вычетов для квадратичных сравнений. Морделл (On the number of solutions in incomplete residue sets of quadratic congruences. Mordell L. J.), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 153—157 (англ.)

Пусть $p > 2$ — простое число; $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy + 2gx + c$ — целочисленный квадратичный полином, не вырождающийся в функцию одного переменного (mod p) с дискриминантом $\Delta \not\equiv 0 \pmod p$. Пусть x, y лежат на решетке $L \pmod p$, данной в виде:

$$x \equiv \alpha\xi + \beta\eta + \mu;\ y \equiv \gamma\xi + \delta\eta + \nu;\ \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \not\equiv 0 \pmod p.$$

Здесь ξ,η соответственно пробегают целые числа $0, 1, \ldots, h-1 < p$; $0,1,\ldots, k-1 < p$. Если N — число решений сравнения $f(x,y) \equiv \pmod p$, то показывается, что

$$\left|N - \frac{hk}{p}\right| < 1 + 4p^{1/2}\ln p + 2p^{1/2}(\ln p)^2,$$

либо

$$\left|N - \frac{hk}{p}\right| < 2p^{1/2}\ln p + p^{1/2}(\ln p)^2$$

в зависимости от вида $f(x,y)$. Автор отмечает, что для менее общего случая более точные оценки были получены И. М. Виноградовым (Виноградов И. М., Основы теории чисел, ГТТИ, 1952) Ю. В. Линник

1230. Одна теорема разложения для целых чисел по модулю q. Зирлер (A decomposition theorem for the integers modulo q. Zierler Neal), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 1, 31—32 (англ.)

Доказывается теорема; Пусть q — натуральное число, S — кольцо наименьших положительных вычетов по модулю q и G — мультипликативная группа регулярных элементов из S. Тогда множество $\{dG\}_{d|q}$ есть разложение S, т. е. $S = \bigcup_{d|q} dG$ и $d_1G \cap d_2G = \varnothing$, если $d_1 \neq d_2$.

Даны два следствия этой теоремы. В. А. Голубев

1231. Неравенства, включающие наименьшее общее кратное и другие арифметические функции. Корпут (Inequalities involving least common multiple and other arithmetical functions. Corput J. G. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 1, 5—15; Indagationes math., 1958, 20, № 1, 5—15 (англ.)

Пусть $A = P_1P_2 \ldots P_n$, где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — различные простые числа. Пусть $\Lambda(u_1,\ldots,u_n) = \{u_1,\ldots,u_n\}^{-r}$, где $r \geqslant 0$ — заданное число, а $\{u_1,\ldots,u_n\}$ — наименьшее общее кратное $u_1,\ldots,u_n$. Для каждого (положительного), делителя B числа вводим вещественное число $\lambda(B)$ и полагаем

$$\sigma(B) = \sum_{D \setminus B} \lambda(D),\ \tau(B) = \sum_{D \setminus B} \lambda(D)\,\Lambda(a_1^{\delta_1}, \ldots, a_n^{\delta_n}),$$

где $D=P_1^{\delta_1}\dots P_n^{\delta_n}$, а $a_1,\dots,a_n$ — фиксированные положительные целые числа. Доказано: 1) Если $\psi(B)$ — вещественная функция делителей числа A, $\psi(D)\leqslant\psi(B)$ для всех $D\setminus B\setminus A$ и если $\sigma(B)\leqslant\psi(B)$ для всех $B\setminus A$, то $\tau(B)\leqslant\psi(B)$. 2) Если $\sigma(D)\leqslant\sigma(B)$ для всех $D\setminus B\setminus A$, то $\tau(D)\leqslant\tau(B)$. 3) Если $\sigma(B)+\sigma(C)\leqslant\sigma(BC)$ для всех $BC\setminus A$, то $\tau(B)+\tau(C)\leqslant\tau(BC)$. 4) Если $\sigma(D)\leqslant\sigma(B)$ для всех $D\setminus B\setminus A$ и если $\sigma(B)\sigma(C)\leqslant\sigma(BC)$ для всех $BC\setminus A$, то $\tau(B)\tau(C)\leqslant\tau(BC)$; то же, если $\sigma(D)\geqslant\sigma(B)$ для всех $D\setminus B\setminus A$. 5) В условиях 4)

$$\tau(A)\geqslant\prod_{\nu=1}^{n}\{\lambda(1)+\lambda(P_\nu)\,a_\nu^{-r}\}.$$

Полагая $\lambda(D)=\mu(D)$, автор получает обобщение неравенств Гейльбронна-Рорбаха (Heilbronn H. A., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1937 **33**, 207 — 209; Rohrbach H., J. reine und angew. Math., 1937, **177**, 193 — 196) и Беренда (Behrend F. A. Bull. Amer. Math. Soc., 1948, **54**, 681 — 684). Показано, что неравенства 1) — 5) остаются справедливыми, если вместо $\Lambda(u_1,\dots,u_n)=\{u_1,\dots,u_n\}^{-r}$ брать несколько более общие функции. А. В. Малышев

1232. О решениях одного типа диофантовых уравнений. Ко Чжао, Лу Вэнь-дуань, Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1957, № 2, 189—195 (кит., рез. русск.)

Рассматриваются уравнения $x^yy^z=z^x$, $x^y\,y^x=z^z$ и $x^xy^z=z^y$. Для каждого из уравнений найдены формулы, содержащие два параметра и позволяющие найти бесконечное множество решений в натуральных числах этих уравнений. Вопрос о разыскании всех решений не ставится. В. Д. Подсыпанин

1233. Заметка о решении уравнения $\sum_{i=1}^{k}r_i=n$ в целых неотрицательных числах. Космак (Poznámka o řešeních rovnice $\sum_{i=1}^{k}r_i=n$ celymi nezápornými čísly. Kosmák Ladislav), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 1, 80—82 (чешск.; рез. русск., нем.)

Пусть k, n — натуральные, $h_1,h_2,\dots,h_k$ — целые неотрицательные числа такие, что $\sum_{i=1}^{k}h_i=n$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}h_i-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}h_i\leqslant1$; пусть $r_1,r_2,\dots,r_k$ — произвольные целые неотрицательные числа, для которых $\sum_{i=1}^{k}r_i=n$.

Доказывается теорема: Неравенство $\sum_{i=1}^{k}\binom{h_i}{c}<\sum_{i=1}^{k}\binom{r_i}{c}$ справедливо тогда и только тогда, если $2\leqslant c\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}r_i>1+\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}r_i$; иначе $\sum_{i=1}^{k}\binom{h_i}{c}=\sum_{i=1}^{k}\binom{r_i}{c}$. В. А. Голубев

1234. Диофантово уравнение, характеризующее закон косинусов. Барнет (A diophantine equation characterizing the law of cosines. Barnett I. A.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 4, 251—252 (англ.)

Доказывается, что все рациональные решения уравнения $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ получаются по формулам

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\qquad y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\qquad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Дается геометрическая интерпретация этого уравнения, показывающая связь его с делением прямого угла на три части. Получено громоздкое уравнение, связанное с делением прямого угла на четыре части. Решение последнего не рассматривается. В. Д. Подсыпанин

1235. Многостепенные системы уравнений с числами из симметрически расположенных цифр. Ийер (Multigrades with palindromic numbers as elements. Iyer R. Venkatachalam), Scripta math., 1954, **20**, № 3-4, 220—222 (англ.)

Описывается способ составления указанных в заголовке систем уравнений при помощи теорем Глодена и Тарри. Так, из равенства $13+42=31+24$ автор получает: $1331,\ 4224,\ 5335,\ 4664^2=3113,\ 2442,\ 3553,\ 6446,$ В. А. Голубев

1236. О суммах четырех кубов. Шинцель, Серпинский (Sur les sommes de quatre cubes. Schinzel A., Sierpinski W.), Acta arithm., 1958, **4**, № 1, 20—30 (франц.)

В. Серпинский предложил следующую гипотезу: Всякое целое число g допускает бесконечное число представлений в форме $g=x^3+y^3-z^3-t^3$, где x,y,z,t — натуральные числа. На основании нескольких тождеств эта гипотеза доказывается для чисел $g=(18k+r)t^3$, где $r=0,1,3,6,7,8,9,10,11,12,15,17$, k и t — целые, а также для всех чисел $g\leqslant100$.

Доказывается также теорема о представлении рациональных чисел алгебраической суммой кубов четырех рациональных чисел. В. А. Голубев

1237. Об одном обобщении теоремы Смита об определителях. Дьиреш (Über eine Verallgemeinerung des Smith'schen Determinantensatzes. Gyires Béla, Publs math., 1957, **5**, № 1-2, S. 162—171) (нем.)

Доказывается тождество

$$\begin{vmatrix}(1,1)^{r+1} & (1,2)^{r+1} & \dots & (1,n)^{r+1}\\ (2,1)^{r+1} & (2,2)^{r+1} & \dots & (2,n)^{r+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (n,1)^{r+1} & (n,2)^{r+1} & \dots & (n,n)^{r+1}\end{vmatrix}=\Phi_r(1)\,\Phi_r(2)\dots\Phi_r(n),\quad(1)$$

где $r=0,1,2,\dots,(i,j)$ — общий наибольший делитель чисел i и j,

$$\Phi_r(k)=k^{r+1}\left(1-\frac{1}{p_1^{r+1}}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_n^{r+1}}\right),$$

$$k=p_1^{e_1}\dots p_n^{e_n},$$

p_i — простые, $\Phi_r(1)=1$.

Это тождество есть обобщение известного тождества Смита, которое получается из (1) при $r=0$. Г. В. Емельянов

1238. О факторизации чисел формы $2N^4+1$. Глоден (On the factorization of numbers of the form $2N^4+1$. Gloden A.), Scripta math., 1954, **20**, № 3-4, 220 (англ.)

Сообщается о том, что автор составил таблицу разложения на множители чисел $2N^4+1$ для $N\leqslant1000$, при этом для всех чисел $2N^4+1$ при $N\leqslant150$ получено полное разложение. В. А. Голубев

1239. О ряде $\Sigma\,1/p$. Мозер (On the series $\Sigma\,1/p$. Moser Leo), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 2, 104—105 (англ.)

Дается новое доказательство бесконечности простых чисел из факта расходимости ряда $\sum 1/p$, где p — простые числа. В. А. Голубев

1240. Подсчет числа пар простых чисел «близнецов», заключенных между 100 000 и 1 100 000 и распределенных согласно их последней цифре. Секстон

(Computo del numero delle coppie di numeri primi gemelli comprese tra 100.000 e 1.100.000 distinte secondo le cifre terminali. Sexton Charles R.), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 1, 99—101 (итал.)

Дана таблица числа близнецов от 100 000 до 1 100 000, распределенных по их последней цифре, для каждого десятка тысяч. В. А. Голубев

1241. Испытание делимости при помощи функции остатков. Дрейм (Test for divisibility by the use of a remainder function. Draim N. A.), Math. Mag., 1958, **31**, № 3, 137—140 (англ.)

Описывается способ определения делимости чисел N путем последовательного деления на нечетные числа 3, 5, 7, . . . чисел N_1, N_2, N_3, . . ., получающихся рекуррентно из данного (нечетного) N.

В. А. Голубев

1242 К. Трансцендентность чисел π и e. (π и e рицхвата трансцендрентоба), **Дринфельд Г. И.** Тбилиси, Тбилисск. ун-т, 1957, 73 стр., илл., 1 р. 20 к. (груз.)

1243 К. Понятие о числе. Ковач (Natiunea de număr. Lectii. Red. Kovács C. Cluj. Inst. interreg. perfection, a cadrelor didact. Cluj, 1957, 105 p.—Litogr.) Bibliogr. RPR, 1957, **6**, № 20, 721 (рум.)

См. также: 1184

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

1244 К. Алгебра. Фальк (Algebra. Falk G. Handbuch der Physik. Bd. 2. 116 S. Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955, 88.00 DM) (нем.)

Книга содержит изложение линейной алгебры в евклидовых и унитарных пространствах, представлений конечных групп и группы вращений трехмерного пространства, теории конечномерных алгебр. Имеется по существу только один намек на связь между всем этим и физикой: рассматривается класс колец с абстрактной операцией — скобкой Пуассона, и затем делается неубедительная попытка показать, как это связывает теорию колец с механикой Гамильтона. W. G. Lister

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 571.

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1245. Комбинаторный вывод двух тождеств. Стейнберг (Combinatorial derivations of two identities. Steinberg Donald A.), Math. Mag., 1958, **31**, № 4, 207—209 (англ.)

Рассматривается последовательность n переменных $x_1, \ldots, x_n$, каждое из которых может принимать любое из m значений $a_1, \ldots, a_m$, так что общее число всех возможных размещений равно m^n. Для иллюстрации применяемого метода сначала выводится формула бинома Ньютона. Далее, считая первоначально $m \leqslant n$, предполагается, что первые k членов последовательности принимают различные значения, $(k+1)$-й член получает любое из уже принятых значений, значения остальных $n-k-1$ членов ничем не ограничены. Общее число размещений в этом случае равно

$$m!\, k\, m^{n-k-1}/(m-k)! \qquad (1)$$

Давая k значения $1, 2, \ldots, m$, учитываем все возможные размещения и каждое только один раз. Суммируя выражения (1) по k от 1 до m, получаем

$$\sum_{k=1}^{m} m!\, k m^{n-k-1}/(m-k)! = m^n$$

или

$$\sum_{k=1}^{m} k/(m-k)!\, m^{k+1} = \frac{1}{m!}$$

Рассуждения сохраняют силу и при $m>n$; в этом случае суммирование производится от 1 до n, причем при $k=n$ число размещений равно $\frac{m!}{(m-n)}$. Таким образом $\sum_{k=1}^{n-1} m!\, k\, m^{n-k-1}/(m-k)! + m!/(m-n)! = m^n$.

А. Г. Школьник

1246. Общий метод для решения уравнений 2-й, 3-й и 4-й степени. Хелман (A unifying technique for the solution of the quadratic, cubic, and quartic. Hellman Morton J.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 274—276 (англ.)

1247. Новый метод решения уравнения 4-й степени. Малхотра (A new method of solving a quartic. Malhotra Pavan K.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 280—282 (англ.)

1248. Об одном свойстве окаймленных определителей. Легостев Н. И., Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-та, 1957, № 12, 96—99

Рассматриваются встречающиеся при установлении знака соответствующей квадратичной формы определители вида

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11}q_1 & a'_{12}+a''_{12}q_2 \ldots, a'_{1j}+a''_{1j}q_j \\ a'_{21}+a''_{21} & a'_{22}+a''_{22}q_2 \ldots a'_{2j}+a''_{2j}q_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{j1}+a''_{j1}q_j & a'_{j2}+a''_{j2}q_j \ldots a'_{jj}+a''_{jj}q_j \end{vmatrix},$$

$j=1, 2, \ldots, n$; $a'_{ik}=a'_{ki}$; $a''_{ik}=a''_{ki}$ $(k, i = 1, \ldots, n)$, q_l — непрерывные функции параметра $t>0$.

По отношению к функциям q_j определители Δ_j являются квадратными трехчленами:

$$\Delta_j = A_j q_j^2 + B_j q_j + C_j.$$

Доказывается, что одновременно с Δ_{j-1} обращается в нуль и дискриминант $D=B_j^2-4A_jC_j$ квадратного трехчлена, откуда выводится, что этот дискриминант допускает выделение множителя Δ_{j-1}. А. Г. Школьник

1249. К вопросу о преподавании теории определителей. Лопшиц А. М., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 51—80

Предлагается схема изложения определителей, в основу которой положено рекуррентное определение определителя. Кроме того, систематически используется обозначение определителя порядка n как функции n n-мерных векторов. Форма изложения концентрическая 1) $n=2$ и 3; 2) $n=4$; 3) n—произвольное. Доказываются

все основные свойства определителя, в том числе теорема Лапласа, правило Крамера и теорема об умножении определителей. Л. А. Скорняков

1250. Членный ранг матрицы. Райзер (The term rank of a matrix. Ryser H. J.), Canad. J. Math., 1958, 10, № 1, 57—65 (англ.)

Продолжение исследования (РЖМат, 1958, 1827) комбинаторных свойств матрицы из нулей и единицы. Рассматривается класс $\mathfrak{A}$ $m\times n$-матриц A, элементы которых нули и единицы, с данными суммами элементов строк и столбцов, задаваемыми векторами $R(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ и $S(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Предполагается, что все r_i и $s_k > 0$ и $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_n$. Максимальная матрица A класса $\mathfrak{A}$ содержит на первых r_i местах i-й строки ($i=1, \ldots, m$) единицы, а на остальных — нули. Членный ранг ρ матрицы (порядок высшего минора, имеющего в разложении ненулевой член) равен наименьшему числу строк и столбцов, содержащих в совокупности все ненулевые элементы матрицы (König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, New York, 1950). $\tilde{\rho}$ и $\bar{\rho}$ — минимальный и максимальный членные ранги матриц класса $\mathfrak{A}$. Доказывается, что максимальный членный ранг определяется равенством

$$\bar{\rho}=m-M.$$

В этой формуле M — наибольшее из $n+1$ чисел

$$\sum_{i=0}^{k}(s_i'-\bar{s}_i'), \quad k=0, 1, \ldots, n;$$

здесь $s_i'=s_i-1$, а $\bar{s}_i'$ — суммы элементов столбцов в максимальной $m\times n$-матрице, у которой суммы строк заданы вектором $R^1=(r_1-1, r_2-1, \ldots, r_{1n}-1)$; кроме того $s_0'=\bar{s}_0'=0$.

Из теоремы выводится ряд следствий. Если $\bar{\rho} < m, n$, то путем перестановки строк и столбцов матрица может быть приведена к виду

$$A=\begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где W — $e\times f$-матрица $(0<e<m, \quad 0<f<n)$, а сумма числа нулей в W и единиц в Z равна $\bar{\rho}-(e+f)$. При этом в представлении (1) матрицы $A_{\bar{\rho}}$ максимального членного ранга W не имеют нулей.

Операции замены подматрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем все остальные элементы матрицы не меняются, будем называть перемещением. Если никакая последовательность перемещений не заменяет некоторый единичный элемент матрицы на нулевой, то такой элемент называется инвариантной единицей матрицы. Доказывается, что если матрица содержит инвариантную единицу, то путем перестановки строк и столбцов она может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} S & X \\ Y & 0 \end{pmatrix},$$

где S состоит только из единиц и содержит инвариантную единицу. Если матрицы класса $\mathfrak{A}$ не содержат инвариантной единицы и $\bar{\rho} < m, n$, минимальный ранг матриц строго меньше максимального. А. Г. Школьник

1251. Распространение теоремы Данцига. Хеллер, Томпкинс (An extension of a theorem of Dantzig. Heller I., Tompkins C. B.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 247—254 (англ.)

В линейном векторном пространстве E_p размерности $p=m+n$ выбирается произвольный базис

$$u_1, u_2, \ldots, u_m; \quad v_1, v_2, \ldots, v_n \qquad (1)$$

и рассматривается множество S векторов

$$S=\{u_i, v_j, \ u_i+v_j, \ u_i-u_{i^*}, v_j-v_{j^*}\}$$
$$(i, i^*=1, 2, \ldots, m; \ j, j^*=1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Матрицы, столбцы которых составляют подмножество $D_0=\{u_i+v_j\}$ множества S, при условии, что u_i и v_j образуют ортонормальную систему, рассматривались Данцигом (Dantzig G. B., Application of the simplex method to a transportation problem, 1951), результат которого распространяется автором на более общее множество. Доказывается теорема: Если S и B — произвольные вектор и базис, принадлежащие S, то в представлении S как линейной комбинации векторов из B коэффициенты могут принимать лишь значения 0, +1, —1.

Следствие: Если любое представление столбцов матрицы A как линейной комбинации некоторых линейно независимых ее столбцов имеет целые коэффициенты, то матрица обладает свойством Данцига.

Дано дополнение Гоффмана и Гэйла (Hoffmann A. J., Gale D.), в котором доказывается теорема: Пусть прямоугольная матрица A, строки которой принадлежат двум пересекающимся множествам B и C, обладает следующими свойствами: 1) каждый столбец A содержит не более двух ненулевых элементов; 2) элементами A служат 0, 1 или —1; 3) если два ненулевых элемента некоторого столбца одного знака, то их строки принадлежат одна B, другая C, а если эти элементы разных знаков, то соответствующие строки либо обе в B, либо обе в C. При этих условиях любой детерминант матрицы равен либо 0, либо 1, либо —1. Указывается, что это предложение равносильно теореме основной статьи. Матрицы, подчиненные указанным выше условиям, включают в себя класс матриц (Inzidenzmatrix), соответствующих направленным графам (König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig., 1936). Доказывается, что при условии 1) условия 2) и 3) являются необходимыми для того, чтобы любой минор матрицы был равен 0, 1 или —1. А. Г. Школьник

1252. Приведение матриц к диагональному виду. Ламин (Diagonalisation des matrices. Lamine T.), Bull. Assoc. ingrs issus École applic, artill et génie, 1958, 36, № 1, 49—74 (франц.)

1253. О новом методе преобразования билинейных форм и решении систем линейных уравнений, основанном на диадическом представлении матриц. Эгерварн (Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására. Egerváry J.), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 11—32 (венг., рез. русск., нем.)

Рассматривается некоторый матричный метод решения общих (однородных и неоднородных) линейных систем уравнений. Матрица A из коэффициентов заданной системы $Ax=0$ разлагается на множители B и C при помощи последовательного отделения пар так, чтобы из соотношения $Ax\equiv BCx=0$ следовало $Cx=0$, а множитель C автоматически принимал треугольную форму, удобную для повторного вычисления неизвестных. Одновременно с разложением на множители билинейная форма, соответствующая матрице A, преобразуется в сумму произведений пар линейных форм. P. Rózsa

ГРУППЫ

1254. Новое издание работы Жордана о подстановках и алгебраических уравнениях. Шатле (Réimpression du traité des substitutions et des équations algébriques de Camille Jordan. Châtelet A.), Enseign. math., 1957, **3**, № 4, 298—299 (франц.)

1255. Полуспециальные подстановки над [*pqr*]. Якуб (Semi-special permutations on [*pqr*]. Yacoub K. R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 2, 217—222; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 217—222 (англ.)

Рассматриваются полуспециальные подстановки степени pqr (РЖМат, 1957, 7650), где p, q, r — различные нечетные простые числа. Выведены формулы, дающие вид такой подстановки при произвольном значении главного числа s этой подстановки (т. е. числа s, по модулю которого подстановка является линейной). Отдельно рассмотрены случаи $s=p$ и $s=pq$. В. К. Туркин

1256. Полуспециальные подстановки. II. Полуспециальные подстановки над [p^α]. Якуб (Semi-special permutations. II. Semi-special permutations on [p^α]. Yacoub K. R.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 455—465 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 7650. Рассматриваются полуспециальные подстановки степени p^α (p — нечетное простое, $\alpha > 1$). В начале излагаются теоремы, опубликованные в части I. Основным результатом реферируемой статьи является теорема 5: Для каждого натурального $\beta < \alpha - 1$ имеется нелинейная полуспециальная подстановка π степени p^α, определяемая формулой

$$\pi x \equiv x + \lambda p^\beta \sum_{i=1}^{x} \binom{x}{i} (\Omega p^\gamma)^{i-1} \pmod{p^\alpha},$$

где $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha-\beta-1$, если $2\beta \geqslant \alpha$, $\gamma = \alpha-2\beta, \alpha-2\beta+1, \ldots, \alpha-\beta-1$, если $2\beta < \alpha$.

Выведена также еще одна формула для нелинейной полуспециальной подстановки степени p^α для случая $2\beta \geqslant \alpha$. Отдельно рассмотрены случаи $\alpha = 2, 3, 4$.

В. К. Туркин

1257. Новое доказательство теоремы Хайоша о конечных абелевых группах. Редеи (Neuer Beweis des Hajósschen Satzes über die endlichen Abelschen Gruppen. Rédei Ladislaus), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 1-2, 27—40 (нем.; рез. русск.)

Референт доказал (Math. Z., 1942, **47**, 427—467) одну теоретико-групповую теорему, из которой следует справедливость гипотезы Минковского об однородных линейных формах.

Пусть G — конечная абелева группа; рассмотрим совокупности $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вида $A = \{1, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\}$, для которых произведение $A_1, A_2 \ldots A_n$ содержит каждый элемент группы G ровно один раз. Тогда упомянутая теорема говорит о том, что по крайней мере одна из совокупностей $A_1, A_2 \ldots, A_n$ образует подгруппу. Автор ранее показал (Monatsh. Math., 1949, **53**, 221—226), что справедливость упомянутой теоремы следует из ее справедливости для p-групп. В данной работе автор дает оригинальное доказательство для p-групп, из которого следует новое доказательство упомянутой теоремы референта. В доказательстве используется одно утверждение из теории колец, которое, согласно результатам Селе, можно доказать чисто теоретико-групповым способом, как это и сделано в настоящей работе.

G. Hajós

1258. Об упорядоченных произведениях конечных групп. Маркьонна-Тибилетти (Sui prodotti ordinati di gruppi finiti. Marchionna Tibiletti Cesarina), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 1, 46—57 (итал.; рез. англ.)

Автор называет группу G упорядоченным произведением групп $A_1, A_2, \ldots, A_s$ (записывается посредством формулы $G = A_1 A_2 \ldots A_s$), если: 1) $G_j = A_j \ldots A_s$ ($j = 2, \ldots, s$) является группой, перестановочной с группой A_{j-1}; 2) $G_j \cap A_{j-1} = 1$ ($j = 2, \ldots, s$).

Автором доказан ряд теорем, устанавливающих связь между разложениями в упорядоченные произведения самой (конечной) группы и ее различных подгрупп.

В. К. Туркин

1259. Представления групп порядка 2^m над произвольным полем характеристики нуль. Берман (Представлення груп порядку 2^m над довільним полем нульової характеристики. Берман С. Д.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 3, 243—246

Пусть G — группа порядка 2^m, K — поле характеристики нуль. Даны формулы для минимальных идемпотентов групповой алгебры $R(G, K)$. Для случая, когда K является подполем поля действительных чисел, приводятся необходимые и достаточные условия эквивалентности неприводимых представлений группы G над K, соответствующих двум минимальным идемпотентам. Для этого же случая приведены необходимые и достаточные условия изоморфизма групповых алгебр $R(G, K)$ и $R(G', K)$ (G' — также группа порядка 2^m).

В. К. Туркин

1260. Коэффициент при S-функции $\{nm-k-r, k, r\}$, $k \leqslant m$, в разложении $\{m\} \otimes \{\nu\}$, где (ν) — разбиение на целые положительные слагаемые числа n и $n = 5$ или 6. I. Макар, Миссиха (The coefficient of the S-function $\{nm-k-r, k, r\}$, $k \leqslant m$, in the analysis of $\{m\} \otimes \{\nu\}$, where (ν) is any partition of n, and $n=5$ or 6. I. Makar Ragy H., Missiha Samy A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 1, 77—86; Indagationes math., 1958, **20**, № 1, 77—86 (англ.)

Выведена (для случая $n = 5$) формула для коэффициента при $\{nm - k - r, k, r\}$ в разложении кронекерова произведения $\{m\} \otimes \{\nu\}$. Указывается на значение полученного результата в теории алгебраических инвариантов. Обозначения см., например, Murnaghan F. D., The theory of group representations, Baltimore, U. S. A., 1949.

В. К. Туркин

1261. Коэффициент при S-функции $\{nm-k-r, k, r\}$, $k \leqslant m$, в разложении $\{m\} \otimes \{\nu\}$, где (ν) — разбиение на целые положительные слагаемые числа n, и $n=5$ или 6. II. Макар, Миссиха (The coefficient of the S-function $\{nm-k-r, k, r\}$, $k \leqslant m$, in the analysis of $\{m\} \otimes \{\nu\}$ whera $\{\nu\}$ is any partition of n, and $n=5$ or 6. II. Makar Ragy H., Missiha Samy A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 1, 87—93; Indagationes math., 1958, **20**, № 1, 87—93 (англ.)

Продолжение предыдущей работы автора (реф. 1260). Рассмотрен случай $n = 6$.

В. К. Туркин

1262. Внутренний плетизм S-функций. Литлвуд (The inner plethysm of S-functions. Littlewood D. E.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 1—16 (англ.)

Пусть M_i — матрица, соответствующая элементу S_i, в представлении симметрической группы n символов и $\chi^{(\lambda)}(S_i)$ — соответствующий характер. Пусть $M_i^{(\mu)}$ — инвариантная матрица матрицы M_i, соответствующая разбиению (μ) числа μ на целые положительные слагаемые и пусть

$$\sum G_{\lambda\mu\nu} \chi^{(\nu)} S_i$$

— характер матрицы $M_i^{(\mu)}$. По определению

$$\{\lambda\} \odot \{\mu\} = \sum G_{\lambda\mu\nu} \{\nu\},$$

причем операция $\odot$ называется внутренним плетизмом

S-функций $\{\lambda\}$ и $\{\mu\}$. Для этой операции выведено значительное число формул. В. К. Туркин

1263. Произведения и плетизмы характеров ортогональных, симплектических и симметрических групп. Литлвуд (Products and plethysms of characters with orthogonal, symplectic and symmetric groups. Littlewood D. E.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 17—32 (англ.)

Выведены формулы разложения для кронекерова произведения представлений симметрической группы (эквивалентные формулы были опубликованы без доказательств Мурнаганом (РЖМат, 1956, 3671)). Метод автора дает возможность получить аналогичные результаты также для ортогональных и симплектических групп. В. К. Туркин

1264. О характерах и кольцах характеров конечных групп. Сиратани (On the characters and the character rings of finite groups. Shiratani Katsumi), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1957, **A11**, № 2, 99—115 (англ.)

Даны некоторые обобщения известной теоремы Брауэра (Brauer R., Ann. Math., 1947, **48**, 502—514) об условиях, при которых комплексная функция классов группы является обобщенным характером (т. е. линейной комбинацией неприводимых характеров с неотрицательными целыми рациональными коэффициентами) этой группы. Основной теоремой, полученной автором, является следующая:

Комплексная функция классов θ является обобщенным характером конечной группы $\mathfrak{G}$ в том и только в том случае, если для некоторого простого числа p можно подобрать такое целое рациональное число l_p, не делящееся на p, что $l_p(\theta \curvearrowright \mathfrak{E})$ является обобщенным характером всякой p-элементарной подгруппы $\mathfrak{E} = (A) \times \mathfrak{P}$ группы $\mathfrak{G}$. Здесь $\theta \curvearrowright \mathfrak{E}$ — функция классов подгруппы $\mathfrak{E}$, совпадающая с ограничением $\theta | \mathfrak{E}$ функции θ на подгруппу $\mathfrak{E}$ для классов, состоящих из элементов вида $A^b P$, $P \in \mathfrak{P}$, $(b, a) = 1$ (a — порядок элемента A), и равная нулю для всех других элементов $\mathfrak{E}$.

(Группа называется p-элементарной (p — простое число), если она является прямым произведением p-группы и циклической группы порядка, не делящегося на p). В. К. Туркин

1265. О ядрах гомоморфизмов линейных представлений конечных групп. Жмудь Э. М., Матем. сб., 1958, **44**, № 3, 353—408

Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа; G_i — ее элементы; $X = \{G_1, \ldots, G_k\}$ — совокупность из k элементов группы $\mathfrak{G}$; $E_k(\mathfrak{G})$ — множество всех X; $\mathfrak{M}_x$ — минимальный из нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$, содержащих систему X. Системы X_1 и X_2 называются принадлежащими одному и тому же классу множества $E_k(\mathfrak{G})$ (или эквивалентными), если $\mathfrak{M}_{X_1} = \mathfrak{M}_{X_2}$.

Пусть P — поле, характеристика которого не делит порядок группы $\mathfrak{G}$. Нормальный делитель $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ называется k-ядром, если он является ядром гомоморфизма линейного представления группы $\mathfrak{G}$, распадающегося на k неприводимых в поле P компонент. Выведено необходимое и достаточное условие, при котором нормальный делитель является k-ядром (теорема 1). Доказано, что число k-ядер группы равно числу подгрупп, порождаемых k классами сопряженных элементов (теорема 5).

Вводится понятие о функциях $s_i^{(k)}(X)$, определенных на множестве $E_k(\mathfrak{G})$ и зависящих от групповых характеров. Для эквивалентных систем X_1 и X_2 $s_i^{(k)}(X_1) = s_i^{(k)}(X_2)$ (теорема 2). Для функций $s_i^{(k)}(X)$ выведены две системы соотношений ортогональности (теорема 3). Число функций $s_i^{(k)}(X)$ равно числу классов множества $E_\kappa(\mathfrak{G})$ (теорема 4).

Во втором разделе работы доказывается, что классы множества $E_k(\mathfrak{G})$ порождают коммутативную полупростую алгебру; исследуется структура этой алгебры.

В третьем разделе подробно рассматривается случай $k = 1$. В этом случае классы множества $E_\kappa(\mathfrak{G})$ являются расширенными классами (инвариантными комплексами) группы $\mathfrak{G}$.

В четвертом разделе проведено дополнительное исследование функций $s_i^{(k)}(X)$; в частности, получено разложение этих функций на множители. В. К. Туркин

1266. К построению характеров тензорных комбинаций, обладающих собственной симметрией. Мюллер (Zur Konstruktion der Charaktere eigensymmetrischer Tensorverknüpfungen. Müller Klaus), Abhandl. Braunschweig. wiss. Ges., 1957, **9**, 127—134 (нем., рез. англ.)

Рассматривается тензор, обладающий смешанной симметрией, характеризуемой группой пространственных преобразований R и группой подстановок индексов P. Группой симметрии такого тензора называется прямое произведение RP. Приведены формулы, позволяющие выразить характеры неприводимых представлений RP через характеры групп R и P. Вычисление упрощается в случае, когда P совпадает с симметрической группой степени, равной валентности тензора. В. К. Туркин

1267. О произведении перестановочных групп. Марконна-Тибилетти (Sul prodotto di gruppi permutabili. Marchionna Tibiletti Cesarina), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 341—356 (итал.)

Исследуется строение группы, являющейся произведением двух перестановочных подгрупп. Доказывается, что группа, являющаяся произведением перестановочных групп A и B, пересечение которых совпадает с единичным элементом, должна быть изоморфна транзитивной подгруппе полного произведения Γ_{ab} в смысле Краснера-Калужнина (Krasner M., Kaloujnine L., Acta sci. math. Szeged, 1949/50, **13**, 208; 1951/52, **14**, 39, 69). Установлены некоторые свойства этих транзитивных подгрупп, названных автором шрейеровскими. Рассмотрен также случай произведения двух перестановочных групп с пересечением, отличным от 1; в этом случае формулировка получается более сложная. В. К. Туркин

1268. Структура подгрупп некоторых классов групп. Пекелис А. С., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 238

1269. Описание группы дробно-линейных преобразований над полем характеристики 2. Карцель (Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen über einem Körper der Charakteristik 2. Karzel Helmut), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 1-2, 1—8 (нем.)

Бахман (РЖМат, 1954, 3056) дал аксиоматическое описание группы дробно-линейных преобразований над полем характеристики $\neq 2$. Автор дает описание для исключенного Бахманом случая. Пусть I — множество отличных от единицы инволюторных элементов группы G. Элементы α и β из G называются связуемыми, если $(u\alpha)^2 = (u\beta)^2 = 1$ для некоторого инволюторного u. Система аксиом такова; I. Если $a \neq b$, abc, $abd \in I$, то $(acd)^2 = 1$; II. Существуют несвязуемые элементы α и a, причем $\alpha \in I$ и $\alpha \neq 1$; III. Если a_1, a_2, a_3 — три попарно несвязуемых инволюторных элемента, то каждый отличный от 1 неинволюторный элемент α связуем хотя бы с одним из a_i; если α не связуем ни с a_1, ни с a_2, то он несвязуем и с $a_1 a_2$; IV. Если a связуемо с b и с c, то $(abc)^2 = 1$. Л. А. Скорняков

1270. Полугруппа эндоморфизмов локально компактной группы. Гото, Кимура (Semigroup of endomorphisms of a locally compact group. Goto Morikuni,

Kimura Naoki), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 2, 359—371 (англ.)

Пусть G — локально компактная группа, $\widetilde{\mathfrak{E}}(G)$ — полугруппа всех топологических эндоморфизмов группы G, 2^G — полугруппа всех компактных подмножеств группы G. В полугруппах $\widetilde{\mathfrak{E}}(G)$ и 2^G естественным образом вводится топология, относительно которой $\mathfrak{C}(G)$ является хаусдорфовой полугруппой, а 2^G — локально компактной хаусдорфовой полугруппой.

Если L — r-мерная связная группа Ли, то $\mathfrak{E}(G)$ — топологически изоморфна замкнутой подполугруппе полугруппы $GL(r)$ всех линейных преобразований r-мерного линейного пространства. Если центр группы L дискретен (в частности, если L — полупроста), то $\widetilde{\mathfrak{E}}(L)$ совпадает с группой $\widetilde{\mathfrak{A}}(L)$ всех топологических автоморфизмов группы L.

Если G — компактная группа, то компоненты $\mathfrak{E}(G)$ и $\mathfrak{A}(G)$ полугруппы $\widetilde{\mathfrak{E}}(G)$ и группы $\widetilde{\mathfrak{A}}(G)$, содержащие их единицы, совпадают. Детально исследовано строение полугруппы $\mathfrak{E}(G)$ в случае, когда G — локально компактная связная группа. Л. М. Глускин

1271. Главные двусторонние эквивалентности, определенные в полугруппе. Круазо (Equivalences principales bilatères définies dans nu demi-groupe. Croisot R.), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 4, 373—417 (франц.)

Пусть H — непустое подмножество элементов полугруппы D. Двусторонним частным комплекса H на элемент $a \in D$ называется множество $H..a$ всех пар $(x, y) \in D \times D$ таких, что $xay \in H$. Множество W'_H всех элементов $w \in D$, для которых $H..w$ пусто, называется двусторонним вычетом комплекса H. С комплексом H связано следующее отношение эквивалентности R'_H:

$$a \equiv b\,(R'_H) \leftrightarrow H..a = H..b,$$

неоднократно встречавшееся в литературе (см., например, РЖМат, 1955, 4906). Развивая идеи Дюбрея (РЖМат, 1955, 4908), автор исследует свойства эквивалентности R'_H, названной им главной двусторонней эквивалентностью, ассоциированной с комплексом H, и использует их для изучения полугруппы D.

Эквивалентность R'_H оказывается регулярной справа и слева (терминологию см. РЖМат, 1955, 1115, 4908). Если вычет W'_H не пуст, то W'_H является идеалом D и классом модуля R'_H. Если правый вычет W_H совпадает с левым вычетом ${}_HW$, то $W_H \subseteq W'_H$. Если, кроме того, $H \cap D^2 \cap W_H$ пусто, то $W_H = W'_H$. Если H — подполугруппа D, то $W'_H \subseteq {}_HW \cap W_H$.

Комплекс H называется двусторонне сильным, если из $H..a \cap H..b \neq \varnothing$ следует $H..a = H..b$. Двусторонне сильный комплекс H, в котором $H..h_1 = H..h_2$ для любых $h_1, h_2 \in H$, называется двусторонне совершенным. Приведено большое число свойств эквивалентностей R'_H, ассоциированных с двусторонне сильными и двусторонне совершенными комплексами. В частности, если H — двусторонне сильный комплекс и $W'_H = \varnothing$, то эквивалентность R'_H сократима справа и слева. Если H — двусторонне совершенный и чистый справа комплекс, то фактор-полугруппа D/R'_H является группой.

Изучается связь произвольной регулярной эквивалентности R, определенной в полугруппе D, с эквивалентностями R'_H. Для любого класса H модуля R из $a \equiv b\,(R)$ следует $a \equiv b\,(R'_H)$. В случае, когда R сократима справа и слева, H является двусторонне сильным комплексом. Детально рассматриваются эквивалентности R'_H в группе и в коммутативной полугруппе.

Идеал X полугруппы D называется двусторонне замкнутым, если $X = (A : D) : D$, где A — подмножество D. Всякий двусторонне замкнутый идеал X может быть представлен в виде $X = (DXD : D) : D$. Для того чтобы идеал полугруппы D был двусторонним вычетом некоторого комплекса, необходимо и достаточно, чтобы он был двусторонне замкнутым. Для того чтобы подполугруппа D^3 полугруппы D не имела собственных идеалов, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа D не содержала истинных двусторонне замкнутых идеалов. Л. М. Глускин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

1272. О полях с конечными характеристиками. Чупона (За еден вид полиња со конечна карактеристика. Чупона Горги), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1955, 6, 44—46 (макед.; рез. англ.)

Доказывается, что единственными полями характеристики p с мультипликативной q-группой будут: 1) кольцо классов вычетов по mod p, если $p = 2^{2^\alpha} + 1$ — простое, 2) поле с 2^α элементами, если $q = 2^\alpha - 1$ — простое, и 3) поле с 9 элементами. Резюме автора

1273. Группа Галуа максимального абелева расширения поля алгебраических чисел. Кубота (Galois group of the maximal abelian extension over an algebraic number field. Kubota Tomio), Nagoya Math. J., 1957, 12, 177—189 (англ.)

Пусть l — простое число, а X_l — примарная компонента группы характеров группы Галуа максимального абелева расширения Ω_A конечного расширения Ω поля рациональных чисел; L — нижний слой группы X_l; $X'_{l,\infty}$ — подгруппа группы X_l, состоящая из всех элементов бесконечной высоты в этой группе, а $X_{l,\infty}$ — максимальная полная подгруппа группы $X'_{l,\infty}$ (мы употребляем терминологию А. Г. Куроша (РЖМат, 1954, 3091К), отличную от терминологии автора. — *Реф.*)

Пусть фактор-группа $L_{\nu-1}/L_\nu$, где $L_\nu = L \cap X_l^{l^\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), разлагается в прямую сумму v_ν циклических групп порядка l, а группа $X_{l,\infty}$ — в прямую сумму $r = \dim X_l$ групп, изоморфных группе типа l^∞. Оказывается, что $\dim X_l$ — конечное число, а фактор-группа $X'_{l,\infty}/X_{l,\infty}$ — конечная группа.

Предположим, что в прямом разложении этой группы встречается точно $v_{\infty,\nu}$ циклических групп порядка l^ν. Структура группы X_l вполне определяется заданием инвариантов Ульма $\dim X_l$, v_ν, $v_{\infty,\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$);

Пусть ξ_{l^ν} — первообразный корень степени l^ν из 1; v_l — такое натуральное число, что поле $\Omega(\xi_l)$ содержит ξ_{l^ν} и не содержит $\xi_{l^{\nu+1}}$; $L_1, L_2, \ldots$, — различные простые делители числа l в поле Ω; $e_{l,\nu}$ — группа всех единиц поля Ω, которые являются l^ν-ми степенями при всех L_l-адических расширениях этого поля.

Тогда существует такое натуральное число μ_l, что для всех достаточно больших $\nu (e_{l,\nu}, e_{l,\nu+1}) = l^{\mu_l}$. Автор доказывает, что $v_\nu = 0$, если $\nu < v_l$, и $v_\nu = \infty$, если $\nu \geqslant v_l$; $\dim X_l = N - \mu_l$, где N — абсолютная степень поля Ω; $v_{\infty,\nu} = 2c_\nu - c_{\nu-1} - c_{\nu+1}$, где l^{c_ν} — число элементов группы $X_{l,\infty}$, порядки которых делят l^ν.

С. Д. Берман

1274. Системы классов. IV (Бесконечные расширения основного поля). Кавада (Class formations. IV. (Infinite extension of the ground field). Kawada Yukiyosi), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 4, 395—405 (англ.)

Предыдущие части см. РЖМат, 1956, 5127; 1958, 1864, 4528. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех конечных нормальных расширений основного поля k_0, содержащихся в фиксированном бесконечном нормальном алгебраическом расширении $\Omega \mid k_0$, а $\{A(K),\ K \in \mathfrak{R}\}$ — система классов над полем k_0 (РЖМат, 1956, 5127). Предполагается, что, сверх того, выполняется условие T: $A(K)$ — такая аддитивная компактная топологическая группа, что отображение $\varphi_{K,k} : A(k) \to A(K)$ $(k \in K;\ k, K \in \mathfrak{R})$ непрерывно и для каждого нормального расширения $K \mid k$ $(K, k \in \mathfrak{R})$ автоморфизм σ из группы Галуа $G(K/k)$ поля K над k определяет непрерывное отображение группы $A(K)$. Пусть $K_0^* \subset \Omega$ — произвольное бесконечное расширение поля k_0. Положим

$$\mathfrak{R}^* = \{K^*;\ K_0^* \subset K^* \subset \Omega;\ [K^* : K_0] < \infty\}.$$

Каждое подполе $K^* \in \mathfrak{R}^*$ можно представить в виде $K^* = \bigcup_\lambda K_\lambda$ $(K_\lambda \in \mathfrak{R})$. Для любой пары $K_\lambda \subset K_\mu$ существует непрерывный гомоморфизм $N_{\mu,\lambda} = N K_\mu / K_\lambda : A(K_\mu) \to A(K_\lambda)$ (отображение посредством нормы). С помощью отображений $N_{\mu,\lambda}$ можно образовать для множества групп $\{A_\lambda\}$ предельную группу $A^*(K^*)$. Доказывается, что множество $\{A^*(K^*), K^* \in \mathfrak{R}^*\}$ образует систему классов над основным полем K_0^*, удовлетворяющую условию T. Пусть k_0 — p-адическое числовое поле, Ω — его алгебраическое замыкание, а $\mathfrak{R}$ — множество всех конечных расширений K поля k_0, содержащихся в Ω. Если положить $A^\#(K) = K^\#$, где $K^\#$ — компактная топологическая группа, полученная из мультипликативной группы K^* поля K путем процесса пополнения (РЖМат, 1959, 152), то $\{A^\#(K), K \in \mathfrak{R}\}$ образует систему классов, удовлетворяющую аксиоме T, над полем k_0. Отсюда могут быть получены результаты Мори. Рассмотрены также приложения к теории полей классов в целом.

В заключение автор сравнивает метод реферируемой статьи с индуктивным методом Мори, применявшимся в его предыдущих заметках по теории систем классов.

С. Д. Берман

1275. Замечание к теореме об однозначном разложении. Нагата (A remark on the unique factorization theorem. Nagata Masayoshi), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 1, 143—145 (англ.)

Приводится более простое доказательство известного результата о том, что кольцо

$$K[x_1, x_2, \ldots, x_n] / \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$

является кольцом с однозначным разложением, если $n \geqslant 5$ и K — поле характеристики, отличной от 2. Автор получает это утверждение как следствие из более общих теорем.

Теорема 1. Пусть K — нетерово кольцо с однозначным разложением и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные. Если $g_0, g_1, \ldots, g_r \in K[x_3, \ldots, x_n]$ и g_0 неприводим, то кольцо $K[x_1, \ldots, x_n] / \left(x_1 x_2 + \sum_{i=0}^{r} g_i x_1^i \right)$ является кольцом с однозначным разложением.

Теорема 2. Пусть K — поле и $\mathfrak{a}$ — однородный идеал в $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Если имеется поле $L \supset K$ такое, что $L[x_1, x_2, \ldots, x_n]/(\mathfrak{a})$ — кольцо с однозначным разложением, то и $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ — также кольцо с однозначным разложением.

Приводится пример, показывающий, что требование однородности идеала $\mathfrak{a}$ существенно. И. З Розенкноп

1276. Замечания к теории колец отношений. Керстан (Bemerkungen zur Theorie der Quotientenringe. Kerstan Johannes. Wissensch. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-Nat. Reihe, 1953, **2**, № 3-4, 9—11) (нем.)

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей и пусть $R_1, \ldots, R_n$ — некоторое конечное множество колец отношений кольца R (Krulle, Idealtheorie, Berlin, Springer, 1935), обладающее тем свойством, что $R = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n$. Расширением произвольного идеала $\mathfrak{a}$ кольца R в кольце R_i является идеал $\mathfrak{a}R_i$. Автор устанавливает следующий критерий: идеал $\mathfrak{a}$ кольца R представим в виде точного пересечения его расширений $\mathfrak{a}R_i$, $i = 1, \ldots, n$, когда для каждого простого идеала p, принадлежащего идеалу $\mathfrak{a}$, существует по крайней мере одно такое расширение pR_i, что $R \cap pR_i = p$.

В качестве следствия автор получает, что если идеал $\mathfrak{a}$ кольца R представим в виде пересечения его расширений $\mathfrak{a}R_i$, то то же самое справедливо и для изолированных компонент идеала $\mathfrak{a}$. В случае, когда все кольца R_i являются примарными, каждый идеал кольца R разлагается в пересечение его расширений в кольцах R_i. В частности, если все кольца R_i являются примарными и удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей, то и кольцо R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Автор получает также некоторые результаты относительно связи изолированных компонент идеалов с определенными множествами простых идеалов.

I. N. Herstein

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 391.

1277. Замечание о примарной области целостности. Крулль (Eine Bemerkung über primäre Integritätsbereiche. Krull Wolfgang), Math. Ann., 1956, **130**, № 5, 394—398 (нем.)

Область целостности A называется максимальной, если она является максимальным собственным подкольцом в ее поле частных K. Известно, что каждая максимальная область целостности является кольцом оценки единичного ранга поля K. В зависимости от того, является ли эта оценка дискретной или недискретной, автор называет максимальную область целостности A дискретной или недискретной. Область целостности A, обладающую лишь одним максимальным идеалом $\mathfrak{P}$, автор называет примарной (мы же такую область целостности будем называть локальной). Ранее автором было установлено (Math. Z., 1936, **41**, 66—79), что локальная область целостности A тогда и только тогда является пересечением максимальных локальных колец (имеющих то же поле частных, что и кольцо A), когда кольцо A вполне целозамкнуто (кольцо A называется вполне целозамкнутым в своем поле частных K, если из справедливости для всех натуральных n соотношения $a \cdot \alpha^n \in A$, где $a \neq 0$ и $\alpha \in K$, вытекает, что $\alpha \in A$). В то же время, как было показано Нагата (Hagata, Hagoya Math. J., 1952, **4**, 29—33), вполне целозамкнутое локальное кольцо может не быть максимальным кольцом.

В реферируемой работе ставится задача найти достаточно простые условия, при выполнении которых вполне целозамкнутое локальное кольцо является максимальным. При этом устанавливается, что вполне целозамкнутое локальное кольцо A тогда и только тогда является максимальным дискретным кольцом, когда некоторая степень $\mathfrak{P}^n$ максимального идеала $\mathfrak{P}$ кольца A содержится в некотором идеале с конечным числом образующих.

Далее рассматривается случай недискретного максимального кольца. Принимая во внимание, что в локальном кольце для любых двух идеалов e_1 и e_2 с конечным числом образующих существуют такие показатели m и n, что $e_1^m \subseteq e_2$ и $e_2^n \subseteq e_1$, автор на любых двух идеалах e и e_1 с конечным числом образующих, причем $e_1 \supset e$, определяет три функции: функцию $k(e, e_1)$ как такое наименьшее число m, что $e_1^m \subseteq e$; функцию $g(e, e_1)$ как такое наибольшее число m, что $e_1^m \supset e$, и функцию $d(e, e_1) = (k(e, e_1) - g(e, e_1)) \cdot g(e, e_1)^{-1}$. Оказывается, что если кольцо A есть максимальное недискретное кольцо, то функция $d(e, e_1)$ при фиксированном e явля-

ется убывающей, т. е. из $\mathfrak{e}_1' \supseteq \mathfrak{e}_1$ следует $d(\mathfrak{e},\mathfrak{e}_1') \leqslant d(\mathfrak{e},\mathfrak{e}_1)$, и для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такой идеал $\mathfrak{e}_1 \supseteq \mathfrak{e}$ с конечным числом образующих, что $d(\mathfrak{e},\mathfrak{e}_1) < \varepsilon$ (другими словами $\lim d(\mathfrak{e},\mathfrak{e}_1) = 0$). Из этих свойств функции $d(\mathfrak{e},\mathfrak{e}_1)$ выводится, что для любых двух идеалов $\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{e}'$ с конечным числом образующих максимального недискретного кольца A и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой идеал $\mathfrak{e}_1$ с конечным числом образующих, что $d(\mathfrak{e},\mathfrak{e}_1) + d(\mathfrak{e}',\mathfrak{e}_1) \leqslant \varepsilon$ (последнее свойство автор называет условием ограниченности показателя (Potenzgrenzbedingung). Отмечается, что в общем случае условие ограниченности показателя слабее указанных выше двух свойств функции $d(\mathfrak{e},\mathfrak{e}_1)$. Однако, если кольцо A локально, вполне целозамкнуто и удовлетворяет условию ограниченности показателя, то оно является максимальным недискретным кольцом. В конце отмечается, что, как это видно из доказательства только что сформулированного утверждения, это утверждение остается справедливым, если условие ограниченности показателя заменить более слабым условием, потребовав, чтобы условие ограниченности показателя выполнялось лишь для любых двух главных идеалов или даже при одном фиксированном главном идеале. Е. Г. Шульгейфер

1278. О перестановочных кольцах эндоморфизмов. Кертис (On commuting rings of endomorphisms. Curtis C. W.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 271—292 (англ.)

Рассматриваются модули над произвольным кольцом $\mathfrak{B}$ с единицей, действующей на модуле как единичный оператор. Ради большей общности предполагается, что кольцо $\mathfrak{B}$ допускает некоторое множество Ω (левых) операторов и $\mathfrak{B}$-модули являются $\mathfrak{B}$-Ω-модулями. Однако это обобщение в работе существенного значения не имеет. Тройка $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}, \tau)$, состоящая из левого $\mathfrak{B}$-модуля $\mathfrak{M}'$, правого $\mathfrak{B}$-модуля $\mathfrak{M}$ и невырожденной $\mathfrak{B}$-билинейной формы $\tau: \mathfrak{M}' \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{B}$, называется спаренной системой. Множество $\mathfrak{b}$, состоящее из всех конечных сумм вида $\Sigma_i \tau(\psi_i, x_i)$, $\psi_i \in \mathfrak{M}'$, $x_i \in \mathfrak{M}$, является двусторонним идеалом кольца $\mathfrak{B}$ и называется ядром спаренной системы $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}, \tau)$. Если $\mathfrak{E}$ —кольцо всех $\mathfrak{B}$-эндоморфизмов модуля $\mathfrak{M}$, то к этому кольцу принадлежат, в частности, $\mathfrak{B}$-эндоморфизмы $\psi \odot u$, $\psi \in \mathfrak{M}'$, $u \in \mathfrak{M}$, задаваемые формулой $x(\psi \odot u) = u\tau(\psi, x)$. Для каждого $\mathfrak{B}$-эндоморфизма вида $\psi \odot u$ существует сопряженный относительно формы τ, т. е. такой $\mathfrak{B}$-эндоморфизм $(\psi \odot u)^*$ модуля $\mathfrak{M}'$, что $\tau(\Phi, x(\psi \odot u)) = \tau((\psi \odot u)^* \Phi, x)$. Множество $\mathfrak{c}$ всех конечных сумм вида $\Sigma_i (\psi_i \odot u_i)$ является правым идеалом кольца $\mathfrak{E}$. Поскольку для каждого эндоморфизма из $\mathfrak{c}$ существует сопряженный, на модуле $\mathfrak{M}'$ можно определить левые операторы из кольца $\mathfrak{c}$ и в этом случае отображение $(\psi, u) \to \psi \odot u$ является $\mathfrak{c}$-билинейной формой с ядром $\mathfrak{c}$. Централизатором модуля $\mathfrak{M}$ относительно кольца $\mathfrak{B}$ автор называет произвольно фиксированное подкольцо $\mathfrak{C}$ кольца $\mathfrak{E}$, содержащее подкольцо $\mathfrak{c}$.

В начале работы предполагается, что $\mathfrak{B}$ есть скрещенное произведение $\mathfrak{B} = \Delta(\mathfrak{G}, H, \rho)$ тела Δ и конечной группы $\mathfrak{G}$ относительно некоторой системы факторов ρ. В этом случае для правого $\mathfrak{B}$-модуля $\mathfrak{M}$ (являющегося одновременно Δ-пространством) и двойственного относительно некоторой Δ-билинейной формы левого Δ-пространства $\mathfrak{M}'$ при некоторых ограничениях строится $\mathfrak{B}$-билинейная форма $\tau: \mathfrak{M}' \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{B}$. При этом в случае, когда размерность пространства $\mathfrak{M}$ над телом Δ конечна, подкольцо $\mathfrak{c}$ тогда и только тогда совпадает со всем кольцом эндоморфизмов $\mathfrak{B}$-модуля $\mathfrak{M}$, когда модуль $\mathfrak{M}$ проективен (или, что в рассматриваемом случае равносильно, инъективен). Здесь же доказывается, что скрещенное произведение $\mathfrak{B} = \Delta(\mathfrak{G}, H, \rho)$ является квазифробениусовым кольцом.

В общей теории дополнительно предполагается, что ядро $\mathfrak{b}$ системы $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}, \tau)$ обладает единицей; в этом случае билинейная форма τ называется регулярной. При этом доказывается, что каждый $\mathfrak{C}$-эндоморфизм (где $\mathfrak{C}$—централизатор модуля $\mathfrak{M}$ относительно кольца $\mathfrak{B}$) модуля $\mathfrak{M}$ задается умножением справа на элемент ядра $\mathfrak{b}$ и устанавливается взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{C}$-прямыми слагаемыми модуля $\mathfrak{M}$ и левыми идеалами кольца $\mathfrak{b}$, являющимися прямыми слагаемыми этого кольца, рассматриваемого как левый $\mathfrak{B}$-модуль (такие идеалы в дальнейшем называются левыми прямыми слагаемыми кольца $\mathfrak{b}$). Это соответствие, устанавливаемое отображениями $\mathfrak{l} \to \mathfrak{M}\mathfrak{l}$ $(\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{b})$ и $\mathfrak{B} \to \tau(\mathfrak{M}', \mathfrak{B})$ $(\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M})$, перестановочно с операциями взятия, объединения и пересечения и два левых прямых слагаемых $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{l}_2$ кольца $\mathfrak{b}$ тогда и только тогда $\mathfrak{B}$-изоморфны, когда $\mathfrak{C}$-изоморфны прямые слагаемые $\mathfrak{M}\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{M}\mathfrak{l}_2$ модуля $\mathfrak{M}$. Аналогичное соответствие имеет место между правыми прямыми слагаемыми кольца $\mathfrak{b}$ и прямыми слагаемыми $\mathfrak{C}^*$-модуля $\mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{C}^*$—произвольное подкольцо кольца $\mathfrak{B}$-эндоморфизмов модуля $\mathfrak{M}'$, содержащее подкольцо $\mathfrak{C}^*$ эндоморфизмов, сопряженных эндоморфизмам из $\mathfrak{C}$. При предположении, что кольцо $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов, доказывается, что каждое неразложимое прямое слагаемое $\mathfrak{C}$-модуля $\mathfrak{M}$ содержит единственный максимальный $\mathfrak{C}$-подмодуль и что два таких прямых слагаемых $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ $\mathfrak{C}$-изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}$-изоморфны фактор-модули $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{R}_2/\mathfrak{S}_2$, где $\mathfrak{S}_i$ — максимальный $\mathfrak{C}$-подмодуль модуля $\mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2)$. Далее, отбрасывая предположение о регулярности формы τ, автор вводит предположение, что подкольцо $\mathfrak{c}$ совпадает со всем кольцом $\mathfrak{B}$ и что билинейная форма $\psi \odot u$ невырожденная. В этом случае регулярна форма $\odot$ и справедливы утверждения, аналогичные сформулированным выше с заменой кольца $\mathfrak{b}$ кольцом $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}$-прямых слагаемых модуля $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{B}$-прямыми слагаемыми модуля $\mathfrak{M}$. Некоторые более сильные результаты, относящиеся к кольцу $\mathfrak{C}$, автор получает при дополнительном предположении, что кольцо $\mathfrak{B}$ является скрещенным произведением тела Δ и конечной группы $\mathfrak{G}$.

Отмечается, что если $\mathfrak{A}$—примитивное кольцо, обладающее минимальными идеалами, и $\mathfrak{G}$—некоторая конечная группа автоморфизмов кольца $\mathfrak{A}$, то подкольцо $\mathfrak{C}$ кольца $\mathfrak{A}$, состоящее из всех элементов, инвариантных относительно автоморфизмов из $\mathfrak{G}$, можно рассматривать как централизатор некоторого модуля $\mathfrak{M}$ относительно кольца $\mathfrak{B}$, представляющего собой скрещенное произведение некоторого тела Δ и группы $\mathfrak{G}$.

В заключение доказывается, что если коммутативная алгебра $\mathfrak{A}$ линейных преобразований конечномерного векторного пространства $\mathfrak{M}$ над полем Φ является симметрической алгеброй и $\mathfrak{M}$, как $\mathfrak{A}$-модуль, проективен, то централизатор $\mathfrak{C}$ модуля $\mathfrak{M}$ относительно алгебры $\mathfrak{A}$ также является симметрической алгеброй. Приводятся примеры регулярных билинейных форм. Е. Г. Шульгейфер

1279. О построении R-модулей и колец с полиномиальным умножением. Бомонт, Берн (On the construction of R-modules and rings with polynomial multiplication. Beaumont Ross A., Byrne J. Richard), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 3, 1305—1317 (англ.)

Отображение f множества $S_1 \times \ldots \times S_k$, где S_i — аддитивно записываемые полугруппы, в абелеву группу M называется m-дистрибутивным $(1 \leqslant m \leqslant k)$, если

$f(s_1 + s_1', \ldots, s_m + s_m'; s_{m+1}, \ldots, s_k) = f(s_1, \ldots, s_m) + f(s_1', \ldots, s_m'; s_{m+1}, \ldots, s_k)$, $f(s_1, \ldots, s_m; s_{m+1} + s_{m+1}', \ldots, s_k + s_k') = f(s_1, \ldots, s_m) + f(s_1, \ldots, s_m; s_{m+1}', \ldots, s_k')$

для любых $s_i, s_i' \in S_i$. Пусть S_i являются подполугруппами аддитивной группы некоторого кольца R, лежащего в кольце R^*. Каждый полином на $R^*[x_1, \ldots, x_k]$ определяет отображение $S_1 \times \ldots \times S_k$ в R^*, если вместо каждого из x_i подставлять элемент из S_i. Если это ото-

бражение m-дистрибутивно, то

$$f(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{l=m+1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j_i,j_l=1\\ j_l+j_l<t}}^{t-1} a_{j_i j_l}^{(i,l)} x_i^{j_i} x_l^{j_l}.$$

Обратное, вообще говоря, неверно. Для случая, когда R^*—коммутативная область целостности, а S_l— ненулевые идеалы в R, находятся условия, необходимые и достаточные для m-дистрибутивности f, а именно:

$$f(x_1,\ldots,x_k)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=m+1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s_i,s_l=0}^{r} a_{p^{s_i}p^{s_l}}^{(i,l)} x_i^{p^{s_i}} x_l^{p^{s_l}}\\ \displaystyle\sum_{l=m+1}^{k}\sum_{i=1}^{m} a_{ll}x_l x_l,\end{cases}$$

если R имеет характеристику $p>0$ в первом случае и если характеристика R равна 0 во втором случае.

Если $k=2m$, $S=S_i$ для всех i и m m-дистрибутивных отображений задаются полиномами $f_1,\ldots,f_m$, то введение умножения

$$(x_1,\ldots,x_m)\,(y_1,\ldots,y_m)=(f_1(x_1,\ldots,x_m;\ y_1,\ldots,y_m),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_m;\ y_1,\ldots,y_m)$$

превращает $\underbrace{S\times\ldots\times S}_{m\text{ раз}}$ в кольцо. Если R^* — коммутативная область целостности, а всякий идеал из R является идеалом в R^*, то ассоциативность этого кольца эквивалентна выполнению равенства:

$$f_i(f_1(s_1,\ldots,s_m;\ t_1,\ldots,t_m),\ldots,f_m(s_1,\ldots,s_m;\ t_1,\ldots,t_m);u_1,\ldots,u_m)=f_i(s_1,\ldots,s_m;\ f_1(t_1,\ldots,t_m;\ u_1,\ldots,u_m),\ldots,f_m(t_1,\ldots,t_m;\ u_1,\ldots,u_m)).$$

При тех же ограничениях на R и R^* ищутся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы при $S_1=S$, $S_i=S$, $i=2,\ldots,k$, задание умножения

$$r(s_2,\ldots,s_k)=(f_2(r;\ s_2,\ldots,s_k),\ldots,f_k(r;s_2,\ldots,s_k))$$

превращало $\underbrace{S\times\ldots\times S}_{k-1\text{раз}}$ в R-модуль. Оказывается, что такими условиями является выполнение равенств

$$f_i(x_1;x_2,\ldots,x_k)=\sum_{2}^{k} a_j^{(i)}x_1x_j,$$

где матрица $(a_j^{(i)})$ идемпотентна. Л. А. Скорняков

1280. Об одночленных некоммутативных конечных кольцах. Редеи (Die einstufig nichtkommutativen endlichen Ringe. Rédei Ladislaus), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 3-4, 401—442 (нем.)

Некоммутативное кольцо (группа) A называется одночленным (einstufig), если каждое истинное подкольцо (подгруппа) $B\subset A$ коммутативно. Конечные некоммутативные одночленные группы были в основном определены Миллером и Морено (Miller G. A., Moreno H. C., Trans. Amer. Math. Soc., 1903, 4, 398—404). Их окончательная классификация дана автором (Comment. math. helv., 1947, 20, 225—264). В реферируемой заметке найдены все типы конечных некоммутативных одночленных колец. В дальнейшем для краткости эти кольца мы будем называть о. н.к.

Пусть кольца R_1, R_2 и R_3 задаются следующими определяющими соотношениями:

1. $R_1=\{\rho,\sigma\}$; $p^m\rho=0$; $p^n\sigma=0$; $\rho^r=0$; $\sigma^s=0$; $\rho^2\sigma=\rho\sigma\rho=\sigma\rho^2$; $\rho\sigma^2=\sigma\rho\sigma=\sigma^2\rho$; $p\rho\sigma=p\sigma\rho$ (p, m, n, r, s — натуральные числа, удовлетворяющие условиям: $1\leqslant m\leqslant n$; $r\geqslant 2$; $s\geqslant 2$; $r\leqslant s$, если $m=n$; p — простое).

2. $R_2=\{\rho,\sigma\}$; $p^m\rho=0$; $p\sigma=0$; $\rho F(\rho)=0$; $\sigma^2=0$; $F(\rho)\sigma=0$; $\sigma\rho=\rho^{p^{nq^{e-1}}}\sigma$, где p, q — простые, m, n ($n<q$), e — натуральные числа, $F(x)$—неприводимый по mod p целочисленный полином степени q^e со старшим коэффициентом 1.

3. $R_3=\{\rho,\sigma\}$; $p^m\rho=0$; $p\sigma=0$; $\rho^2=\rho$; $\sigma^2=0$; $\rho\sigma=\sigma$; $\sigma\rho=0$. Кольцо R_1 с точностью до изоморфизма определяется системой инвариантов (p, m, n, r, s), кольцо R_2—системой инвариантов (p, m, q, e, n), а кольцо R_3 — системой инвариантов (p, m).

Основными результатами статьи являются следующие теоремы: 1) нильпотентные конечные о. н.к. совпадают с некоммутативными гомоморфными образами колец вида R_1; 2) ненильпотентные конечные о. н. к., не содержащие односторонних делителей нуля, исчерпываются кольцами типа R_2; 3) ненильпотентные конечные о. н., содержащие односторонние делители нуля, совпадают с кольцами вида R_3 и кольцами, которые антиизоморфны этим кольцам. (Для колец R_3 односторонним делителем нуля является элемент σ).

Вопрос о существовании бесконечных некоммутативных групп (колец), все истинные подгруппы (подкольца) которых коммутативны, остается открытым.

С. Д. Берман

1281. О выделении радикала ассоциативного кольца в качестве прямого слагаемого. Андрунакиевич В. А., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 3, 226—228

1282. О локальной нильпотентности колец Ли с условием Энгеля. Кострикин А. И., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 3, 246

1283. Алгебры Ли локально компактных групп. Лашоф (Lie algebras of locally compact groups. Lashof Richard K.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1145—1162 (англ.)

Определяется проективный предел $G=\lim G_a$ конечномерных алгебр Ли G_a. В G вводится структура топологической алгебры Ли, и получающиеся таким образом топологические алгебры Ли называются LP-алгебрами. Доказывается, что алгебраический изоморфизм между двумя LP-алгебрами необходимо является гомеоморфизмом. Пусть g — LP-группа, т. е. проективный предел групп Ли g_a. Если G_a — алгебра Ли группы g_a, то $G=\lim G_a$ называется алгеброй Ли группы g и не зависит от способа представления группы g в виде предела групп Ли. Доказывается, что алгебра Ли локально компактной топологической группы имеет вид $G=H\times A\times S$, где H — конечномерна, A— произведение одномерных алгебр Ли, S — произведение простых компактных алгебр Ли. Изучаются различные свойства LP-групп и их алгебр Ли, аналогичные свойствам групп Ли.

А. Л. Онищик

1284. Неассоциативные кольца бесконечных матриц. Маттьюс (Non-associative rings of infinite matrices. Matthews G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 584—589; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 584—589 (англ.)

1285. О некоторых классах разрешимых структур. Мочульский Е. Н., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, 108, 283—316

Работа опирается на теорию нормальных рядов в структурах (Узков — Коржинек — Лившиц), и, в частности, существенно использует понятия нормальности элемента b в элементе a структуры. Цель работы—перенесение на язык теории структур теории разрешимых и обобщенно разрешимых групп. Роль абелевости играет при этом некоторое фиксированное свойство структур, сохраняющееся при нормальных изоморфизмах и переносящееся со структуры на все ее факторы a/b (здесь $b\ N\ a$). Относительно этого свойства определяется разрешимость нормального (соответственно инвариантного)

ряда; структура, обладающая таким рядом, называется R- (соответственно $\overline{R}$-) структурой.

Свойство коммутанта группы быть минимальным нормальным делителем, фактор-группа по которому абелева, позволяет перенести понятие коммутанта на рассматриваемые структуры Этим для элемента a определяется элемент $k(a)$; если этот элемент существует для всех a, то структура называется K-структурой. Она будет $\overline{K}$-структурой, если из $aN1$ всегда следует $k(a)\,N1$. Для $\overline{K}$-структур оказываются эквивалентными все пять обычных для теории групп определений разрешимости.

Затем рассматриваются полные структуры и на них переносятся, следуя обзорной статье Куроша и Черникова , основы теории обобщенных разрешимых групп. Наконец, наличие понятия нормальности позволило перенести понятие прямой суммы на недедекиндовы структуры и изучить, какие из обобщений разрешимости сохраняются при прямом суммировании.

Введение понятия эквивалентности факторов структуры позволило рассматривать основы теории разрешимых и обобщенно разрешимых групп как следствие изложенной здесь теории. А. Г. Курош

1286. Замечание об эндоморфизмах структур. Якубик (Poznámka o endomorfizmoch na sväzoch. Jakubík Ján), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 2, 226—229 (словацк.; рез. русск., англ.)

Решена 93-я проблема Биркгофа (Биркгоф, Теория структур, М., Изд-воин. лит., 1952). Доказывается, что множество E всех эндоморфизмов по объединениям полной структуры является полной структурой. На примерах показано, что существует: 1) конечная структура, для которой структура E не является полудедекиндовой и 2) структура, для которой множество E не является структурой. V. Vilhelm

1287. Заметка о структурном сегменте. Нисигори (A note on lattice segment. Nishigori Noboru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A18**, № 2, 123—127 (англ.)

Пусть каждой паре элементов a, b множества S поставлено в соответствие подмножество (a, b) множества S, причем: 1) $(a, a) = a$ для любого a; 2) существует такой элемент $0 \in S$, что для каждой пары $a, b \in S$ найдется единственный элемент r такой, что $(0, r) = (0, a) \cap (0, b)$, и единственный элемент s такой, что $(0, s) = (0, a) * (0, b)$ (через $(0, a) * (0, b)$ обозначается наименьшее подмножество вида $(0, x)$, содержащее $(0, a)$ и $(0, b)$); 3) $(a, b) \subset (p, q)$ тогда и только тогда, когда $(0, a) \cap (0, b) \supset (0, p) \cap (0, q)$ и $(0, a) * (0, b) \subset (0, p) * (0, q)$. Доказывается, что, положив $r = ab$ тогда и только тогда, когда $(0, r) = (0, a) \cap (0, b)$, а $s = a + b$ тогда и только тогда, когда $(0, s) = (0, a) * (0, b)$, мы превратим S в структуру $L(S)$ с нулем 0. При этом

$$(a, b) = \{x;\ ab \leqslant x \leqslant a + b\}. \qquad (1)$$

Подмножества структуры L с нулем, определяемые равенством (1), обладают свойствами 1) — 3). Для дедекиндовости $L(S)$ необходимо и достаточно, чтобы из соотношений $(0, r) = (0, a) \cap (0, b)$, $(0, s) = (0, a) * (0, b)$, $(r, c) = (s, c)$ вытекало $a = b$. Л. А. Скорняков

1288. Независимость некоторых дистрибутивных законов в булевых алгебрах. Скотт (The independence of certain distributive laws in Boolean algebras. Scott Dana), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, № 1, 258—261 (англ.)

Доказана теорема: Для всякого регулярного кардинального числа α существует полная булева алгебра, (β, γ)-дистрибутивная для каждого $\beta < \alpha$ и каждого γ, но не (α, α)-дистрибутивная (реф. 1289).

Требуемая алгебра строится как алгебра всех регулярных открытых множеств некоторого топологического пространства. Ю. А. Шиханович

1289. Более высокие ступени дистрибутивности и полнота в булевых алгебрах. Смит, Тарский (Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras. Smith E. C., Jr., Tarski Alfred), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, № 1, 230—257 (англ.)

Пусть α, β, γ — кардинальные числа. Булева алгебра A называется α-полной, если сумма любого множества элементов из A, мощность которого не превосходит α, существует. Булева алгебра A называется (α, β)-дистрибутивной, если в произведении не больше чем α сомножителей, каждый из которых является суммой не больше чем β элементов из A, при дополнительном предположении существования некоторых сумм и произведений всегда можно „раскрыть скобки". Для конечных α и β булева алгебра всегда α-полна и (α, β)-дистрибутивна. В статье изучаются α-полные и (α, β)-дистрибутивные булевы алгебры для бесконечных α, β. § 2 посвящен (α, β)-дистрибутивности. Доказаны теоремы: каждая $(\alpha, 2)$ - дистрибутивная булева алгебра (α, α)-дистрибутивна; каждая $(\alpha, 2)$-дистрибутивная 2^α-полная булева алгебра $(\alpha, 2^{(\alpha)})$-дистрибутивна; если β-сингулярное сильно предельное кардинальное число, то каждая β-полная булева алгебра, (α, β)-дистрибутивная для каждого $\alpha < \beta$, (β, β)-дистрибутивна, но существует β-полная булева алгебра, (α, α)-дистрибутивная для каждого $\alpha < \beta$, но не (β, β)-дистрибутивная; для булевой алгебры эквивалентны атомность и (α, α)-дистрибутивность для любого α.

В § 3 изучается α-полнота идеалов в булевых алгебрах. Даются достаточные условия для вложения α-полного идеала α-полной булевой алгебры в α-полный простой идеал. Доказываются достаточные условия α-полноты идеалов; например, если α слабо недостижимо (weakly attainable) от β, то β-полный простой идеал α-полной булевой алгебры является и α-полным. Рассматриваются связи между булевыми алгебрами и телами множеств. Доказана теорема: если α слабо недостижимо от β и $\alpha > \beta$, то существует $2^{(\alpha)}$-полная (α, α)-дистрибутивная булева алгебра, не изоморфная никакому β-полному телу множеств.

В § 4 изучается полнота фактор-алгебр булевых алгебр. Даются достаточные условия полноты. Из теоремы о том, что фактор-алгебра счетнополной булевой алгебры не может быть счетной, следует решение проблемы Дилсуорса: никакая счетная булева алгебра не является гомоморфным образом полной атомной булевой алгебры. Понятия полноты прилагаются к теории меры на булевых алгебрах. Доказано, что фактор-алгебра счетнополной булевой алгебры по идеалу тех элементов, для которых мера равна 0, полна. Даются некоторые достаточные условия несуществования счетноаддитивной меры на фактор-алгебре полной булевой алгебры по счетнополному идеалу. Ю. А. Шиханович

1290. Несколько замечаний о топологиях, определяемых на структуре. Гуань Чжао-Чжи (Kwang Chao-chin), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 4, 662—669 (кит; рез. франц.)

Доказаны теоремы: 1. Для того чтобы всякий замкнутый идеал структуры L был пересечением главных идеалов, необходимо и достаточно, чтобы в L существовала единица. 2. В полной структуре идеал является замкнутым тогда и только тогда, когда он замкнут в топологии упорядоченности или в интервальной топологии. 3. Всякий идеал структуры L является главным тогда и только тогда, когда L полна и выполняется свойство A: Из равенства $a = \bigvee_{\alpha \in I} a_\alpha$, где $a, a_\alpha \in L$,

вытекает существование такого конечного подмножества J множества I, что $a = \vee_{\alpha \in J} a_\alpha$. 4. Для того чтобы элемент a структуры L был изолированной точкой в топологии упорядоченности, необходимо и достаточно, чтобы для a выполнялось свойство A и двойственное ему. Таким образом решаются 21 (а) и 24 проблемы Биркгофа (Биркгоф, Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952). Содержание работы пересекается со статьей С. А. Когана (РЖМат, 1957, 2120). Л. А. Скорняков

1291. Исправления к работам о расширениях алгебраических систем. Сёда (Berichtigungen zu den Arbeiten über die Erweiterungen algebraischer Systeme. Shoda Kenjiro), Osaka Math. J., 1957, **9**, № 2, 239—240 (нем.)

Поправки к работам автора (Osaka Math. J., 1952, **4**, 133 — 144; РЖМат, 1956, 8633). Л. М. Глускин

1292. Арифметические расширения реляционных систем. Тарский, Вот (Arithmetical extensions of relational systems. Tarski Alfred, Vaught Robert L.), Compositio math., 1957, **18**, № 2, 81—102 (англ.)

Статья относится к теории моделей (РЖМат, 1956, 3597). Фиксируем специю (класс всех подобных) Ξ реляционных систем и стандартную теорию T, соответствующую этой специи. Все реляционные системы (или короче — системы), о которых будет говориться ниже, берутся из специи Ξ, все формулы — из теории T. Если система $\mathfrak{R}$ является подсистемой системы $\mathfrak{S}$, мы будем систему $\mathfrak{S}$ называть расширением системы $\mathfrak{R}$. Две системы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ называются арифметически эквивалентными, если каждое высказывание (формула без свободных переменных), истинное в одной из этих систем, истинно и в другой. Для любого множества A через A^ω обозначим множество стабилизирующихся последовательностей $x = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ из A^ω, т. е. множество $\{x \in A^\omega \mid (\exists m)(\forall n)[n \geqslant m \to x_n = x_m]\}$. Основным понятием, изучающимся в статье, является впервые в ней вводимое понятие арифметического расширения. Система $\mathfrak{S}$, являющаяся расширением системы $\mathfrak{R} = \langle A, R_0, \ldots, R_\zeta, \ldots \rangle$, называется ее арифметическим расширением, если любой $x \in A^\omega$ удовлетворяет любой формуле Φ в системе $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет ей в системе $\mathfrak{S}$. Из определений тривиально следует, что две изоморфные системы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ арифметически эквивалентны и что, если система $\mathfrak{S}$ является арифметическим расширением системы $\mathfrak{R}$, то системы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ арифметически эквивалентны.

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 изучаются общие свойства арифметических расширений, устанавливается несколько критериев для того, чтобы одна система была арифметическим расширением другой. Например, система, являющаяся расширением системы $\mathfrak{S} = \langle B, S_0, S_1, \ldots, S_\zeta, \ldots \rangle$, $\mathfrak{R} = \langle A, R_0, R_1, \ldots, R_\zeta, \ldots \rangle$, тогда и только тогда является ее арифметическим расширением, когда для любого кортежа $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ элементов из A системы $\langle B, S_0, S_1, \ldots, S_\zeta, \ldots, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ и $\langle A, R_0, R_1, \ldots, R_\zeta, \ldots; a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ арифметически эквивалентны. Для любого $x = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in A^\omega$, натурального k и $a \in A$ обозначим через $x\left(\frac{k}{a}\right)$ результат замены в x k-го члена на a. Таким образом, $x\left(\frac{b}{a}\right) = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, a, x_{k+1}, \ldots \rangle$.

Приведем еще один критерий. Для того чтобы система $\mathfrak{S}$, являющаяся расширением системы $\mathfrak{R} = \langle A, R_0, R_1, \ldots, R_\zeta, \ldots \rangle$, была ее арифметическим расширением, необходимо и достаточно, чтобы для любой формулы Φ, любого натурального k и любого $x \in A^{(\omega)}$ из того, что x удовлетворяет формуле $(\exists v_k)\Phi$ в системе $\mathfrak{S}$, следовало существование такого $a \in A$, что $x\left(\frac{b}{a}\right)$ удовлетворяет формуле Φ в системе $\mathfrak{S}$. Доказывается критерий для того, чтобы одна система была арифметическим расширением системы, изоморфной другой системе. Затем строятся три примера, показывающие неэквивалентность ренее введенных понятий. Система $\langle \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, < \rangle$ является изоморфным, но не арифметическим расширением системы $\langle \{1,2,3, \ldots\}, < \rangle$. Обозначим через $W(\alpha)$ множество порядковых чисел, меньших чем α. Система $\langle W(\omega \cdot \eta), < \rangle$ является арифметически эквивалентным расширением системы $\mathfrak{R}' = \langle W((\omega + \omega^* + \omega) \cdot \eta), < \rangle$, но не является арифметическим расширением никакой системы, изоморфной системе $\mathfrak{R}'$. Каждая из систем $\mathfrak{R}'' = \langle W(\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \eta), < \rangle$, $\mathfrak{S}'' = \langle W(\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \eta + \omega^* + \omega), < \rangle$ является арифметическим расширением системы, изоморфной другой системе, но сами системы $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{S}''$ не изоморфны.

В § 2 понятие арифметического расширения применяется к теореме Левенгейма-Сколема. Доказываются две теоремы, из которых вытекает следующее обобщение теоремы Левенгейма-Сколема: Для всякой реляционной системы $\mathfrak{R}$ бесконечной мощности $\mathfrak{a}$ и не более чем счетного порядка и каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{b}$ существует система $\mathfrak{S}$ такая, что $\mathfrak{R}$ является арифметическим расширением системы $\mathfrak{S}$ в случае $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{S}$ является собственным арифметическим расширением системы $\mathfrak{R}$ в случае $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$.

§ 3 посвящен алгебрам, обобщенным алгебрам (реляционным системам, в которых каждое отношение является операцией, но не обязательно всюду определено) и конкретным алгебраическим системам. Устанавливается, чисто алгебраическое достаточное условие для того, чтобы одна система была арифметическим расширением другой: для того чтобы система $\mathfrak{S} = \langle B, S_0, S_1, \ldots, S_\zeta, \ldots \rangle$, являющаяся расширением системы $\mathfrak{R} = \langle A, R_0, R_1, \ldots, R_\zeta, \ldots \rangle$, была ее арифметическим расширением, достаточно, чтобы для всякого конечного подмножества A' множества A и всякого $b \in B$ существовал автоморфизм f системы $\mathfrak{S}$ такой, что $f(a') = a'$ для каждого $a' \in A'$ и $f(b) \in A$. Для произвольного эквационального класса K алгебр доказано, что всякие две K-свободные алгебры с бесконечным числом образующих арифметически эквивалентны. Для произвольного коммутативного кольца $\mathfrak{C}$ всякие два кольца полиномов над $\mathfrak{C}$ с бесконечным числом неизвестных арифметически эквивалентны. Для произвольного поля $\mathfrak{C}$ всякие два чисто трансцендентные расширения бесконечной системы арифметически эквивалентны.

В конце без доказательства сформулированы теоремы: всякое вещественно замкнутое поле является арифметическим расширением любого своего вещественно замкнутого подполя; каждое алгебраически замкнутое поле является арифметическим расширением любого своего алгебраически замкнутого подполя. Указано еще несколько приложений к конкретным реляционным системам. Ю. А. Шиханович

1293. Несколько общих теорем о прямых произведениях и их приложения в теории моделей. Чжан Чженьчжун. (Some general theorems on direct products and their applications in the theory of models. Chang Chen-Chung), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 592—598; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 592—598 (англ.)

Статья непосредственно примыкает к работе Тарского (РЖМат, 1956, 3597) и использует ее понятия и символику. Доказываются две теоремы о прямых произведениях произвольных реляционных систем даже,

быть может, с бесконечноместными операциями. Эти теоремы применяются затем для характеристики эквациональных классов алгебр.

Теорема 1. Пусть K — класс подобных реляционных систем с конечноместными отношениями порядка α, а γ — бесконечное кардинальное число, большее, чем α. Тогда $S_\gamma P(K) \subseteq ISP_\gamma(K)$.

Теорема 5. Пусть K — класс подобных алгебр с конечноместными операциями порядка α, а γ — бесконечное кардинальное число, большее, чем α. Тогда $K \in EC_\Delta$ в том и только в том случае, когда:

1) $(\forall \mathfrak{A} \in A)\,[S_\gamma(\mathfrak{A}) \leqslant S(K) \to \mathfrak{A} \in K]$,

2) $H(K) \cap A \subseteq K$,

3) $P_\gamma(K) \subseteq K$

(A — класс всех алгебр, подобных алгебрам из K).

Теоремы 4, 8 подобны теоремам 1, 5, но относятся к реляционным системам и алгебрам с, возможно, бесконечноместными отношениями и операциями. При доказательстве всех теорем, в отличие от указанной выше статьи Тарского, не используются метаматематические методы. Ю. А. Шиханович

1294. Теорема о простых кардинальных алгебрах. Кларк (A theorem on simple cardinal algebras. Clarke A. B.), Michigan Math. J., 1955—1956, 3, № 2, 113—116 (англ.)

Алгебраическая система (РЖМат, 1956, 3597) $\mathfrak{A} = \langle A, +, \Sigma \rangle$, где $+$ бинарная операция, а Σ — операция ранга ω, называется кардинальной алгеброй, если она удовлетворяет семи аксиомам. Первые 5 устанавливают, что Σ — обобщение операции $+$, что существует нулевой элемент 0 и что обе операции коммутативны и ассоциативны.

Аксиома VI. Если $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$, то существуют такие элементы c_{ij} $(i,\ j = 1, 2, \ldots)$, что $a_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}$, $b_j = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ij}$ для всех $i,\ j = 1, 2, \ldots$

Аксиома VII. Если $a_i = a_{i+1} + b_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то существует такой элемент a, что $a_n = a + \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Если положить $a \leqslant b_{\mathrm{Df}} = (\exists x \in A)\,[b = a + x]$, множество A превратится в частично упорядоченное множество. Подмножество B множества A называется идеалом кардинальной алгебры $\mathfrak{A}$, если множество B замкнуто относительно операции Σ и из $b \in B$, $a \leqslant b$ следует $a \in B$. Кардинальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется простой, если она не имеет нетривиальных идеалов. Обозначим $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ через $\infty \cdot a$, если $a_i = a$ $(i = 1, 2, \ldots)$. До сих пор известны 4 примера простых кардинальных алгебр: алгебра D неотрицательных действительных чисел, замкнутая добавлением элемента-символа ∞, и 3 ее подалгебры: алгебра N неотрицательных целых чисел, замкнутая добавлением элемента-символа ∞, двухэлементная алгебра $\{0, \infty\}$ и тривиальная алгебра $\{0\}$. Автор доказывает теорему: Всякая простая кардинальная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, +, \Sigma \rangle$ такая, что из $a < \infty \cdot b$ следует существование натурального n, удовлетворяющего неравенству $a \leqslant n \cdot b$, изоморфна подалгебре алгебры D. Ю. А. Шиханович

1295. Идеалы и их строение в классах операциональных алгебр. Фостер (Ideals and their structure in classes of operational algebras. Foster Alfred L.), Math. Z., 1956, 65, № 1, 70—75 (англ.)

Статья относится к теории алгебраических систем или алгебр (РЖМат, 1956, 3597), которые автор называет универсальными или операциональными алгебрами.

Классическая теорема о строении идеалов в булевых алгебрах гласит: В булевой алгебре каждый неединичный идеал является пересечением содержащих его простых идеалов (Stone M. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, 40, 37—111). Автор обобщает эту теорему на произвольные (почти) алгебры.

Фиксируем специю Ξ. В алгебре $\mathfrak{A} = \langle A, 0_1, 0_2, \ldots \rangle \in \Xi$ операции o_i называются основными, все операции, которые могут из них быть получены подстановкой, — производными. Тождество $f(\varsigma, \ldots) = g(\varsigma, \ldots)$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется строгим (strict), если f и g — производные операции. Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, 0_1, 0_2, \ldots \rangle \in \Xi$ называется функционально строго полной, если для любого натурального k любая функция типа $A^k \to A$ (т. е. функция с областью определения в A^k и с областью значений в A) является производной операцией алгебры $\mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, 0_1, 0_2, \ldots, \rangle \in \Xi$ называется тривиальной, если $A = 1$. Нетривиальная функционально строго полная алгебра $\mathfrak{A} \in \Xi$ называется основной (primal). Идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ называется основным, если фактор-алгебра $\mathfrak{A}/I$ основная.

Пусть $\mathfrak{P}$ — фиксированная алгебра специи Ξ. Алгебра $\mathfrak{A} \in \Xi$ называется $\mathfrak{P}$-алгеброй (или алгеброй с ядром $\mathfrak{P}$), если в $\mathfrak{A}$ остаются тождествами все строгие тождества алгебры $\mathfrak{P}$.

Автор доказал теоремы: Пусть $\mathfrak{A}$ — $\mathfrak{P}$-алгебра, где $\mathfrak{P}$ — основная алгебра. Тогда: 1) Если I — основной идеал алгебры $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}/I \simeq \mathfrak{P}$; 2) Идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является основным, когда он максимальный. 3) Если $\mathfrak{A}$ — нетривиальная алгебра, то она имеет хотя бы один основной идеал. 4) Каждый неединичный идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ является пересечением содержащих его основных идеалов.

Затем эти теоремы обобщаются. Пусть $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ — фиксированные алгебры специи Ξ. Алгебра $\mathfrak{A} \in \Xi$ называется $\{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k\}$-алгеброй, если в $\mathfrak{A}$ остаются тождествами все строгие тождества алгебры $\mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_k$. Пусть $\mathfrak{A}$ — $\{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k\}$-алгебра, где $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ — строго независимые основные алгебры. Тогда: 1) Если I — основной идеал алгебры $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}/I \simeq \mathfrak{P}_i$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant k)$; 2) Идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является основным, когда он максимальный; 3) Если $\mathfrak{A}$ — нетривиальная алгебра, то она имеет хотя бы один основной идеал; 4) Каждый неединичный идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ является пересечением содержащих его основных идеалов.

В доказательстве некоторых теорем используется аппарат прямых и подпрямых разложений.

Ю. А. Шиханович

1296. О конечности свободных (универсальных) алгебр. Фостер (On the finiteness of free (universal) algebras. Foster Alfred L.), Proc. Amer. Math. Soc. 1956, 7, № 6, 1011—1013 (англ.)

Статья относится к теории алгебраических систем или алгебр (РЖМат, 1956, 3597), называемых у автора также и универсальными алгебрами.

Фиксируем специю Ξ. Обозначим через Σ множество алгебр этой специи, а через $T(\Sigma)$ формальную логическую теорию, соответствующую классу Σ. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторое множество тождеств из $T(\Sigma)$. Алгебра $\mathfrak{A} \in \Sigma$, являющаяся моделью для $\mathfrak{S}$, называется точной моделью, если любое тождество алгебры $\mathfrak{A}$ является логическим следствием множества $\mathfrak{S}$. Обозначим через $\mathfrak{F}_k(\mathfrak{S})$ свободную алгебру с k образующими, определенную множеством $\mathfrak{S}$. Через $\mathfrak{A}^k$ обозначим k-ю прямую степень алгебры $\mathfrak{A}$.

Автором доказано: Если множество тождеств $\mathfrak{S}$ имеет точную и функционально строго полную (реф. 1295)

модель $\mathfrak{P}$, то $\mathfrak{F}_k(\mathfrak{S}) \simeq \mathfrak{P}^{n^k}$, где n — мощность алгебры $\mathfrak{P}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{F}_k(\mathfrak{S})$ — конечная алгебра мощности n^{n^k} и что (теорема 3), если $\mathfrak{P}$ — основная алгебра мощности n, а $\mathfrak{F}_k[\mathfrak{P}]$ — свободная $\mathfrak{P}$-алгебра с k образующими, то тогда $\mathfrak{F}_k[\mathfrak{P}] \simeq \mathfrak{P}^{n^k}$. При специальном выборе ядра $\mathfrak{P}$ получаются следствия для свободных булевых алгебр, свободных p-колец, свободных алгебр Поста и т. п. Указывается, что теорема 3 может быть обобщена на свободные $\{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k\}$-алгебры.
Ю. А. Шиханович

1297. Прямые, подпрямые разложения и конгруэнции. Хасимото (Direct, subdirect decompositions and congruence relations. Hashimoto Junji), Osaka Math. J., 1957, **9**, № 1, 87—112 (англ.)

Рассматриваются произвольные универсальные алгебры (т. е. алгебраические системы) и изучаются связи между прямыми и подпрямыми разложениями этих алгебр и их конгруэнциями. Пусть $\Theta(A)$ — полная, непрерывная сверху структура всех конгруэнций алгебры A. Множество S из $\Theta(A)$ называется вполне перестановочным, если для всякого подмножества $\{\theta_\nu\} \subseteq S$ и всякой системы элементов x_ν, удовлетворяющих условию $x_\lambda \equiv x_\mu (\varphi_\lambda \cup \varphi_\mu)$, где $\varphi_\lambda = \cap_{\nu \neq \lambda} \theta_\nu$, существует такой элемент $x \in A$, что $x \equiv x_\nu (\theta_\nu)$. Пусть, далее, Ω — некоторое множество индексов, L — идеал в булевой алгебре 2^Ω, A_ω, $\omega \in \Omega$ — множество однотипных алгебр. Тогда L-ограниченным прямым объединением $\Pi_L A_\omega$ называется всякая такая подалгебра S полного прямого объединения данных алгебр, что если $x = \{x_\omega; \omega \in \Omega\}$, $y = \{y_\omega; \omega \in \Omega\}$ и $x \in S$, то $y \in S$ тогда и только тогда, если $\{\omega; x_\omega \neq y_\omega\} \in L$. Частными случаями этой конструкции будут полное прямое объединение (случай $L = 2^\Omega$) и конечно-ограниченные прямые объединения (L состоит из всех конечных подмножеств множества Ω).

Устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми L-ограниченными прямыми разложениями алгебры A и некоторыми, обладающими специальными свойствами подструктурами структуры $\Theta(A)$. Отсюда выводится результат: Если в алгебре A взято множество конгруэнций θ_ω, $\omega \in \Omega$, то A тогда и только тогда разлагается в полное прямое объединение своих фактор-алгебр по этим конгруэнциям, если 1) $\bigcap_{\omega \in \Omega} \theta_\omega = 0$, 2) $\left(\bigcap_{\omega \neq \eta} \theta_\omega\right) \cup \theta_\eta = 1$, 3) множество $\left\{\bigcap_{\omega \in M} \theta_\omega; M \in 2^\Omega\right\}$ вполне перестановочно.

Конечно-ограниченные прямые разложения алгебры A взаимно однозначно соответствуют таким замкнутым подструктурам Σ структуры $\Theta(A)$, которые содержат 0 и 1, являются булевыми алгебрами и все конгруэнции в Σ перестановочны. Приводятся также некоторые условия для того, чтобы два таких разложения алгебры с одноэлементной подалгеброй были изоморфными и чтобы алгебра с одноэлементной подалгеброй допускала такое разложение с неразложимыми множителями.

Если в алгебре A все конгруэнции перестановочны, то A тогда и только тогда разлагается в конечно-ограниченное прямое объединение простых алгебр, если $\Theta(A)$ является структурой с дополнениями. Если при этом A содержит одноэлементную подалгебру, то все такие разложения изоморфны. Для алгебры A с дистрибутивной структурой конгруэнций доказано существование общего продолжения для любых двух прямых разложений $A = \Pi_X A_\xi = \Pi_Y A_\eta$, где X, Y являются идеалами соответственно в булевых алгебрах 2^Ξ, 2^H. Так как конгруэнции в структуре составляют дистрибутивную структуру, то полученные результаты применяются к прямым разложениям полных структур и структур с относительными дополнениями. А. Г. Курош

1298. Нервные системы. Скорняков Л. А., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 233—234

1299. О классах моделей с операцией порождения. Мальцев А. И. Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 5, 738—741

Фиксируем некоторую специю (класс всех подобных) Ξ моделей (терминологию см. РЖМат, 1956, 3597; термин „модель" равнозначен термину „реляционная система") $\mathfrak{A} = \langle A, \{P_t\}_{t \in T} \rangle$ с конечноместными отношениями. Все классы моделей, о которых будет говориться дальше, берутся из этой специи и предполагаются абстрактными, т. е. включающими, наряду с любой моделью, все ей изоморфные. Модели, входящие в класс K, названы K-моделями. Автор берет стандартную теорию Q, соответствующую специи Ξ.

Класс моделей K называется псевдоаксиоматизируемым, если он обладает двумя свойствами: 1) если каждая конечная часть некоторого множества высказываний Γ теории Q выполняется в какой-нибудь K-модели, то и все множество Γ выполняется в некоторой K-модели; 2) для каждого кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует такое кардинальное число $\mathfrak{n}$, что для всякой K-модели $\mathfrak{A} = \langle A, \{P_t\}_{t \in T} \rangle$ и всякого подмножества $S \subseteq A$ мощности $\mathfrak{m}$ существует K-подмодель $\mathfrak{B} = \langle B, \{P_t\}_{t \in T} \rangle$ модели $\mathfrak{A}$ такая, что $B = \mathfrak{n}$ и $S \subseteq B$.

Если класс моделей K аксиоматизируем, то он псевдоаксиоматизируем. В специи $\{\langle A \leqslant \rangle\}$ класс всех упорядоченных множеств предельных мощностей псевдоаксиоматизируем, но не аксиоматизируем. Доказывается достаточное условие для того, чтобы псевдоаксиоматизируемый класс был аксиоматизируемым.

Класс моделей K называется классом с натуральными порождениями, если пересечение любой системы K-подмоделей произвольной K-модели $\mathfrak{A}$ либо пусто, либо является K-подмоделью модели $\mathfrak{A}$.

Основная теорема: Для того чтобы псевдоаксиоматизируемый класс был аксиоматизируемым, достаточно, чтобы он был классом с натуральными порождениями; причем в этом случае он аксиоматизируем с помощью только аксиом в форме Сколема (теорема 2).

Указывается, что если класс моделей K аксиоматизируем с помощью универсальных аксиом и аксиом вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_m)(\exists y_1) \ldots (\exists y_n)(\forall z_1) \ldots (\forall z_n)(\forall u_1) \ldots (\forall u_n)(\forall v_1) \ldots (\forall v_n)\,[\mathfrak{L}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \,\&\, [\mathfrak{L}(z_1, \ldots, z_m, u_1, \ldots, u_n) \,\&\, \mathfrak{L}(z_1, \ldots, z_m, v_1, \ldots, v_n) \to u_1 = v_1 \,\&\, \ldots \,\&\, u_n = v_n]],$$

то он является классом с натуральными порождениями (часть теоремы 3).

В конце изучается обобщение понятия натурального порождения. Пусть τ — подмножество множества T. Подмодель $\mathfrak{L} = \langle B, \{P_t\}_{t \in T} \rangle$ модели $\mathfrak{A} = \langle A, \{P_t\}_{t \in T} \rangle$ называется τ-замкнутой в $\mathfrak{A}$, если из истинности

$$P_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha}, y) \text{ для } \alpha \in \tau,\ x_i \in B\ (i = 1, 2, \ldots, n_\alpha)$$

следует $y \in B$. Класс моделей K называется классом с τ-порождениями, если пересечение любой системы замкнутых K-подмоделей произвольной K-модели $\mathfrak{A}$ либо пусто, либо является K-подмоделью модели $\mathfrak{A}$. Дается достаточное условие для того, чтобы класс моделей был классом с τ-порождениями.
Ю. А. Шиханович

1300. Характеристика арифметических классов. Мыцельский (A characterisation of arithmetical classes. Myçielski Jan), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 11, 1025—1027, LXXXVI (англ.; рез. русск.)

Статья относится к теории моделей (РЖМат, 1956, 3597). Фиксируем специю (класс всех подобных) реляционных систем. $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{M} = \langle X, \{R_t\}_{t\in T}\rangle\}$ и соответствующую формальную логическую теорию Q. Предикаторы теории Q обозначим через $P_t\,(t\in T)$. Множество всех высказываний теории Q обозначим через A. Высказывание π называется высказыванием типа $\sigma = \langle T_0, \langle m_1,...,m_k\rangle, \langle n_1,...,n_k\rangle\rangle$ (T_0 — конечное подмножество множества T, $m_i, n_i\,(i = 1,2,...,k)$, k — целые числа, $k\geqslant 1$, $m_1, m_k\geqslant 0$, $m_i\geqslant 1$ $(i = 2,3,...,k)$, $n_i\geqslant 1\,(i = 1,2,...,k-1)$, если

$$\pi = (\forall x_{11})...(\forall x_{1m_1})(\exists y_{11})...(\exists y_{1n_1})(\forall x_{21})...$$
$$(\forall x_{2m_2})\quad (\exists y_{21})...(\exists y_{2n_2})...(\forall x_{k1})...(\forall x_{km_k})(\exists y_{k1})...$$
$$(\exists y_{kn_k})\alpha,$$

где α — формула без кванторов, содержащая предикаторы P_t только для $t\in T_0$ и имеющая свободные переменные только из списка: $x_{11},...x_{1m_1}, x_{21},...,x_{2m_2},...,x_{k1}, ...,x_{km_k}, y_{11},...,y_{1n_1}, y_{21},...,y_{2n_2},...,y_{k1},...,y_{kn_k}$.

Множество всех высказываний $\pi\in A$ типа σ обозначим через A_σ.

Для произвольного класса $\mathfrak{K}$ реляционных систем и множества K высказываний обозначим;

$$K(\mathfrak{K}) = \{\pi\in K \mid (\forall\mathfrak{M}\in\mathfrak{K}) \quad [\mathfrak{M} \text{ — модель для } \pi]\},$$

$$\mathfrak{K}(K) = \{\mathfrak{M}\in\mathfrak{K} \mid (\forall\pi\in K) \quad [\mathfrak{M} \text{ — модель для } \pi]\}.$$

Без доказательства приводятся три теоремы. Теорема 1 дает критерий того, что для двух классов $\mathfrak{K}, L$ реляционных систем и некоторого типа σ выполняется „включение" $A_\sigma(\mathfrak{K})\subseteq A_\sigma(L)$. Теорема 2 дает критерий того, что между двумя классами $\mathfrak{K}, L$ реляционных систем такими, что $\mathfrak{K}\subseteq L$, и некоторым множеством высказываний K выполняется отношение $\mathfrak{K} = L(K)$ (Класс $\mathfrak{K}$ называется в этом случае арифметическим в широком смысле относительно L (в символах; $\mathfrak{K}\in AC_\Delta(L)$) или элементарно определимой частью класса L). Теорема 3 дает критерий того, что между двумя реляционными системами $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и некоторым σ выполняется отношение $A_\sigma(\mathfrak{M}) = A_\sigma(\mathfrak{N})$ (Если для двух данных реляционных систем $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и любого σ выполняется отношение $A_\sigma(\mathfrak{M}) = A_\sigma(\mathfrak{N})$, системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются арифметически эквивалентными или элементарно неразличимыми). Ю. А. Шиханович

1301. Прямые разложения в алгебраических категориях. Курош А. Г., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 3, 239—240

1302. Точные категории и двойственность. Буксбаум (Exact categories and duality. Buchsbaum D. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 1, 1—34 (англ.)

Ряд результатов книги Картана и Эйленберга (РЖМат, 1956, 6427), относящихся к категориям модулей над кольцами, переносится на аксиоматически определенные точные категории. Точная категория является классом объектов, причем со всякой упорядоченной парой объектов A, B связана абелева группа, элементы которой называются отображениями A в B. Эти понятия подчинены естественной системе аксиом, из которых вытекает, в частности, возможность говорить об ядре, коядре, образе и кообразе отображения; можно ввести, следовательно, понятия точной последовательности, мономорфизма и эпиморфизма. Вводится также понятие категории, градуированной при помощи некоторой абелевой группы. Двойственный характер аксиом, входящих в определение точной категории, позволил сформулировать для этих категорий некоторую теорему двойственности.

В работе обобщены на случай точных категорий такие понятия гомологической алгебры, как понятия дифференцирования, цикла и т. д., понятие комплекса, связанной последовательности ковариантных функторов, а также проективности и инъективности объектов, точного функтора, сателлитов и производных функторов. Основные свойства этих понятий при этом сохраняются.

Из приложений построенной теории отметим замечания о свойствах категории компактных абелевых групп — о проективных и инъективных объектах этой категории и др.,—вытекающих из понтрягинской теории двойственности. А. Г. Курош

1303 К. Строение колец. Джейкобсон (Structure of rings. Jacobson Nathan (Colloquium Publs, Amer. Math. Soc., 37). Providence, R. I., 1956, vii, 263 pp., ill.) (англ.)

Монография, посвященная в основном изучению ассоциативных колец при полном или частичном отказе от классического условия минимальности для односторонних идеалов. Книга содержит десять глав: Радикал и полупростота. Неприводимые модули и примитивные кольца. Кольца с условием минимальности. Примитивные кольца с минимальными односторонними идеалами. Кронекеровские произведения. Вполне приводимые модули; Теория Галуа для кольца линейных преобразований. Тела. Нильидеалы и простые идеалы; Структурные пространства. Применения.

В гл. 1 определяются основные для дальнейшего понятия примитивного кольца, полупростого кольца и радикала кольца в смысле автора. Всюду эти понятия рассматриваются с точки зрения теории представления или, что то же самое, с точки зрения теории модулей. Кольцо A называется примитивным, если оно обладает точным неприводимым A-модулем. Пусть A — произвольное кольцо и I — множество всех неприводимых A-модулей. Тогда ядро множества I называется радикалом кольца A. Если I точно, то A называется полупростым. Всякое полупростое кольцо есть подпрямая сумма примитивных колец. Доказывается, что данное выше определение радикала совпадает с известным определением радикала Джейкобсона как максимального квазирегулярного идеала кольца.

В гл. 2 доказывается теорема плотности о неприводимых модулях, являющаяся обобщением классической теоремы Бернсайда о неприводимых матричных алгебрах. Показывается, что теорема плотности допускает простую топологическую формулировку, если в множестве линейных преобразований векторного пространства ввести конечную топологию. В конце главы рассматриваются некоторые следствия из теоремы плотности.

Результаты первых двух глав используются в гл. 3, где изучаются кольца с условием минимальности для правых идеалов. Даются простые доказательства известной теоремы Веддербарна—Нётер о строении простых колец с условием минимальности и теоремы Веддербарна — Артина о представлении классического полупростого кольца в виде конечной прямой суммы полных матричных колец над телами. Наконец, рассматриваются полученные за последнее время результаты о существовании идемпотентных элементов в произвольных кольцах.

В гл. 4 изучаются примитивные кольца с минимальными правыми идеалами — естественное обобщение матричных колец. Основная теорема, доказанная в этой главе, дает характеристику примитивных колец с минимальными идеалами как некоторых колец непрерывных линейных преобразований. Для ее доказательства автор использует дуальные векторные пространства. Топология в данном векторном пространстве задается с по-

мощью дуального ему векторного пространства. В начале главы рассматривается также теория вполне приводимых модулей. Частными случаями этой теории являются теория цоколя кольца и теория линейных пространств. Последняя играет существенную роль при изучении примитивных колец с минимальными односторонними идеалами.

В гл. 5 дается определение кронекеровского произведения для модулей и алгебр. Рассматриваются подробно кронекеровские произведения простых алгебр, примитивных алгебр и радикальных алгебр.

В первой половине гл. 6 доказывается теорема плотности для вполне приводимых модулей, являющаяся обобщением теоремы плотности для неприводимых модулей. Показывается, что при довольно общих предположениях изучение вполне приводимых модулей и их централизаторов сводится к изучению колец линейных преобразований некоторого векторного пространства. Далее излагается теория Галуа автоморфизмов кольца линейных преобразований некоторого векторного пространства. Полученные результаты обобщают теорию Галуа для полей и содержат теорию централизаторов простых подалгебр в простом кольце с условием минимальности.

В гл. 7 делается попытка дать обоснование общей теории тел, которые могут быть алгебрами бесконечного ранга над своими центрами. Сначала рассматривается конечная теория Галуа тел и бесконечная внешняя теория Галуа (обобщение результатов Крулля для полей). Нужно заметить, что бесконечная внешняя теория Галуа, к сожалению, не содержит результатов конечной теории Галуа. Далее рассматривается теорема Веддербарна о коммутативности конечного тела и следующее ее обобщение: если тело Δ — алгебраическое над некоторым конечным полем, то Δ — коммутативно. Доказывается также результат Капланского о том, что если в теле Δ для любого элемента ξ существует такое натуральное число $n(\xi)$, что $\xi^{n(\xi)} \in \Phi$ (Φ — центр Δ), то Δ коммутативно. Наконец, доказывается следующая общая теорема в подтелах: Пусть Δ — некоторое тело, а L и M — два таких подтела в Δ, что Γ есть централизатор M, а M — централизатор Γ. Тогда, если E — подтело, инвариантное относительно всех внутренних автоморфизмов, определяемых ненулевыми элементами из M, то либо $E \subseteq \Gamma$, либо $E \supseteq M$. Из этого результата как следствие сразу вытекает теорема Картана-Брауэра-Хуа (Cartan-Brauer-Hua): единственные подтела тела Δ, инвариантные относительно всех внутренних автоморфизмов тела Δ суть Δ и подполя центра Φ тела Δ.

В гл. 8 изучаются ниль-идеалы в произвольных кольцах. Доказывается теорема Левицкого, что в кольце K с условием максимальности для правых идеалов всякий правый нильидеал является нильпотентным. Рассматривается радикал Бэра и локально нильпотентный радикал Левицкого. Доказывается, что радикал Бэра есть пересечение всех простых идеалов кольца.

Гл. 9 посвящена структурным пространствам, т. е. топологическим пространствам, точки которых суть примитивные идеалы. Примитивные идеалы — это такие идеалы, фактор-кольца по которым примитивны. В коммутативном случае всякий примитивный идеал — максимален. Топология в множестве примитивных идеалов вводится так же, как и в множестве примитивных идеалов (стоуновская топология). Доказываются теоремы о представлении некоторых колец в виде колец непрерывных функций на подходящих структурных пространствах (обобщение известной теоремы Стоуна о реализации булевых колец в виде непрерывных функций).

В последней главе рассматриваются некоторые применения общих результатов о строении колец, полученных в предыдущих главах. Доказывается теорема Херстейна о том, что если для любого элемента x кольца K существует такое натуральное число $n(x) > 1$, что $x^{n(x)} - x \in Z$ где Z — центр кольца, то K — коммутативно. Далее изучаются алгебры с полиномиальным тождеством (*PI*-алгебра), являющиеся естественным обобщением коммутативных алгебр. Доказывается, что всякая ниль-*PI*-алгебра локально нильпотентна. Наконец, рассматривается проблема Куроша о локальной конечности алгебраической алгебры. В этом направлении доказывается следующая основная теорема: Пусть A — алгебраическая алгебра, причем 1) A/π — есть *PI*-алгебра для всякого примитивного идеала π; 2) радикал (Джейкобсона) всякого гомоморфного образа алгебры A есть *PI*-алгебра. Тогда A локально конечна.

В конце книги помещена подробная библиография по ассоциативным кольцам за 1944—1955 гг. Монография является удачной попыткой подвести итог серии работ в теории ассоциативных колец; она богата интересным и новым материалом, который можно найти только в журнальной литературе. В. А. Андрунакиевич

См. также: 1201, 1424, 1536, 1702, 1938, 1939, 1979, 2072

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

1304. О конечных покрытиях сферической поверхности. **Демария** (Sui ricoprimenti finiti della superficie sferica. Demaria Davide Carli), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis,. mat. e natur., 1956, **20**, № 2, 185—192 (итал.)

Рассматриваются конечные покрытия метрической двумерной сферы радиуса 1 при помощи n замкнутых множеств. Через $\upsilon(n)$ обозначается нижняя грань максимального диаметра элементов таких покрытий. В дополнение к полученным Сегре значениям $\upsilon(1) = \upsilon(2) = \upsilon(3) = \pi$; $\upsilon(4) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ автор находит значения $\upsilon(5) = \frac{2\pi}{3}$, $\upsilon(6) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\upsilon(8) = \frac{\pi}{2}$, а также оценки $\upsilon(10) \geqslant \arccos\frac{1}{3}$, $\upsilon(14) \geqslant \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\upsilon(22) \geqslant \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$. Оценки снизу для найденных и оцененных значений вытекают из следующей доказанной здесь теоремы: если $P_1, \ldots, P_n (n \geqslant 3)$ — n различных точек сферы и $d(n) = \min(P_r, P_s)$ $(r, s = 1, \ldots, n;\ r \neq s)$, то $\upsilon(n+2) \geqslant d(n)$. В качестве вспомогательного результата, который автор отмечает как аналог известной теоремы Люстерника — Шнирельмана — Борсука, доказывается, что для любого конечного замкнутого покрытия сферы либо найдется точка, принадлежащая одновременно трем элементам покрытия, либо один из элементов покрытия содержит две диаметрально проти-

воположных точки. Приводится пример, показывающий, что в случае счетного множества элементов покрытия этого уже нельзя утверждать. М. Ф. Бокштейн

1305. Косое объединение симметрично расположенных узлов. Хасидзумэ, Хосакава (On symmetric skew unions of knots. Hashizume Yoko, Hosokawa Fujitsugu), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 2, 87—91 (англ.)

В статье содержится дополнение результатов Киносита, Терасака (РЖМат, 1959, 184.) Вычисляется полином Александера в случае косого объединения симметрично расположенных узлов. Результат из-за громоздкости не приводится. В. К. Белов

1306. Значение основы графа для построения композиционных баз некоторых подграфов. Коциг (Význam kostry grafu pre konštrukciu kompozičných báz istých čiastočných grafov. Kotzig Anton), Mat.-fyz. časop., 1956, **6**, № 2, 68—77 (словац.; рез. русск.)

Основой связного графа называется всякое максимальное дерево, являющееся подграфом этого графа. Каждому ребру основы S графа G однозначно отвечает окружность графа G, содержащая это ребро, но не содержащая остальных ребер основы. Система всех таких окружностей называется фундаментальной системой окружностей графа G по отношению к основе S. Композиционной базой системы $\mathfrak{S} = \{G_1,...,G_n\}$ подграфов графа G называется всякая такая подсистема $\mathfrak{S}'$ этой системы, что любой элемент G_i системы $\mathfrak{S}$ получается композицией, т. е. сложением по модулю 2 некоторых графов подсистемы $\mathfrak{S}'$, тогда как сами элементы подсистемы $\mathfrak{S}'$ линейно независимы по модулю 2, т. е. никакой из них не получается композицией каких-либо остальных. Как известно, каждая фундаментальная система окружностей конечного связного графа G является композиционной базой системы всех окружностей графа G (например, Kŏnig D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936, стр. 61, 147). Автор приводит необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная система окружностей связного конечного графа G, образующая композиционную базу системы всех окружностей графа G, была фундаментальной системой окружностей графа G по отношению к некоторой основе S, и определяет число таких основ. Далее автор занимается так называемыми разрезами связного графа G, которые представляют собой минимальные подграфы G' графа G, обладающие тем свойством, что после удаления всех ребер из G' нарушается связность графа G. Оказывается, что каждому ребру h какой-либо основы S графа G отвечает один и только один разрез графа G, содержащий ребро R и уже никакого иного из ребер основы S. Эту систему разрезов (при фиксированной S) автор называет фундаментальной системой разрезов графа G. Он показывает, что каждая фундаментальная система разрезов является композиционной базой множества всех разрезов графа G. Затем он высказывает необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная система разрезов, образующая композиционную базу множества всех разрезов графа G, была фундаментальной системой разрезов по отношению к некоторой основе, и определяет число таких основ. Оказывается, что если число превышает 1, то в графе G существует двуугольник. M. Fiedler

1307. Теоретико-множественная характеристика тора. Танака (A set-theoretical characterization of the torus. Tanaka Tadashi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1957, **A21**, № 2, 119—124 (англ.)

Приведены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы локально связный, компактный, метрический континуум являлся тором. Р. Л. Фрум-Кетков

1308. Об орбитальных топологиях. Чэн Цин-минь (Cheng C. M.), Шусюэ цзиньчжань, 1956, **2**, № 4, 663—666 (кит.)

Пусть S — произвольное множество. Решается задача, поставленная Эллисом (РЖМат., 1954, 1592). Для всякого $x \in S$ определено семейство подмножеств $D(x)$ так, что $y \in D(x) \Rightarrow D(y) \subset D(x)$. Если $O(x) = xUD(x) \setminus \setminus \{x_1...x_n\}$, $x_\alpha \neq x$ — произвольная окрестность x, то полученное пространство, которое назовем S_D, будет T_1-пространством. В частности, если f_i, $i = 1,2,3,...,$ — взаимно однозначные отображения и если определить $D(x)$ так, что $y \in D(x)$, тогда, когда $y = xg_1...g_m$, $g_\alpha \in \{f_i, f_i^{-1}\}$, то пространство $S\{f_i, f_i^{-1}\}$ является пространством S_D. В этой нетривиальной топологии любое $g \in \{f_i, f_i^{-1}\}$ будет непрерывным. Лю Чун-хо

1309. О мощности бикомпактных пространств и первой аксиоме счетности. Мрувка (On the potency of compact spaces and the first axiom of countability. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 1, 7—9 (англ.; рез. русск.)

Доказывается, что всякое бикомпактное хаусдорфово пространство, не имеющее точек счетного веса, имеет мощность $\geqslant 2^{\aleph_1}$.

Как следствия выводятся: 1. Непустое замкнутое подмножество типа G_δ хаусдорфова бикомпактного пространства, не содержащее точек счетного веса, имеет мощность $\geqslant 2^{\aleph_1}$. 2. Каждое непустое замкнутое множество типа G_δ, содержащееся в $\beta X \setminus X$, где X — вполне регулярное пространство и βX — чеховское расширение пространства X, имеет мощность $\geqslant 2^{\aleph_1}$. 3. Каждое несчетное бикомпактное хаусдорфово пространство мощности $< 2^{\aleph_1}$ содержит несчетное множество точек счетного веса. В работе под компактным пространством понимается бикомпактное пространство, причем неявно предполагается, что оно хаусдорфово. И. В. Проскуряков

1310. О непрерывности и предельных значениях функций. Гал (On the continuity and limiting values of functions. Gál István S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **86**, № 2, 321—334 (англ.)

Напоминаются известные понятия фильтра (Mc Shane E. J., Amer. Math. Monthly. 1952, **59**, 1 — 11) и равномерной структуры (Bourbaki N., Topologie générale, Chapitre II, Paris, Hermann et Cie., 1940).

Фильтром $\mathfrak{F}$ во множестве X называется непустое семейство подмножеств из X такое, что: 1) если $F_1 \in \mathfrak{F}$, $F_1 \subseteq F_2$, то $F_2 \in \mathfrak{F}$, 2) если $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, то $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$, 3) если $F \in \mathfrak{F}$, то F непусто.

Система $\mathfrak{B}$ непустых подмножеств из X называется базой фильтра, если из $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ следует, что существует множество $B \in \mathfrak{B}$ такое, что $B \subseteq B_1 \cap B_2$. Семейство F всех подмножеств F и X, которые содержат хотя бы одно $B \in \mathfrak{B}$, является фильтром в X, порожденным базой $\mathfrak{B}$. Если фильтр $\mathfrak{F}$ имеет счетную базу, то говорят, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Равномерной структурой $\mathfrak{U}$ на множестве V называется фильтр в произведении $V \times V$ такой, что: I) если $V \in \mathfrak{U}$, то $\Delta \subseteq \mathfrak{B}$, II) если $V \in \mathfrak{U}$, то $V^{-1} \in \mathfrak{U}$, III) если $V \in \mathfrak{U}$, то существует $W \in \mathfrak{U}$ такое, что $W \circ W \subseteq V$. Здесь Δ обозначает диагональ произведения $V \times V$, V^{-1} — множество всех пар (y_2, y_1) таких, что $(y_1, y_2) \in V$, $W \circ W$ — множество тех пар (y_1, y_3), для которых существует $y_2 \in V$ такое, что $(y_1, y_2) \in W$ и $(y_2, y_3) \in W$. Если окрестностью точки $y \in V$ назовем множество всех точек τ_i, для которых пара $(y, \tau_i) \in V$, где $V \in \mathfrak{U}$, то равномерная структура $\mathfrak{U}$ определяет топологию на множестве V, которая называется равномерной топологией.

Топология $\mathfrak{I}$ на множестве A называется совершенной, если каждое несчетное подмножество $A^* \subseteq A$ имеет точку накопления, принадлежащую A^*.

Пусть $\mathfrak{A}$ — несчетное множество индексов α, причем на $\mathfrak{A}$ введена совершенная топология $\mathfrak{I}$. Пусть далее на множестве X даны две системы фильтров $\varphi' = \{\mathfrak{F}^1_\alpha\}$ и $\varphi^2 = \{\mathfrak{F}^2_\alpha\}$. Мы говорим, что система φ^1 обладает свойством P относительно φ^2 и топологии $\mathfrak{I}$, если для каждого $F^1{}_{\alpha_0} \in \mathfrak{F}^1{}_{\alpha_0}$ существует окрестность N_{α_0} точки α_0 такая, что каждое $\mathfrak{F}^2_\alpha$, где $\alpha \in N_{\alpha_0}$ и $\alpha \neq \alpha_0$, содержит множество $F^2_\alpha \subseteq F^1_{\alpha_0}$. Доказано несколько свойств точек непрерывности и предельных значений функции f, отображающей множество X в множество Y, причем переход к пределу в X и Y определяется топологиями, заданными равномерными структурами. В частности исследуются вопросы, возникающие в случае, когда в X задано несколько способов предельного перехода (обобщение правого и левого предела функции на прямой). В качестве примера приведем первый из этих результатов: Пусть A—несчетное подмножество X. Элементы A будем обозначать через x. Предположим, что x содержится в каждом множестве $F^2_x \in \mathfrak{F}^2_x$ для каждого $x \in A$. Пусть система фильтров φ^1 обладает свойством P относительно φ^2 и совершенной топологии $\mathfrak{I}$ множества A, и пусть равномерная структура U^Y, данная на Y, удовлетворяет первой аксиоме счетности. Тогда множество тех точек $x \in A$, на которых отображение f множества X в множество Y непрерывно относительно $\mathfrak{F}^1{}_x$ и разрывно относительно $\mathfrak{F}^2{}_x$, является счетным. И. В. Проскуряков

1311. Поправка к статье об изолированных множествах. **Албукерки** (Corresçao a introduzir num artigo sobre os conjuntos inolados. Albuquerque Luis M. d e), Rev. Fac. ciênc. Univ. Coimbra, 1954, 23, 56—59 (порт.)

Отмечается ошибка, допущенная автором в предыдущей работе (Las Ciencias, Madrid, 1952, 17, № 4, 639—655), состоящая в утверждении эквивалентности условия $h(X) \cap h(Y) \subset X \cap Y \cap h(X \cup Y)$ для произвольных множеств X, Y пространства типа V (РЖМат, 1958, 189) условию $h(X) \subset h(Y)$ для множеств $X \subset Y$, где $h(A)$ означает множество изолированных точек множества A. Предлагается принять это последнее условие за новую аксиому, чтобы для таких V-пространств доказанные автором предложения остались верными. Однако в действительности все они становятся тавтологией, ибо приведенное условие, как нетрудно видеть, означает, что пространство состоит из изолированных точек. Бессодержательность утверждений автора к тому же видна сразу, ибо их формулировки используют такие действия, как, например, взятие объединения некоторой системы подмножеств данного множества, включающей все его одноточечные подмножества. М. Ф. Бокштейн

1312. Некоторые свойства пространства множеств LC^n. **Куратовский** (Quelques propriétés de l'espace des ensembles LC^n. Kuratowski K.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 967—974 LXXXI (франц.; рез., русск.)

Пусть A — компакт; Q_{n+1}, где $n \geqslant -0$ шар $x_1{}^2 + \ldots + x^2{}_{n+1} \leqslant 1$; S_n — сфера $x_1{}^2 + \ldots + x^2{}_{n+1} = 1$; при этом Q_0 состоит из точки 0, S_{-1} — пустое множество; f — непрерывное отображение сферы S_n в множество A, f^*— непрерывное отображение шара Q_{n+1} в множество A.

(1) Компакт A называется локально связным в размерности $\leqslant n$ в гомотопическом смысле в точке p, если для какого бы ни было $t > 0$, найдется $u > 0$ такое, что всякая функция $f \in A^{S_n}$, для которой $\delta[p \cup f(S_n)] < u$ допускает распространение $f^* \in A^{Q_{n+1}}$ такое, что $f^*(0) = p$ и $\delta[p \cup f^*(Q_{n+1})] < t$. Множество A называется локально связным в размерности n (сокращенно LC^n), если это свойство имеет место в каждой его точке.

Если Y — полное пространство, то $LC^n(Y)$ обозначает семейство всех компактных подмножеств типа LC^n. Чтобы рассматривать это семейство множеств как топологическое пространство, условимся, что бесконечная последовательность его элементов $A_1 A_2 \ldots$ сходится к A,

$$A_i \underset{n}{\to} A,$$

когда эта последовательность сходится в смысле Хаусдорфа, и что эта последовательность равномерно LC^n, т. е. что всякому $t > 0$ можно поставить в соответствие $u > 0$ (не зависящее от индекса i) так, что условие (1) выполнено для всех $i = 1, 2 \ldots, f$ пробегает пространства $A_i{}^{S^m}$ и f^* — пространства $A_i{}^{Q^{m+1}}$.

Обозначим через $a^n_A(t)$ верхнюю грань чисел $u \leqslant t$, удовлетворяющих условию (1).

Определим функцию $b^n_A(t)$ формулами

$$b^{-1}_A(t) = a^{-1}_A(t) = t \quad \text{и} \quad b^n_A(t) = b^{n-1}_A\left[\frac{1}{4} a^n_A(t/4)\right].$$

Пусть A — компакт LC^n, $\mathfrak{X}$ — метрическое пространство со счетной базой и F — (непустое) замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{X}$, для которого $(\mathfrak{X} \setminus F) \leqslant n+1$, тогда каждому $t > 0$ соответствует $v > 0$ такое, что условие (1) будет выполнено, если подставить v вместо u, F вместо S_m и $\mathfrak{X}$ вместо Q_{m+1}.

Теорема 1. В предположениях, сделанных относительно $A, \mathfrak{X}, F$ и t, всякая функция $f \in A^F$ такая, что

$$\delta f \leqslant b^n_A(t)$$

допускает распространение $f^* \in A^{\mathfrak{X}}$ такое, что $\delta f^* \leqslant t$.

Следствие. Если $A_i \underset{n}{\to} A$, то каждому $t > 0$ соответствует $v > 0$ такое, что каково бы ни было метрическое пространство $\mathfrak{X}$ со счетной базой и замкнутое подмножество F пространства $\mathfrak{X}$, где $\dim(\mathfrak{X} \setminus F) \leqslant n+1$, всякая функция $f \ni A^F_i$, причем $\delta f < v$ допускает распространение $f^* \in A^{\mathfrak{X}}_i$, такое, что $\delta f^* \leqslant t$.

Теорема 2. Пусть в пространстве $LC^n(Y)$, где Y полно, $B_i \underset{n}{\to} A$; $\mathfrak{X}$ — совершенное пространство размерности $\leqslant n+1$ и f — непрерывное отображение пространства $\mathfrak{X}$ на A, $f(\mathfrak{X}) = A$. Тогда существует последовательность непрерывных отображений g_i, равномерно сходящаяся к f, таких, что $g_i(\mathfrak{X}) = B_i$, i пробегает целые положительные значения, начиная с i_0 (эта теорема дает положительный ответ на вопрос, поставленный (для $n = 0$) П. С. Александровым. Обратная теорема не имеет места).

Следовательно, для всякого $A \in LG^n(Y)$ всякому $\varepsilon > 0$ соответствует в пространстве $LC^n(Y)$ окрестность $\mathfrak{G}$ множества A такая, что всякое подмножество B этой окрестности может быть представлено в виде $B = g(\mathfrak{X})$, где $|g \setminus f| < \varepsilon$.

Следствие 1. Если множество $A \in LC^n(Y)$ является совершенным и имеет размерность $m \leqslant n+1$, то всякому $\varepsilon > 0$ соответствует в пространстве $LC^n(Y)$ окрестность $\mathfrak{G}$ множества A такая, что всякое множество $\mathfrak{G}B$ из может быть получено из A непрерывным

отображением g таким, что $|g(x) \setminus x| < \varepsilon$, какова бы ни была $x \in A$.

Следствие 2. Если выполнены условия предыдущего следствия, то существует окрестность множества A в $LC^n(Y)$, состоящая исключительно из множеств размерности $\geqslant m$. А. С. Пархоменко

1313. О полноте равномерных пространств. Хан Хен Гон, Чосон Мунчучуы Инмин Конхвагук Квахаквои хакпо, 1956, № 4, 8—25 (кор.)

В статье имеются существенные ошибки.

Ким Кё Сек

1314. Замечание к теории абсолютных окрестных экстензоров метрического пространства. Кодама (Note on an absolute neighborhood extensor for metric spaces. Kodama Yukihiro), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 3, 206—215 (англ.)

Пусть X — топологическое пространство и $\{A_\alpha\}$ — замкнутое покрытие X. Пространство X имеет слабую топологию относительно $\{A_\alpha\}$, если имеют место следующие условия:

1) теоретико-множественная сумма множеств любой подсистемы $\{A_\beta\}$ системы $\{A_\alpha\}$ есть замкнутое множество в X;

2) любое подмножество суммы $U_\beta A_\beta$, пересекающееся с каждым из множеств A_β по замкнутому множеству, замкнуто в $U_\beta A_\beta$.

Доказывается следующее обобщение теоремы Борсука (Borsuk K., Fundam. math., 1932, 19, 220—243): Пусть X — топологическое пространство, имеющее слабую топологию относительно замкнутого покрытия $\{A_\alpha\}$. Предположим, что для каждой конечной подсистемы $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ с непустым пересечением множество $\cap_{i \in n} A_{\alpha_i}$ является ANE (абсолютным окрестностным экстензором) метрического пространства. Тогда X есть ANE метрического пространства.

Лемма 1. Пусть X — топологическое пространство, имеющее слабую топологию относительно замкнутого покрытия $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in A$, и Y — метрическое пространство Пусть f — непрерывное отображение Y в X. Пусть $Y_\alpha = f^{-1}(A_\alpha)$, $\alpha \in A$. Тогда существует замкнутое покрытие $\{B_\alpha / \alpha \in A\}$ пространства Y, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $B_\alpha \subset Y_\alpha$, $\alpha \in A$, 2) $\{B_\alpha | \alpha \in A\}$ локально конечно.

Лемма 2. Пусть Y — метрическое пространство, B — замкнутое множество, $\{B_\alpha | \alpha \in A\}$ — локально конечное покрытие B. Тогда существует замкнутая окрестность F множества B и локально конечное замкнутое покрытие $\{F_\alpha | \alpha \in A\}$ множества F, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $F_\alpha \cap B = B_\alpha$, $\alpha \in A$, 2) $\{F_\alpha | \alpha \in A\}$ подобно $\{B_\alpha | \alpha \in A.\}$

Лемма 3. Пусть Y — топологическое пространство, B — замкнутое множество в Y и F — замкнутая окрестность B. Кроме того, $\{F_\alpha | \alpha \in A\}$ — локально конечное покрытие множества F. Предположим, что для каждого α существует замкнутая окрестность C_α множества $F_\alpha \cap B$ в F_α. Тогда $C = U\{C_\alpha | \alpha \in A\}$ есть замкнутая окрестность B в Y. А. Д. Тайманов

1315. Замечание к теореме о метризуемости пространства. Нагата (Note on a theorem for metrizability. Nagata Jun-iti), Proc. Japan Acod., 1957, 33, № 10 613—615 (англ.)

Теорема. Для того чтобы T_1-пространство X было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы каждая $p \in X$ имела такой базис $\{V_n(p)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и для любых p, n, $p \in X$ существовали $m = \alpha(p, n)$ $l = \beta(p, n)$ такие, что: I. из $p \in V_m(q)$ следует $V_m(q) \subseteq V_n(p)$, II. из $p \in V_l(p)$ следует $p \in V_n(q)$.

Следствие: Для того чтобы T_1-пространство X было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $p \in X$ существовал такой базис $\{V_n(p); n = 1, 2, \ldots\}$, что для любого множества $A \subset X$ имело место равенство $\bigcap_{n=1}^{\infty} (U_{p \in A} V_n(p)) = \overline{A}$.

А. Д. Тайманов

1316. О характеризации дифференцируемых многообразий со счетной базой. Бобок (Sur la caractérisation des variétés différentiables à base dénombrable. Boboc N.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, 24, № 4, 391—395 (франц.)

Доказывается, что дифференцируемое многообразие, допускающее положительно определенную риманову метрику класса C^p ($p \geqslant 1$), метризуемо, содержит счетное, плотное в нем множество и обладает счетной базой. А. Л. Онищик

1317. Континуум V^p — усиление понятия канторова многообразия. Александров (Die Kontinua V^p — eine Verschärfung der Cantorschen Mannigfaltigkeiten. Alexandroff Paul), Monatsh. Math., 1957, 61, № 1, 67—76 (нем.)

Автор называет континуумом V^p компакт C, удовлетворяющий следующему условию: Для любых двух непересекающихся подкомпактов C_1 и C_2, каждый из которых содержит внутренние точки относительно C, существует такое $\sigma > 0$, что для любого компакта $B \subset C \setminus (C_1 \cup C_2)$, разделяющего C_1 и G_2 в C, $\alpha^{p-2} B > \sigma$. (Через $\alpha^r \varphi$ обозначается r-мерный поперечник компакта φ, т. е. нижняя грань таких α, что существует α-сдвиг φ в r-мерный компакт). Класс континуумов V^p является топологически инвариантным классом и меньше класса p-мерных канторовых многообразий, так как в работе приведен пример канторова многообразия, в котором два подкомпакта C_1 и C_2, содержащие каждый внутренние точки, могут быть разделены компактом сколь угодно малого диаметра.

Доказана теорема: Пусть компакт C, лежащий в n-мерном евклидовом пространстве E^n, зацеплен в открытом шаре U^n с q-мерным циклом Z^q. Тогда компакт $\overline{C \cap U^n}$ является континуумом V^{n-q-1}.

Отсюда следует, что любой p-мерный компакт содержит континуум V^p, что является усилением известной теоремы Гуревича-Тумаркина о том, что любой p-мерный компакт содержит p-мерное канторово многообразие. В заметке приведен ряд задач.

Р. Л. Фрум-Кетков

1318. Толпы, деревья и неподвижные точки. Уорд (Mobs, trees, and fixed points. Ward L. E., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 798—804 (англ.)

Толпа S (РЖМат, 1956, 2958) называется монотонной, если умножение является монотонной функцией, т. е. если множество пар (a, b) таких, что ab связно в $S \times S$ для всякого $x \in S$. Вводя некоторым образом частичную упорядоченность, автор доказывает, что S есть частично упорядоченное топологическое пространство (РЖМат, 1955, 3112), если S — идемпотентная коммутативная толпа. Условие для того, чтобы в S был элемент e, предшествующий всем остальным, является бикомпактность $L(x) = \{a : a \leqslant x\}$. Бикомпактное хаусдорфово пространство называется обобщенным деревом, если оно допускает частичную упорядоченность, удовлетворяющую 1), 2), 3) (РЖМат, 1956, 1189) и 4*); любое связное под

множество Y содержит e. Строится пример обобщенного дерева, не являющегося локально связным. Доказываются следующие факты: Обобщенное дерево является наследственно уникогерентный континуумом. Обратно, наследственно уникогерентный континиуум, допускающий частичную упорядоченность с e, удовлетворяющую условию непрерывности и плотности, есть обобщенное дерево, а если еще и локально связный, то просто дерево. Показывается, что для обобщенного дерева верна теорема о существовании неподвижной точки. А. С. Пархоменко

1319. Выпуклость локально связного обобщенного континуума. Томинага, Танака (Convexification of locally connected generalized continua. Tominaga Akira, Tanaka Tadashi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A19**, № 2, 301—306 (англ.)

Обобщенным континуумом называется связное локально компактное метрическое пространство со счетной базой. Метрика $d(x, y)$ пространства R называется выпуклой, если для всяких двух точек $p, q \in R$ найдется точка $r \in R$ такая, что

$$d(p, r) = d(q, r) = d(p, q)/2.$$

Дуга pq называется отрезком, если она изометрична отрезку прямой.

Модифицируя методы Бинга, авторы доказывают, что всякий локально связный обобщенный континуум имеет выпуклую метрику и каждые две его точки могут быть соединены отрезком. А. С. Пархоменко

1320. Некоторые свойства некомпактных пеановских пространств. Томинага (On some properties of non-compact Peano spaces. Tominaga Akira), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, **A19**, № 3, 457—467 (англ.)

Локально связный обобщенный континуум называется пеановским пространством (реф. 1319).

Пусть $\mathfrak{U}$ — последовательность областей $U_1 U_2 \ldots$ такая, что $U_{i+1} \subset U_i$, $\bigcap_{i+1}^{\infty} = p$; $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$ — последовательность связных множеств $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$, где C_j — компонента множества $U_j \setminus p$. В $[\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}]$-системе всех последовательностей $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$ определим отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: если $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}} = \{C_1 \supset C_2 \supset \ldots\}$ и $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}' = \{C_1' \supset C_2' \supset \ldots\}$, то $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}'$ тогда и только тогда, когда для всякого n существует m такое, что $C'_m \subset C_n$. В силу этого отношения эквивалентности все $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$ разбиваются на непересекающиеся классы $\mathfrak{B}$. Мощность множеств $\mathfrak{B}$ называются степенью пространства R в точке p и обозначается через $D(R, p)$. Под степенью пеановского пространства R автор принимает кардинальное число $D(R^* \xi)$, где $R^* = RU\xi$ — бикомпактное пространство, полученное из R присоединением точки ξ в смысле Александрова. Если R бикомпактно, то его степень считается равной нулю.

Дуга α с концами p, q называется отрезком, если она изометрична с замкнутым интервалом действительной прямой R^1. Прямая линия есть открытая дуга, замкнутая в R, каждая поддуга которой является отрезком.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием того, чтобы пеановское пространство R было не бикомпактно, является существование в R полуоткрытой дуги, замкнутой в R, имеющей конец в произвольной точке пространства R.

Теорема 3. Пусть R — локально бикомпактное выпуклое метрическое пространство. Если $D(R) \geqslant 2$, то в R существует прямая линия.

Теорема 4. Всякое пеановское пространство R имеет выпуклую ограниченную метрику, в которой пространство обладает свойством S, т. е. при любом $\varepsilon > 0$. R может быть представлено как сумма конечного числа связных множеств, каждое из которых имеет диаметр $< \varepsilon$.

Под деревом автор понимает пеановское пространство, не содержащее простой замкнутой линии. Если дерево бикомпактно, то автор называет его ациклической кривой (дендритом).

Лемма. Всякое дерево стягиваемо.

Теорема 5. Если R — просто связное пеановское пространство, и R^{**} — фрейденталевская бикомпактификация пространства R, то R^{**} сохраняет простую связность пеановского пространства.

Метрика $\rho(x, y)$ пространства R называется распространением метрики $\sigma(x, y)$ подпространства M, если $\rho(x, y) = \sigma(x, y)$ на M.

Теорема 6. Пусть M — замкнутое подмножество пеановского пространства R и $\sigma(x, y$ — выпуклая метрика, определенная на M). Тогда существует выпуклая метрика $\rho(x, y)$ на R, которая является распространением метрики $\sigma(x, y)$. Если метрика σ ограничена, то и метрика $\rho(x, y)$ может быть выбрана ограниченной. В статье имеются опечатки. А. С. Пархоменко

1321. Понятие простой дуги в теории множеств. Кассина (La nozione di arco di linea nella teoria degli insiemi. Cassina Ugo). Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), **25**, 73—92 (итал.; рез. англ.)

После вступительных определений и примеров, относящихся к понятиям простой дуги, связности и неприводимой связности множеств, дается не использующее аксиомы Цермело доказательство известной теоремы Леннеса о том, что всякое неприводимо связное между двумя своими точками замкнутое множество есть простая дуга (Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937, § 31, 3, VI). Это доказательство, воспроизводящее доказательство из более ранней работы автора, состоит в эффективизации обычного доказательства указанной теоремы. М. Ф Бокштейн

1322. К вопросу о разбиении на классы, поставленному Бингом. Баррет (On a question concerning partitioning raised by R. H. Bing. Barrett Lida K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 3, 602—603 (англ.)

Вопрос, поставленный Бингом, состоит в следующем (Bing R. H., Bull. Amer. Math Soc., 1952, **58**, 536—556): Существует ли такое натуральное число n, что для любой непрерывной кривой M, любого положительного числа ε, любой пары непересекающихся замкнутых подмножеств H и K множества M и любого конечного подмножества $R \subset M$, точки которого принадлежат дугам диаметра $< \varepsilon$ кривой M, пересекающимся с $H \cup K$, найдутся два семейства A_H и A_K дуг диаметра $< n\varepsilon$, покрывающих вместе все множество R и таких, что каждый элемент семейства A_H пересекается с H и не пересекается с K, каждый элемент семейства A_K пересекается с K и не пересекается с H, и элементы A_H не пересекаются с элементами A_K?

Положительный ответ на этот вопрос имел бы значение для исследований Бинга и реабилитировал бы результаты Мойза (Moise E. E., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 1111—1112; Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 838). Бинг показал, что для значения $n = 1$ ответ на вопрос будет отрицательным. В настоящей статье приводится пример, показывающий, что ответ будет отрицательным и при $n = 3$. В качестве кривой M берется некоторый конечный граф с подходяще выбранной метрикой. Указывается, что метрику можно было бы выбрать и так, чтобы кривая помещалась в трехмерном евклидовом пространстве. М. Ф. Бокштейн

1323. О возможности представления несущественных отображений в себя в виде суперпозиции. Берштейн (On the factorizability of maps of S^n into S^n. Berstein I.), Fundam. math., 1958, **45**, № 2, 138—142 (англ.)

Автором доказана следующая теорема: Не существует такого n-мерного паракомпактного пространства X_n, $n \geqslant 2$, что непрерывное отображение S^n в S^n несущественно тогда и только тогда, когда φ представимо в виде $\varphi = \varphi_2 \varphi_1$, где φ_1 — отображение S^n в X_n и φ_2 X_n в S^n соответственно.

Это является ответом на задачу Борсука (Borsuk K., Ann., Soc. polon. math., 1952, **25**, 268—272), который поставил вопрос о возможности факторизации несущественных отображений S^n в себя через E^n и решил ее для $n = 2$. Р. Л. Фрум-Кетков

1324. Вполне непрерывные движения в топологических векторных пространствах. Майкл (Completely continuous movements in topological vector spaces. Michael J. H.), Pros. Glasgow Matn. Assoc., 1957, **3**, № 3, 135—141 (англ.)

Пусть E — вещественное выпуклое топологическое векторное пространство с топологией Хаусдорфа, и пусть A — его замкнутое подмножество.

Непрерывное отображение f множества A в E называется вполне непрерывным движением множества A, если $f(x) - x$ вполне непрерывное отображение A в E, т. е. существует компакт K в E такой, что $f(A) \setminus A \subseteq K$.

Устанавливается следующий результат: Если вполне непрерывное движение f удовлетворяет условиям (обозначения см. РЖМат, 1958, 9660):

1) $f\{Fr(A)\}$ и $f\{\mathrm{Int}(A)\}$ не пересекаются,

2) для отображения $f_* = f \mid Fr(A)$ выполнено 1),

то $$f\{Fr(A)\} = Fr\{f(A)\}.$$

Ю. Г. Борисович

1325. Некоторые оценки рода топологического пространства в смысле Красносельского. Шварц А. С., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 209—214

Обобщается понятие рода топологического пространства относительно периодического преобразования, введенного М. А. Красносельским (Успехи матем. наук, 7, № 2, 157—164) и независимо от Ян Чжун-дао (РЖМат., 1956, 274). Автор называет родом топологического пространства X относительно действующей в нем без неподвижных точек группы G наименьшее натуральное число n, для которого в X найдется n замкнутых множеств $A_1, \ldots, A_n$, удовлетворяющих следующим условиям: а) при любом $g \in G$, $g \neq 1$, множество $g(A_i)$ не пересекается с A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$; б) множества $g(A_i)$, $g \in G$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ образуют покрытие пространства X.

Доказывается, что род метрического пространства X относительно группы G равен наименьшему целому числу n, для которого существует допустимое (т. е. перестановочное с преобразованиями из G) отображение X в $(n-1)$-мерный полиэдр, в котором действуе без неподвижных точек та же группа G.

Указаны некоторые гомологические оценки для рода. Понятие рода топологического пространства X относительно действующей в нем без неподвижных точек группы является частным случаем введенного позже автором понятия рода расслоенного пространства (см. реф. 1326). Р. Л. Фрум-Кетков

1326. Род расслоенного пространства. Шварц А. С., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 2, 219—222

Автор называет родом расслоенного пространства (E, B, F, p) (обозначаем $g(E, B, F, p)$) наименьшую мощность открытого покрытия базы B, состоящего из множеств, над каждым из которых существует секущая поверхность.

Приведем некоторые теоремы, доказанные в заметке.

Теорема 1. Род расслоенного пространства не превосходит категории базы. Если пространство „E" стягиваемо, то род равен категории базы.

Теорема 2. Пусть база расслоенного пространства (E, B, F, p) является K-мерным полиэдром, а слой асферичен в размерностях меньших s. Тогда $g(E,B,F,p) < \frac{k+1}{s+1} + 1$.

Следующая теорема дает гомологическую оценку рода расслоенного пространства: Пусть в кольце когомологий $H(B, A)$ базы B расслоенного пространства (E,B,F,p) существует n элементов $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям $p^* x_1 = \ldots = p^* x_n = 0$, $x_1 x_2 \ldots x_n \neq 0$. Тогда $g(E, B, F, p) \geqslant n + 1$. Автор строит для топологической группы G и любого n главное расслоенное пространство $(E_n(G), B_n(G), G, P_n)$, в которое можно допустимо (т. е. перестановочно с преобразованиями из G) отобразить те и только те главные расслоенные пространства с слоем G, род которых $\leqslant n$.

С помощью этой теоремы вычисление рода расслоенного пространства сводится к гомотопической задаче. Приводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы род расслоенного пространства с n-мерной базой был равен $n + 1$. Р. Л. Фрум-Кетков

1327. Произведения квазикомплексов. Брахана (Products of quasi-complexes. Brahana Thomas R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7 „№ 5, 954—958 (англ.)

Доказывается, что произведение двух топологических пространств, являющихся квазикомплексами (Лефшец С., Алгебраическая топология, М., Изд-во ин. лит. 1949, стр. 420), есть квазикомплекс. Н. А. Берикашвили

1328. Теория когомологий комплекса с отображением простого периода и ее применения. Накаока (Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications. Nakaoka Minoru), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1956, **A7**, № 1-2, 51—102 (англ.)

Рассматривается симплициальный комплекс (полиэдр) W с периодическим симплициальным отображением $t : W \to W$ простого периода p(т. е $t^p = 1$), при котором всякий переходящий в себя симплекс состоит из неподвижных точек. Через F обозначается множество неподвижных точек этого отображения, а через W^{-1} — некоторый инвариантный, т. е. переходящий в себя при отображении t подполиэдр полиэдра W. Изучается когомологическая структура пространства траекторий (orbit space) W_t, получающегося из W в результате отождествления каждой точки $x \in W$ с точками $tx, \ldots, t^{p-1}x$. Это изучение основывается на применении последовательности Ричардсона-Смита (см., например, РЖМат, 1957, 7766), гомоморфизмы которой позволяют определить основные отображения в группах когомологий пространства W_t $\mu : H^r(W_t, W_t^1 \cup F_t; G) \to H^{r+2}(W_t, W_t^1 \cup F_t; G)$ и $\nu : H^r(W_t, W_t^1 \cup F_t; G) \to H^{r+1}(W_t, W_t^1 \cup F_t; G)$, отображения φ^* и φ_0^*, связывающие эти группы с группами когомологий пространства W и еще некоторые отображения подобного рода (здесь W_t^1 и F_t — множества пространства W_t, естественно отвечающие множествам W^1 и F). Отображение μ, например, определяется формулой $\mu = I^{*-1} \gamma_\tau \gamma_\sigma I^*$, где γ_ρ $(\rho = \sigma, \tau)$ есть гомоморфизм $\rho H^r(W, W^1; G) \to \rho^{-1} H^{r+1}(W, W^1; G)$ последовательности Ричардсона-Смита, а I^* — естественный изоморфизм между группами $H^r(W_t, W_t^1; G)$ и $\tau^{-1} H^r(W, W^1; G)$. В работе исследуются свойства этих отображений, их взаимосвязь и поведение при применении гомоморфизмов референта, квадратов и приведенных степеней Стинрода и при перемножении классов когомологий по Александеру-Колмогорову.

Полученные результаты применяются к выяснению когомологического строения циклических степеней пространства (полиэдра) X, являющихся пространствами траекторий p-кратных топологических произведений $X \times \ldots \times X$, когда за t принимается циклическая перестановка топологических сомножителей. Они позволяют в) случае простого p) вычислить группы и кольцо кого-

мологий по модулю p для p-й циклической степени полиэдра с заданной когомологической структурой, а также результат применения к их элементам гомоморфизмов референта и квадратов (при $p=2$) или приведенных p-х степеней (при $p>2$) Стинрода, что позволяет также обратно дать определение этих операций Стинрода с помощью построения циклических степеней полиэдра, и также получить их аксиоматическое описание. Еще проще этим же путем получаются формулы для определения групп когомологий циклической степени полиэдра, когда группой коэффициентов служит поле с характеристикой, отличной от p (это значит, очевидно, что для циклической степени получаются формулы для вычисления чисел Бетти и чисел Бетти по простому модулю, которые и приводятся автором). Для циклических степеней некоторых специальных полиэдров X, в частности для случая $X=S^n$, исследованного иным путем Ляо (РЖМат, 1956, 5162), этим уже определяются и целочисленные группы, и даже целочисленное кольцо когомологий (см. также РЖМат, 1957, 7766).

В последней главе автор устанавливает когомологическое строение третьей симметрической степени n-мерной сферы. Ее можно рассматривать как результат двухкратного перехода к пространствам траекторий при периодических отображениях $t:(x,y,z)\to(y,z,x)$ и $s:(x,y,z)\to(y,x,z)$; $(x,y,z)\in S^n$, исходя из топологического произведения $X\times X\times X$, а потому, применяя предыдущие результаты, удается получить ее группы и кольца когомологий mod 2 и mod 3, определить для элементов этих групп квадраты и приведенные степени Стинрода, гомоморфизмы референта, а также найти ее группы когомологий для случая, когда группа коэффициентов является полем с характеристикой, отличной от 2 и 3. Исходя из этих данных, оказывается возможным построить целочисленные группы гомологий третьей симметрической степени S^n, что дает следующий результат: r-мерная группа гомологий содержит бесконечную циклическую компоненту Z при $r=0$, n, а в случае четного n также при $r=2n$, $3n$; циклическую компоненту второго порядка Z_2 при $r=jn+2k$, $j=1,2$, $1\leqslant k\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]$; циклическую компоненту третьего порядка Z_3 при $r=n+4k$, $1\leqslant k\leqslant\left[\frac{2n-1}{4}\right]$; других циклических прямых слагаемых или более одного из вышеуказанных эти группы гомологий не содержат (см. также РЖМат, 1958, 1915). Автор отмечает, что теми же методами можно определить когомологическую структуру четвертой симметрической степени S^n, что связано с разрешимостью симметрической группы четвертой степени.

Если когомологическая структура полиэдра по модулю p при простых p и по рациональным коэффициентам еще не определяет его целочисленных групп когомологий, то автор использует метод, предложенный в работе Накамура (РЖМат, 1958, 209), приводя в добавлении изложение этого метода с помощью теории точных пар Масси (РЖМат, 1954, 2909). Рассматривается точная пара групп когомологий (смешанной размерности)

$$\begin{array}{ccc} H(K;Z) & \xrightarrow{\xi} & H(K;Z). \\ {\scriptstyle\Delta_p}\nwarrow & & \swarrow{\scriptstyle\eta}, \\ & H(K;Z_p) & \end{array}$$

где ξ есть умножение элементов группы на число p, η — естественное проектирование целочисленной группы в группу по модулю p, а Δ_p — гомоморфизм референта, и все производные точные пары от этой пары

$$\begin{array}{ccc} {}_lH(K;Z) & \xrightarrow{l^\xi} & {}_lH(K;Z) \\ {\scriptstyle{}_l\Delta_p}\nwarrow & & \swarrow{\scriptstyle l^\eta}. \\ & {}_lH(KZ_p) & \end{array}$$

Если для всех простых чисел p известны не только группы $H(K,Z_p)$, но и все группы ${}_lH(K,Z_p)$ $(l=1,2,\ldots)$, то из этих данных легко определяется строение целочисленных групп когомологий.

В работе широко используется рассмотрение соответствующих коммутативных диаграмм и точных последовательностей, служащее основным способом доказательств многочисленных лемм и предложений. Автор отмечает, что его результаты получены систематическим применением методов, разработанных Томом, Ву и Ботом. Ошибок в работе мало, в основном это элементарные опечатки. Однако первое из равенств (2, 9) следует исправить на $\alpha_p\varkappa_p=\rho_0{}^*$, где $\rho_0{}^*:H^r(W,W'G;)\to H^r(W,W'\cup F;G_p)$, ибо формула автора годится лишь при $\rho=\tau$. М. Ф. Бокштейн

1329. Произведение обобщенных многообразий. Брахана (Products of generalized manifolds. Brahana Thomas R.), Illinois J. Math., 1958, 2, № 1, 76—80 (англ.)

n-мерным обобщенным многообразием называется локально компактное пространство S, для которого: 1) $\dim S=n$, 2) $p_q(x)=0$ для всех $x\in S$, $q\neq n$, 3) $p_n(x)=1$ для всех $x\in S$, где $p_q(x)$ — локальные числа Бетти пространства S в точке x (РЖМат, 1958, 2807). Доказывается формула $p_t(x,y)=\sum_{r+s=t}p_r(x)\,p_s(y)$, где $x\in S$, $y\in S'$, $(x,y)\in S\times S'$, являющаяся аналогом формулы Кюннета для локальных чисел Бетти. Из этой формулы непосредственно вытекает, что прямое произведение двух обобщенных многообразий S и S' (с одинаковым полем коэффициентов), для которых $\dim(S\times S')=\dim S+\dim S'$, есть обобщенное многообразие. То же самое верно и для косого произведения с базой S и слоем S'. Обратно, если прямое или косое произведение двух локально связных во всех размерностях пространств S и S' является обобщенным многообразием и выполнено вышеуказанное условие для их размерностей, то S и S' сами будут обобщенными многообразиями. М. Ф. Бокштейн

1330. Абстрактная гомотопия. IV. Кан (Abstract homotopy. IV. Kan Daniel M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 8, 542—544 (англ.)

Полусимплициальный (полный) комплекс G автор называет полусимплициальной группой, если для любого n множество G_n всех его n-мерных симплексов является группой (вообще говоря, неабелевой), причем граничные отображения $\varepsilon^i:G_n\to G_{n-1}$ и отображения вырождения $\eta_i^i:G_{n-1}\to G_n$ являются гомоморфизмами. Любая полусимплициальная группа удовлетворяет аксиоме распространения (РЖМат, 1957, 4680) и потому определены гомотопические группы $\pi_n(G,1)$, где 1 — единица группы G_0. Оказывается, что $\pi_n(G,1)$ является n-мерной группой гомологий $H_n(G)$ цепного комплекса G, состоящего из (вообще говоря, неабелевых) групп $G_n=\bigcap_{i=0}^{n-1}\operatorname{Ker}\varepsilon^i$, граничным оператором которого служит гомоморфизм $\varepsilon^n\mid\widetilde{G}_n$.

Любому связному полусимплициальному комплексу K автор относит некоторую полусимплициальную группу G, состоящую из свободных (неабелевых) групп G_n. Образующие группы G_n находятся во взаимно однозначном соответствии с $(n+1)$-мерными симплексами комплекса K, либо не принадлежащими некоторому максимальному дереву $T\subset K$ (понятие дерева для полных полусимплициальных комплексов определяется естественным образом) либо не имеющими вида $\sigma\eta^n$, где $\sigma\in K_n$. Граничные отображения и отображения вырождения определяются на группе G очевидным образом. Основной результат: n-мерная гомотопическая группа $\pi_n(S\mid K\mid)$ геометрической реализации $|K|$ комплекса K естественно изоморфна группе $H_{n-1}(\widetilde{G})$. Кроме того, группа гомологий $H_n(S|K|)$ естественно изоморфна группе $(H_{n-1}\widetilde{A})$.

где $\widetilde{A}$ — фактор-группа группы по ее коммутанту. При этом, как и следует ожидать, гомоморфизму Гуревича $\pi_n(S|K|) \to H_n(S|K|)$ соответствует естественный гомоморфизм $H_{n-1}(\widetilde{G}) \to H_{n-1}(\widetilde{A})$.

В связи с изложенной конструкцией естественно встает вопрос о ее зависимости от выбора дерева T. Оказывается, что изменение выбора этого дерева сводится лишь к изменению систем образующих групп G_n. Доказательство основывается на том, что группу G можно рассматривать как слой некоторого расслоения $B \to K$, где B — некоторый комплекс, n-мерные симплексы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с несократимыми путями (лучше сказать, цепочками) n-мерных симплексов комплекса K. Другими словами, группу G можно рассматривать как группу петель комплекса K. М. М. Постников

1331. Лемма о дифференцируемых отображениях. Том (Un lemme sur les applications différentiables. Thom René), Bol. Soc. mat. mexicana, 1956, **1**, № 2, 59—71 (франц.)

Пусть $L(n, m; q)$ — пространство отображений класса C^q евклидова пространства R^n с координатами $x_1, \ldots, x_n$ в евклидово пространство R^m с координатами $y_1, \ldots, y_m$ (топология в $L(n, m; q)$ определяется близостью класса m на компактах.) Пусть r — натуральное число, меньшее q.

Формулы

$$u_1 = y_1, \ldots, u_m = y_m,$$

$$u_{m+1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots, u_N = \frac{\partial^r y_m}{\partial x_n^r}$$

(охватывающие все частные производные порядков $\leqslant r$) определяют для каждого отображения $f \in L(n, m; q)$ отображение F пространства R^n в евклидово пространство R^N с координатами $u_1, \ldots, u_N$, называемое производным от f. Пусть P^{N-P} — подмногообразие (без особенностей) пространства R^N. Основной результат работы состоит в том, что при достаточно большом q для всякого отображения $f \in L(n, m; q)$ и всякого компакта $K \subset R^n$ существует отображение $g \in L(n, m; p)$, сколь угодно близкое к f в $L(n, m; q)$ и такое, что производное отображение G, рассматриваемое на K, трансверсально (t-регулярно) на P^{N-P}. Эта „лемма о дифференцируемых отображениях" существенно обобщает известную теорему Морса (случай одной функции) и ряд результатов Уитни и автора.

В качестве применения изучаются критические множества отображений, понижающих размерность. Автор возвращается также к ряду проблем, затронутых в его предыдущей работе (РЖМат., 1958, 2808), в частности, к вопросу о гомотопической инвариантности гомологических классов (mod 2) критических циклов отображения многообразия в многообразие. В. А. Рохлин

1332. К теоремам о продолжении деформации. Чжоу Сюэ-гуан (Chow Sho-Kwan), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 2, 233—241 (кит.; рез. англ.)

Автор сообщает следующие теоремы (РЖМат, 1955, 5663): 1) Топологическое произведение конечного или бесконечного числа пространств типа *AHE* есть пространство типа *AHE*. 2) Если линейно связное метрическое пространство X является *AHE*-пространством и к тому же локально стягиваемо в какой-нибудь точке, то оно локально стягиваемо и в любой своей точке. 3) Необходимым и достаточным условием того, чтобы n-мерное линейно связное метрическое пространство со счетной базой было *ANR*, является принадлежность пространства X к классу *AHE* и локальная связность пространства X во всех размерностях в какой-нибудь одной точке. 4) Необходимым и достаточным условием того, чтобы метрическое пространство X со счетной базой было абсолютным ретрактом, является одновременно принадлежность пространства X к классу *AHE* и его стягиваемость.

С другой стороны, автор сообщает о следующих фактах: 1) Для того, чтобы компактный конечномерный *AHE* X был *ANR*, условие локальной стягиваемости пространства X в какой-нибудь точке не является необходимым. 2) Линейно связный конечномерный компакт из класса *AHE* не обязательно является *ANR*-пространством. 3) Бесконечномерный, локально стягиваемый в каждой точке компакт не обязательно *AHE*-пространство. С. С. Рышков

1333. О собственных изоморфизмах (μ, Δ, γ)-систем. Чжан (Chang Su-Cheng). Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 3, 109—114

Bull. Acad. Polon. Sci. cl. 3, 1956, **4**, № 3, 113—118

См. РЖМат, 1957, 7765

1334. Области наложения над комплексными пространствами. Ивахаси (Domains spread on a complex space. Iwahashi Ryosuke), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 4, 452—463 (англ.)

Пусть X, Y — комплексные аналитические пространства. Голоморфное отображение $\varphi: X \to Y$ называется наложением, если оно открыто и если для всякой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность U, что множество $\psi^{-1}(\varphi(x)) \cap U$ дискретно в U. Голоморфное отображение f пространства X в комплексное пространство F называется голоморфно продолжаемым относительно φ, если существует такое голоморфное $f': Y \to F$, что $f = f'\varphi$. Пусть $\varphi: X \to Y$ и $\varphi': X \to Y'$ — два наложения. Говорят, что φ' мажорирует φ, если существует наложение $\Theta: Y \to Y'$ такое, что $\varphi' = \Theta\varphi$. Доказывается следующее утверждение, известное в классическом случае. Пусть φ — наложение пространства X, F_i — семейство комплексных пространств, $f_i: X \to F_i$ — голоморфные отображения. Тогда в множестве тех наложений пространства X, которые мажорируются наложением φ и по отношению к которым все f_i голоморфно продолжаемы, существует элемент, мажорирующий все остальные. А. Л. Онищик

1335. Однородные векторные расслоенные пространства. Ботт (Homogeneous vector bundles. Bott Raoul), Ann. Math., 1957, **66**, № 2, 203—248 (англ.)

Пусть $X = G/U$ — односвязное компактное однородное пространство полупростой комплексной группы Ли G, $\widetilde{\varphi}$ — аналитическое линейное представление группы U в комплексном пространстве E. Аналитическое расслоенное пространство $\mathfrak{P}$ с базой X и слоем E, ассоциированное при помощи $\widetilde{\varphi}$ с расслоением группы G на классы смежности по подгруппе U, называется однородным векторным расслоенным пространством. В пространстве когомологий $H(X, S\mathfrak{P})$ многообразия X с коэффициентами в пучке $S\mathfrak{P}$ ростков аналитических сечений расслоения $\mathfrak{P}$ возникает линейное представление $\widetilde{\Phi}$ группы G. Пусть M — максимальная компактная подгруппа группы G, $V = U \cap M$, φ и Φ — ограничения представлений $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\Phi}$ на группы V и M соответственно. Работа посвящена изучению связи между представлениями φ и Φ.

Пусть $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли группы U, $\mathfrak{B}^c$ — комплексная оболочка алгебры Ли группы V, ψ — неприводимое представление группы M в некотором пространстве W. Определяется представление алгебры $\mathfrak{u}$ в пространстве $\mathrm{Hom}(W, E)$ и доказывается, что кратность, с которой ψ входит в разложение представления Φ на неприводимые компоненты, равна размерности пространства относительных комологий $H(\mathfrak{u}, \mathfrak{B}^c, \mathrm{Hom}(W, E))$. Отсюда следует, что если представление Φ тривиально, то $H(X, S\mathfrak{P}) = H(\mathfrak{u}, \mathfrak{B}^c, E)$. Автор показывает, что Φ тривиально в том случае, когда $\mathfrak{P}$—расслоенное пространство форм типа $(p, 0)$, что позволяет выразить в терми-

нах когомологий алгебр Ли группы когомологий $H^q(X,\Omega^p)$ с коэффициентами в пучке Ω^p ростков голоморфных форм степени p. Вычисляется также эйлерова характеристика пространства X с коэффициентами в пучке $S\mathfrak{P}$, которая оказывается равной 0, если многообразие X не келерово.

Далее рассматривается случай, когда X келерово. Пусть λ—старший вес неприводимого представления φ, g—полусумма положительных корней группы M. Доказывается, что если $(\lambda+g,\alpha)=0$ для какого-нибудь корня α группы M, то представление Φ тривиально. В противном случае представление Φ неприводимо и действует в пространстве $H^q(X,S\mathfrak{P})$, где q—число положительных корней α группы M, для которых $(\lambda+g,\alpha)<0$, причем указывается способ для вычисления старшего веса этого представления. В качестве приложения доказывается, что если X — односвязное однородное келерово многообразие, а Ω — расслоенное пространство касательных к X векторов, то $H^i(X,S\Omega)=0$ для $i\geqslant 1$. Отсюда следует, что если X_t — гладкая деформация аналитической структуры $X=X_0$, то при достаточно малых t структуры X_t и X эквивалентны. А. Л. Онищик

1336. Некоторые замечания о комплексно-аналитических векторных расслоенных пространствах. Рёрль (Einige Bemerkungen über komplexanalytische Vektorraumbündel. Röhrl Helmut), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 360—367 (нем.)

Пусть X — алгебраическое многообразие или голоморфное полное комплексное пространство, $\hat{S}$ — пространство мероморфных сечений некоторого аналитического векторного расслоенного пространства над X с q-мерным слоем, K — поле мероморфных функций на пространстве X. Доказывается, что $\dim_K \hat{S}=q$. Это равенство эквивалентно тому, что всякое аналитическое векторное расслоенное пространство над X возникает из некоторого дивизора на многообразии X со значениями в линейной группе $GL(q,C)$. Доказывается также, что всякое аналитическое расслоенное пространство над X с векторным слоем и аффинной структурной группой имеет мероморфное сечение. Далее изучаются векторные расслоенные пространства над X, в качестве координатных функций которых могут быть выбраны постоянные унитарные матрицы. Доказывается, что если X — алгебраическое многообразие, то структурная группа $GL(q,C)$ такого расслоения сводится к подгруппе $GL(q-p,C)$ тогда и только тогда, когда $\dim_C S=p$, где S — пространство голоморфных сечений данного расслоения. А. Л. Онищик

1337. Регулярные кривые на римановых многообразиях. Смейл (Regular curves on Riemannian manifolds. Smale Stephen), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 2, 492—512 (англ.)

Как известно, две регулярные замкнутые плоские кривые регулярно гомотопны в том и только в том случае, если их касательные векторы имеют одно и то же вращение (Whitney H., Compositio math., 1937, 4, 276—284). В реферируемой работе эта классификация регулярных кривых относительно регулярных гомотопий следующим образом переносится с плоскости на произвольное риманово многообразие M. Пусть T — многообразие единичных векторов, касательных к M, и x_0 — точка из T. Каждой регулярной замкнутой кривой в M, имеющей x_0 своим касательным вектором, естественным образом соответствует непрерывная кривая в T, проходящая через x_0. Оказывается, что это соответствие индуцирует взаимно однозначное соответствие между регулярно гомотопическими классами регулярных замкнутых кривых в M, имеющих x_0 своим касательным вектором, и элементами фундаментальной группы $\pi_1(T,x_0)$.

Доказательство приводится в терминах теории расслоенных пространств. Его наиболее существенный пункт содержится в следующей теореме. Пусть E — пространство всех регулярных кривых M, для которых x_0 служит касательным вектором в начальной точке, и π — отображение пространства E на T, относящее каждой кривой из E касательный вектор в концевой точке. Теорема утверждает, что для тройки (E,π,T) справедлива (по отношению к полиэдрам) теорема о накрывающей гомотопии. В. А. Рохлин

1338. Некоторые примеры комплексных многообразий. Атия (Some examples of complex manifolds. Atiyah M. F. Bonn. math. Schr., 1958, № 6, 28 pp.) (англ.)

Пусть X,Y — комплексные многообразия и p — аналитическое отображение Y на X. Автор называет Y расслоением на комплексные торы над X, если для каждой точки многообразия X существует такая окрестность U, что $p^{-1}(U)$ изоморфно фактор-пространству тривиального расслоения $X\times C^n$ (C^n — n-мерное комплексное векторное пространство) по $2n$ вещественно независимым аналитическим сечениям. Основную роль играет следующий пример расслоения на торы. Доказывается, что структуры комплексного векторного пространства в вещественном пространстве R^{2n} находятся во взаимно однозначном соответствии с n-мерными подпространствами пространства C^{2n}, имеющими с R^{2n} нулевое пересечение. Таким образом, совокупность J_n этих структур вкладывается в комплексное многообразие Грассмана и тем самым снабжается комплексной структурой. Конструируется расслоение M_n на n-мерные комплексные торы над J_n такое, что для каждой $J\in J_n$ слой над J изоморфен комплексному тору, возникающему при факторизации пространства R^{2n} со структурой J по решетке целочисленных векторов. Каждое расслоение на n-мерные торы над односвязным многообразием X, имеющее аналитические сечения, индуцируется расслоением M_n при некотором аналитическом отображении $X\to J_n$.

Доказывается, что если f — аналитическое отображение связного компактного многообразия X в J_n, а G — индуцированное расслоение над X, то многообразие G келерово тогда и только тогда, когда X келерово и f постоянно. Так как J_n содержит компактное подмногообразие $SO(2n)/U(n)$, то получается пример некелеровой комплексной структуры на произведении этого многообразия на $2n$-мерный тор. Превращая расслоения на торы в расслоения на многообразия Куммера, автор получает при $n=2$ пример односвязных некелеровых многообразий.

Доказано также, что максимальная связная группа аналитических автоморфизмов комплексного тора совпадает с группой сдвигов. А. Л. Онищик

См. также: 1701

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

1339. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. Колмогоров А. Н., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 5, 953—956

Доказывается, что для любого целого $n\geqslant 2$ суще

ствуют непрерывные действительные монотонно возрастающие функции $\psi^{pq}(x)$, $p=1,2,\ldots,n$, $q=1,2,\ldots,2n+1$, определенные на отрезке $[0,1]$ и такие, что всякая определенная на n-мерном единичном кубе непрерывная функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ представима в виде

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{q=1}^{q=2n+1}\chi_q\left[\sum_{p=1}^{n}\psi^{pq}(x_p)\right], \qquad (1)$$

где функции $\chi_q(y)$ также действительны и непрерывны.

Результаты предыдущей работы автора в этом направлении (РЖМат, 1957, 1259) не вытекают полностью из сформулированной выше теоремы, однако их принципиальное содержание с точки зрения представления функций конечного числа переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных и их приближения суперпозициями определенного вида из многочленов от одного переменного и операции сложения содержится в новой теореме. Как отмечается, метод доказательства новой теоремы элементарнее методов предыдущих работ по этому вопросу (РЖМат, 1957, 1259; 1958, 2837), однако конструкции, примененные при доказательстве новой теоремы, найдены путем анализа конструкций, употреблявшихся в указанных работах, и отбрасывания в них деталей, излишних для получения окончательного результата.

Если при $n=3$ положить

$$\varphi_q(x_1,x_2)=\psi^{1q}(x_1)+\psi^{2q}(x_2),\quad h_q(y,x_3)=\chi_q[y+\psi^{3q}(x_3)],$$

то из (1) следует, что

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{q=1}^{7}h_q\left[\varphi_q(x_1,x_2,x_3)\right]. \qquad (2)$$

Тем самым для $n=3$ полученный результат является усилением соответствующего результата В. И. Арнольда (РЖМат, 1958, 2837) за счет того, что число слагаемых в правой части (2) уменьшено с девяти (как это было в указанной работе В. И. Арнольда) до семи слагаемых.

Л. Д. Кудрявцев

1340. Произведение мер. Бледсо, Морс (Product measures. Bledsoe W. W., Morse A. P.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 1, 173—215 (англ.)

Пусть S — основное множество; для $A\subset S$ c_A — характеристическая функция множества A; φ,ψ — (внешние) меры Каратеодори на S. Если $\mathfrak{E}$ — любое семейство подмножеств множества S, то $\varphi_{\mathfrak{E}}(A)=\inf\limits_{H\in\mathfrak{H}}\sum\limits_{}\varphi(H)$ для всех счетных подсемейств $\mathfrak{H}$ семейства $\mathfrak{E}$, покрывающих A, причем $\inf=+\infty$, если не существует такого счетного покрывающего семейства. § 1 является введением. В § 2 содержатся предварительные определения и понятия. В § 3 рассматриваются $s\delta$-семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества S (т. е. семейство, замкнутое относительно сложения конечного числа слагаемых и непустого пересечения счетного числа членов), покрывающее S („псевдотопология", по терминологии Никодима), и семейство $\mathfrak{G}$ дополнений $\mathfrak{F}$-множеств до S. Мера φ называется $\mathfrak{F}$-согласованной ($\mathfrak{F}$-adapted), если: 1) $\mathfrak{F}$-множества измеримы; 2) для любых множеств $G\in\mathfrak{G}$ и $T\subset S$ с конечной $\varphi(T)$ и любого $\varepsilon>0$ существует в $\mathfrak{F}$ подмножество C множества G такое, что $\varphi(TG-TC)<\varepsilon$. 2) следует из 1), если $\mathfrak{G}$ содержится в борелевском расширении $\mathfrak{F}$ (наименьшем $\delta\sigma$-семействе, содержащем $\mathfrak{F}$). Если B $\mathfrak{F}$-универсально измеримо, т. е. измеримо относительно каждой $\mathfrak{F}$-адаптированной (внешней) меры, и если φ — такая мера, что $\varphi(B)$ конечно, то B можно аппроксимировать изнутри $\mathfrak{F}$-множествами. Семейство $\mathfrak{F}$-универсально измеримых множеств содержит семейство аналитических множеств над $\mathfrak{F}$. Примера, показывающего, что семейство $\mathfrak{F}$-универсально измеримых множеств может быть строго шире семейства аналитических множеств, не приведено.

В § 4 сначала φ есть общая (внешняя) мера на S. Функция (числовая) будет φ-интегрируемой, если она обращается в нуль вне некоторого σ-конечного подмножества множества S, она φ-измерима и интегралы от положительной и отрицательной частей не являются оба бесконечными. Вводится $s\delta$-семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества S. Множества $\mathfrak{F}$ предполагаются φ-измеримыми и σ-конечными, $\varphi=\varphi_{\mathfrak{F}}$. Определяется $\mathfrak{F}$-весовая функция h следующим образом. Пусть $\mathfrak{H}$ — любое счетное подсемейство семейства $\mathfrak{F}$, $\lambda(H)$ — положительное (возможно бесконечное) число, определенное для каждого $H\in\mathfrak{H}$; тогда $h(x)=\sum\limits_{H\in\mathfrak{H}}\lambda(H)c_H(x)$ для каждой точки $x\in S$.

Основная теорема о представлении: Для любой φ-интегрируемой функции f существуют $\mathfrak{F}$-весовые функции h' и h'' такие, что $f(x)=h'(x)-h''(x)$ φ-почти всюду на S и $\int f(x)\varphi(dx)=\int h'(x)\varphi(dx)-\int h''(x)\varphi(dx)$.

В § 5 μ обозначает (внешнюю) меру на множестве X, ν — внешнюю меру на множестве Y, $S=X\times Y$. $\mathfrak{F}$ обозначает $s\delta$-семейство подмножеств множества S, покрывающее S, такое, что характеристическая функция каждого множества $F\in\mathfrak{F}$ интегрируема повторно при обоих порядках к одному и тому же числу, обозначаемому $(\mu\nu)_{\mathfrak{F}}(F)$, кратко $\psi(F)$. Для любого подмножества $A\subset S$ $(\mu\nu)_{\mathfrak{F}}(A)=\inf\limits_{\mathfrak{F}\in\mathfrak{H}}\sum\limits_{}\psi(F)$ для всех счетных подсемейств $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{F}$, покрывающих A. Наконец, множества из $\mathfrak{F}$ предполагаются $(\mu\nu)_{\mathfrak{F}}$-измеримыми и σ-конечными. Путем применения теоремы представления § 4 устанавливается теорема Фубини для $(\mu\nu)_{\mathfrak{F}}$-интегрируемых функций. Интервал I есть произведение $M\times N$, где M—μ-измеримое множество с $\mu(M)<\infty$ и N—ν-измеримое множество с $\nu(N)<\infty$, $g(I)=\mu(M)\nu(N)$.

Ключом к произведению мер, не связанному с псевдотопологией (pseudo-topology-free measure product) $\varphi=(\mu\nu)$, является следующее понятие: Нуль-множество есть подмножество пространства S, характеристическая функция которого интегрируема повторно при обоих порядках к нулю. $\varphi(A)$ определяется как $\inf\sum_{I\in\mathfrak{I}}g(I)$, где $\mathfrak{I}$ — любое счетное семейство интервалов, покрывающее A с точностью до нуль-множества. Доказывается, что произведение μ-измеримого множества с ν-измеримым множеством $(\mu\nu)$-измеримо, нуль-множества будут $(\mu\nu)$-нуль-множествами и что имеет место теорема Фубини.

В § 6 $\mathfrak{T}$ обозначает топологию на S, точнее семейство открытых множеств, $\mathfrak{F}$ — семейство замкнутых множеств. Рассматриваются некоторые типы топологических мер. Наиболее специальная из них — мера Радона на локально компактном регулярном топологическом пространстве. Общая топологическая мера — это такая $\mathfrak{F}$-адаптированная мера ψ на общем топологическом пространстве, что для любого покрытия S открытыми множествами и любого $T\subset S$ с конечной $\psi(T)$ существует счетное подсемейство, покрывающее T с точностью до ψ-нуль-множества. $\mathfrak{E}$ обозначает σ-семейство, содержащее вместе с каждым множеством его относительно открытые подмножества. Исследуются свойства $\varphi_{\mathfrak{E}}$, где φ — топологическая мера, особенно, когда $\mathfrak{E}=\mathfrak{T}$. Кратко рассматриваются локальные нуль-множества. Некоторое внимание уделяется метрическим мерам.

В § 7 μ и ν — общие топологические меры в смысле § 6, определенные соответственно на множествах X и Y. Доказывается, что не связанное с топологией произведение мер, $\varphi = (\mu\nu)$, определенное в § 5, есть топологическая мера в топологическом произведении пространств. Обычная трудность при доказательстве теорем согласования этого рода состоит в определении произведения мер таким образом, чтобы сделать любое открытое множество φ-измеримым. Определение Сакса произведения мер (Сакс С., Теория интеграла, М., Изд-во ин. лит., 1949) априори ограничивается семейством измеримых множеств в произведении пространств; так что в данном случае семейство может не содержать всех открытых множеств $X \times Y$, если X и Y не каждое обладает счетным топологическим базисом. Определение Халмоша дает желаемый результат для двух мер Радона. Отличительная особенность теории авторов состоит в обобщении произведения мер в смысле Сакса при помощи ниль-множеств и соответствующего свойства Линделёфа. Определение авторов дает для теоремы Фубини максимальную общность. С. Y. Pauc

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 10, 1008—1009.

1341. Условия ограниченности и оценки роста полуаддитивных функций. Романовский П. И., Воробьев А. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, **57**, 99—106

Действительная функция $f(x)$, заданная на произвольном подмножестве e произвольной аддитивной полугруппы E, называется полуаддитивной на e, если из $x_1 \in e$, $x_2 \in e$, $x_1 + x_2 \in e$ следует $f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

Даются условия, обеспечивающие ограниченность полуаддитивной функции для случая, когда E есть числовая прямая. Например, если $e \subset (0,+\infty)$ есть измеримое множество и $\overline{\lim_{a\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{mes}[(0,a)e)]}{a} > \dfrac{1}{2}$, то всякая конечная, измеримая, полуаддитивная на e функция ограничена сверху на любом множестве $[A, A+h]e$ ($h>0$) при всех достаточно больших A.

Устанавливаются оценки роста полуаддитивной функции в случае, когда основная полугруппа E нормирована. Элемент $x \in e \subset E$ называется λ-приводимым ($^1/_2 < \lambda < 1$), если он представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_i \in e$, $\|x_i\| \leqslant \lambda \|x\|$ ($i=1,2$). Множество e называется λ-приводимым, если λ-приводимы все его элементы.

Теорема. Если $f(x) > -\infty$ полуаддитивна на λ-приводимом множестве e и $f(x) \leqslant M$ при $x \in e, \|x\| < \gamma$, то при $\|x\| \geqslant \gamma$ будет

$$f(x) \leqslant 2M \left(\frac{\|x\|}{\gamma}\right)^c, \quad \text{где } c = -\frac{\ln 2}{\ln \lambda}.$$

Доказывается еще несколько теорем сходного типа. Приводятся некоторые примеры полуаддитивных функций. И. П. Натансон

1342. Полуаддитивные функции на множествах n-мерного эвклидова пространства. Воробьев А. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, **57**, 107—120

Устанавливаются условия ограниченности и ограниченности сверху полуаддитивных (реф. 1341) функций, заданных на измеримых множествах евклидова пространства R_n.

Например, если $f(x)$ конечна, измерима и полуаддитивна на измеримом множестве $e \subset R_n$, для которого

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\mathrm{mes}(e\,S_r)}{\mathrm{mes}\,S_r} > \frac{1}{2}$$

(где S_r — шар радиуса r с центром в начале координат), то $f(x)$ ограничена на пересечении e с любым шаром.

Приводится несколько других теорем такого же характера, формулируемых более сложно. И. П. Натансон

1343. Спектр Бора для ограниченной функции. Эглстон (The Bohr spectrum of a bounded function. Eggleston H. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 328—332 (англ.)

Пусть $\Phi(x)$ — какая-нибудь ограниченная, равномерно непрерывная функция, заданная на всей действительной оси. Тогда множество действительных чисел t, для которых соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^{N} \exp(-itx)\,\Phi(x)\,dx = 0 \qquad (1)$$

не выполняется, назовем множеством типа I.

Пусть $\{n_k\}$ — какая-нибудь строго возрастающая последовательность целых чисел, для которых $n_{k+1} - n_k < C$ ($k=1,2,\ldots$), где C — константа. Тогда множество действительных чисел t, для которых дробные части последовательности $\{n_k t\}$ не являются равномерно распределенными, назовем множеством типа II.

Через Г обозначим какую-нибудь внешнюю меру в смысле Каратеодори.

Доказывается теорема: Для того чтобы Г-мера всякого множества типа I была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы была равна нулю Г-мера всякого множества типа II. Более того, утверждается, что совпадают верхние грани Г-мер всех множеств типа I и всех множеств типа II.

В силу известного результата Вейля о равномерном распределении дробных частей $\{n_k t\}$ для почти всех t, получается справедливость высказанного Херцем предположения о том, что соотношение (1) выполняется почти всюду. Показывается, что множество, где (1) не выполняется (т. е. множество типа I) может быть несчетным. А. А. Шнейдер

1344. Свойство интегральных средних. Гофман (A property of integral means. Goffman Casper), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 505—510 (англ.)

Рассматривается пространство Банаха X, элементами которого служат некоторые 1-периодические и суммируемые на [0,1] функции $x(t)$. Каждой $x(t) \in X$ сопоставляется ее функция Стеклова

$$x^h(t) = \frac{1}{h} \int_0^h x(t+u)\,du.$$

Строится пример, показывающий, что нижеследующие свойства a) и b) нормы в X:

a) $x(t) \in X$ влечет, что $x(t+u) \in X$ и $\|x(t+u)\| = \|x(t)\|$,

b) $\lim_{u\to u_0} \|x(t+u) - x(t+u_0)\| = 0$ равномерно относительно u_0 — не обеспечивают соотношения

$$\lim_{h\to 0} \|x^h(t) - x(t)\| = 0 \qquad (1)$$

для всех $x(t) \in X$. Этот пример опровергает одно наводящее рассуждение Бохнера (РЖМат, 1957, 2526, стр. 9), которое, впрочем, Бохнер и сам не считал точным („heuristic theorem"). Если, однако, заменить a) более слабым требованием, что $x(t) \in X$ влечет $x(t+u) \in X$, сохранить b) и потребовать еще свойств:

c) характеристические функции (точнее их 1-периодические продолжения) всех измеримых подмножеств [0,1] принадлежат X, d) соотношение $|x_1(t)| \geqslant |x_2(t)|$ влечет неравенство $\|x_1\| \geqslant \|x_2\|$ (т. е. X является банаховой структурой), — то (1) выполняется для всех $x(t) \in X$. И. П. Натансон

1345. Вычисление моментов функции Кантора—Витали. Эванс (Calculation of moments for a Cantor—Vitali function. Evans G. C.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, Part 2, 22—27 (англ.)

На промежутке [0,1] строится обобщенное множество Кантора (вместо 1/3 выкидывается на каждом шаге 1/o

($a>1$) средняя часть оставшихся промежутков). Конструируется монотонная, непрерывная функция Кантора—Витали $p(x)$ (см. стр. 232 книги И. П.Натансона—РЖМат, 1958, 9700 К). Для этой функции и ее моментов

$$M_n=\int_0^1 x^n p(x)dx, \qquad m_n=\int_0^1 x^n dp(x)$$

находятся некоторые соотношения.

Пример:

$$2M_n=1/(n+1)+\left\{\left(M+\frac{a+1}{a-1}\right)^n-M_n\right\}\Big/\left[\left(\frac{2a}{a-1}\right)^{n+1}+1\right],$$

где после разложения по бином степени M^k заменяются на M_k.

И. Г. Соколов

1346. Некоторые замечания об интеграле Римана—Стилтьеса. **Арнезе** (Alcune osservazioni sull'integrale secondo Riemann—Stieltjes. Arnese Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 648—651 (итал.)

Рассматриваются нижний и верхний интегралы Римана—Стилтьеса неограниченной функции $f(P)$ относительно аддитивной функции с конечным изменением $\alpha(T)$, где T — интервал многомерного пространства. При различных предположениях относительно конечности или бесконечности упомянутых интегралов даются некоторые характеристики интегрирующей функции $\alpha(T)$.

Если, например, нижний интеграл конечен, а верхний равен $+\infty$, то существует такое разложение $\mathfrak{D}^*$ пространства на интервалы, что всякое его продолжение $\mathfrak{D}$ обладает следующим свойством: для каждого интервала T_0 разложения $\mathfrak{D}$, где $f(P)$ неограничена снизу (сверху), будет $\alpha(T_0)\leqslant 0$ ($\alpha(T_0)\geqslant 0$).

Употребляемые обозначения и терминология не общепринятые. Они заимствованы из книги Пиконе и Вьола (Picone M., Viola T., Lezioni sulla teoria moderna dell' integrazione, ed. Einaudi,1952), знакомство с которой необходимо для понимания работы.

И. П. Натансон

1347. О множителях сходимости для функций непрерывной действительной переменной. **Хенсток** (The efficiency of convergence factors for functions a continuous real variable. Henstock R.), J. London Math Soc., 1955, **30**, № 3, 273—286 (англ.)

В теории обобщенных пределов

$$S(s)=\lim_{x\to\infty}S(s,x)=\lim_{x\to\infty}\lim_{w\to\infty}\int_0^w a(x,u)\,ds\,(u)$$

функция $s(w)$ обычно предполагается функцией ограниченной вариации, в обычном или обобщенном смысле. В реферируемой статье рассматривается случай, когда $s(w)$ — ограниченная функция Бэра в каждом конечном интервале. Трудности с определением интеграла Стилтьеса, возникающие в этом случае, показывает следующая теорема: Существует такая ограниченная функция Бэра $s(w)$, что интеграл Перрона—Стилтьеса

$$\int f(w)\,ds\,(w) \qquad (1)$$

не существует для каждой непостоянной функции $f(w)$. Для преодоления этих трудностей автор определяет интеграл (1) равенством

$$\int_\alpha^\beta f(w)ds(w)=f(\beta)s(\beta)-f(\alpha)s(\alpha)-(PS)\int_\alpha^\beta s(w)\,df(w)$$

и доказывает, что последний интеграл существует для всех ограниченных функций Бэра s в том и только в том случае, если f ограниченной вариации. Используя это определение, автор получает следующие необходимые и достаточные условия для $a(x,w)$, при которых $S(s)$ существует и равняется $\lim s(w)-s(0)$ ($w\to\infty$), если последний предел существует: 1) $a(x,w\pm)$ существует для каждого $x\geqslant 0$ и стремится к 1 при $x\to\infty$; 2) $M(x)=V[a(x,w)]<\infty$ для каждого $x\geqslant 0$ и $\overline{\lim_{x\to\infty}} M(x)<\infty$; 3) для каждого $A>0$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{0<w<A}|\,a(x,w+)-a(x,w-)\,|=0;$$

4) для каждого ограниченного борелевского множества W

$$\lim_{x\to\infty}\ (LS)\int_W da_c(x,w)=0.$$

M. Cotlar

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 359—360.

1348. Предельные свойства второй конечной разности. **Кабаков Ф. А.**, Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, **108**, 115—127

Устанавливается, что для функций $f(x)$, измеримых по Лебегу на данном отрезке $[a,b]$, соотношения

$$\Delta_2 f(x,h)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\to 0$$

при $h\to 0$ и

$$\Delta_1 f(x,h)=f(x+h)-f(x)\to 0$$

при $h\to 0$ могут выполняться на всем сегменте лишь одновременно.

А. Ф. Тиман

1349. О применимости принципа Дирихле для круга. **Фрёйд** (A körlemezre vonatkozó Dirichlet-elv alkalmazhatóságáról. Freud Géza), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 151—155, (венг.; рез. русск., нем.)

Доказывается, что если функция F, определенная на единичном круге G, имеет конечный интеграл Дирихле $D_G[F]$, то соответствующая граничная функция $F\,|_\Gamma=\varphi(\Theta)$, где Γ — граница G и Θ — полярный угол, удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi}\left[\varphi(\Theta+h)-\varphi(\Theta)\right]^2 d\,\Theta=o\,(h)\quad (h\to 0). \qquad (1)$$

Этим автор усиливает соответствующий результат референта (РЖМат, 1957, 5034; там же см. терминологию). Отметим, что это усиление было получено также А. А. Конюшковым (РЖМат, 1958, 9718). Указанное условие (1) является необходимым для конечности $D_G[F]$, но не достаточным. Автор доказывает, что необходимым и достаточным условием является конечность следующего интеграла

$$\int_0^1 t^{-2}\psi(t)\,dt<\infty,$$

где

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi(\Theta+t)-\varphi(\Theta)]^2 d\Theta.$$

Заметим, что этот результат уже известен в литературе (Beurling A., Acta math., 1939, **72**, 1—12).

С. М. Никольский

1350. О функциях с ограниченным изменением. **Церетели О. Д.**, Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1957, **19**, № 2, 129—134 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **19**, № 2, 129—134 (русск.)

Некоторые замечания по поводу известного разложения функции с конечным изменением на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты. Например:

Теорема 3. Если $f(x)$ — монотонная функция, P — множество точек существования конечной $f'(x)$, $\psi(t)$ — характеристическая функция множества-образа $f(P)$, то абсолютно непрерывная компонента $f(x)$ может отличаться лишь постоянным слагаемым от функции

$$\int_0^{f(x)} \psi(t)\,dt.$$

Несколько особняком стоит

Теорема 5. Если $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ — непрерывная функция с конечным изменением, то длина ее графика равна

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx + K,$$

где K есть приращение на $[a,b]$ сингулярной компоненты функции $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{Var}}}(f)$. Доказательства не приводятся.

И. П. Натансон

1351. Об одном классе выпуклых функций. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1957, вып. 5., 8—14

Рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к N'-функциям, удовлетворяющим Δ^2-условию и Δ_3-условию, возникающие в теории и приложениях пространств Орлича (основные определения и результаты см. в статье авторов, РЖМат, 1957, 8009).

Доказываются теоремы:

1. Для того чтобы N'-функция $M(u)$ удовлетворяла Δ^2-условию, необходимо и достаточно, чтобы дополнительная к ней N'-функция $N(v)$ при больших значениях v удовлетворяла неравенству

$$\frac{N(v)}{v} < k\,\frac{N(\sqrt{v})}{\sqrt{v}},$$

где k — некоторая положительная постоянная.

2. Пусть $M_1(u)$ и $M_2(u)$ удовлетворяют Δ_3-условию и при больших значениях u

$$M_1(u) \leqslant M_2(ku),$$

где k — некоторая постоянная Пусть $N_1(v)$ и $N_2(v)$ — N'-функции, дополнительные к $M_1(u)$ и $M_2(u)$. Тогда

$$N_1[N_2(v)] \sim \frac{N_1(v)\cdot N_2(v)}{|v|}.$$

3. Если обе N'-функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ удовлетворяют Δ^2-условию, то

$$N_1[N_2(v)] \sim N_2[N_1(v)] \sim \frac{N_1(v)\cdot N_2(v)}{|v|}.$$

Доказывается и ряд других результатов такого же характера.

В. И. Соболев

1352. К вопросу о разложении регулярно монотонных функций в ряд Гончарова. Сендов Благовест, Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 3, 450—453

Обозначим через K_ε множество регулярно монотонных функций, удовлетворяющих условиям $\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqslant 0$ $(\varepsilon_n = \pm 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ n = 0, 1, 2\ldots)$, и через K_ε^* — множество тех функций $f(x) \in K_\varepsilon$, для которых $f^{(n)}(x_n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Известно, что если $f(x) \in K_\varepsilon$, то

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)\,P_\nu(x) + R(x),$$

где $R(x) \in K_\varepsilon^*$, $\qquad x_n = \dfrac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{2}$,

$$P_0(x) = \varepsilon_0,\ P_n(x) = \int_{x_0}^{x} \tau_0 dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 dt_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} \tau_{n-1}\cdot dt_n$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ и $\tau_k = \varepsilon_k \varepsilon_{k+1}$.

Основным результатом реферируемой работы является следующее утверждение: Множество K_ε^* содержит только одну функцию, с точностью до неотрицательного постоянного множителя, если последовательность чисел ε_n содержит бесконечное число раз одну и ту же комбинацию, состоящую из $p \geqslant 4$ членов вида $-\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, -\varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство этой теоремы основывается на ряде лемм, одна из которых приводится ниже:

Если $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, принадлежащих K_ε, и $f_n(1) \leqslant A$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно извлечь частичную последовательность $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_m}, \ldots$, для которой существует предел

$$\lim_{m\to\infty} f_{n_m}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x),\quad k = 1, 2, \ldots,\ x \in [0, 1].$$

Примечание референта. Ряд, названный автором рядом Гончарова, за последние десять лет в советской математической литературе называется рядом Абеля-Гончарова (Матем. сб., 1947, **21**, № 1, 49—62).

И. И. Ибрагимов

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1353. О накрытии множеств. II. Козлова З. И., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, **21**, № 3, 349—370

Часть I см. РЖМат, 1956, 8705. Доказывается следующая общая теорема о накрытии множеств:

Если N — жесткая база δs-операции Φ_N, λ — класс вполне регулярных трансфинитных индексов по отношению к классу множеств Ξ, находящемуся во вполне правильном отношении с базой N и инвариантному относительно операции Φ_N, Φ_M — δs-операция, отбирающая точки, определяемые δs-операцией Φ_N, обладающие некоторым свойством U, причем такая, что

$$\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi) \text{ и } \Phi_{M^n}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi),\quad n = 1, 2, \ldots,$$

то для всякой последовательности множеств $\{E_n\}$ класса Ξ таких, что ни одна из точек множества $\Phi_N(\{E_n\})$ не обладает свойством U, найдется такая последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$, что $H_n \supset E_n$, $n = 1, 2, \ldots$ и ни одна из точек множества $\Phi_N(\{H_n\})$ не обладает свойством U.

Вполне правильное отношение класса множеств Ξ и базы N определяется в работе следующим образом: Класс множеств Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении, если

1) класс множеств $\Phi_N(\Xi)$ инвариантен относительно счетных сумм и пересечений;

2) при любой базе $M \in K$ имеет место соотношение

$$\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Здесь K означает d-систему, построенную на совокупности баз N и $\{N^n\}$ и содержащую все конечные пересечения баз этой системы (N^n — множество всех цепей базы N, которые содержат натуральное число n).

В работе показано, что утверждения относительно накрытия множеств, аналогичные общей теореме, имеют место и в тех случаях, когда N есть жесткая база A-операции, класс Ξ есть класс CA_2-или CA_n-множеств, а свойство U состоит в том, чтобы быть точкой N-несчетнозначности, определяться множеством цепей базы N, имеющим некомпактное замыкание или не являющимся рассеянным множеством индекса $\leqslant \alpha$, или не являющимся рассеянным семейством множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leqslant \alpha$. (Утверждение для CA_n-множеств имеет место в смысле непротиворечивости в системе аксиом теории множеств Σ Гёделя).

Р. Ю. Мацкина

1354. О некоторых свойствах CA_2-операции. Ступина И. Д., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 6, 835 — 862

Продолжение предыдущих работ автора о накрытиях множеств (РЖМат, 1958, 4624, 4625). A_2-операцией над системой множеств $\left\{E^{m_1 \dots m_t}_{n_1 \dots n_k}\right\}$ называется операция вида $\sum_{m_1 \dots m_t \dots n_1 \dots n_k \dots} \prod_{k,t} \sum E^{m_1 \dots m_t}_{n_1 \dots n_k}$

CA_2-операцией называется операция, дополнительная к A_2-операции.

Если взять в качестве требуемого свойства для задачи накрытия одно из следующих свойств: быть точкой p-значности, быть точкой конечнозначности, быть точкой счетнозначности, быть точкой, определяемой множеством цепей жесткой приведенной базы, имеющим компактное замыкание, то задача накрытия множеств решается положительно для CA_2-операции над CA_2-множествами.

Утверждение положительного решения задачи накрытия множеств для CA_2-операции над CA_n-множествами при любом n, начиная с некоторого значения, не может привести к противоречию в гёделевской системе Σ аксиом теории множеств, если взять в качестве требуемого свойства любое из указанных выше свойств.

Опечатка: в формулировке следствия 4 на стр. 848 вместо CA_2 должно быть CA_n. Б. С. Содномов

1355. О свойствах некоторых δ_s-операций. Ступина И. Д., Докл. АН СССР, 1957, 177, № 2, 188—190

Краткое изложение результатов автора в решении задачи накрытия множеств в теории операций, изложенных подробно в других статьях (РЖМат, 1958, 4624, 4625). Б. С. Содномов

1356. Об одном свойстве множеств, эффективно отличных от всех Ф-множеств. Крейнин Я. Л., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 2, 237—238

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1956, 8706) было введено понятие эффективного отличия множества от всех множеств, получаемых δs-операцией Ф над замкнутыми множествами данного пространства, называемых Ф-множествами. В реферируемой работе продолжено изучение свойств множеств, эффективно отличных от всех Ф-множеств данного пространства.

Если множество T метрического пространства R эффективно отлично от всех $\widetilde{\Phi}$-множеств этого пространства и δs-операция $\widetilde{\Phi}$ объемлет δs-операцию Ф, то множество T эффективно отлично от всех Ф-множеств.

Если δs-операция Ф объемлет операции $\lim$ и $\overline{\lim}$ и множество T эффективно отлично от всех $\overline{\Phi}$-множеств метрического пространства R, то множества T и CT содержат соответственно абсолютные G_δ-множества E_1 и E_2, вложенные в некоторые дисконтинуумы D_1 и D_2 и не отделимые абсолютными F_σ-множествами соответственно от CT и T. Б. С. Содномов

1357. О совершенных компактных ядрах множеств, эффективно отличных от всех Ф-множеств. Крейнин Я. Л., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 3, 436—438

Опираясь на результаты своей предыдущей работы (РЖМат, 1956, 8706), автор доказывает выводимость из теоретико-множественных принципов утверждения существования совершенного компактного ядра в множествах, эффективно отличных от всех проективных множеств данного класса, каков бы ни был этот класс. А именно, рассматривая весьма обширный класс δs-операций Ф, включающий все операции, доставляющие B-множества, C-множества, проективные множества каждого данного класса, он доказывает следующее. Пусть множество T эффективно отлично от всех Ф-множеств пространства R. Тогда: 1) каково бы ни было Ф-множество $M \subset T$, существует во множестве T дисконтинуум D, не пересекающийся с M; 2) каково бы ни было Ф-множество $N \supset T$, существует во множестве N дисконтинуум D, не пересекающийся с T. Далее характеризуется в терминах кванторов всеобщности и кванторов существования тип свойства, присущего любому множеству, эффективно отличному от всех Ф-множеств данного пространства, где Ф — произвольная δs-операция. Отмечается, что „измеримость и свойство Бэра не принадлежат к общему типу свойств, порождаемых эффективным отличием". Б. С. Содномов

1358. О новом законе обратимости, дистрибутивности и двойственности. Курепа (On a new reciprocity, distribution and duality law. Kurepa G.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1125—1143 (англ.)

Рассматриваются взаимосвязи между максимальными цепями и антицепями (РЖМат, 1958, 1950) частично упорядоченного множества и получены обобщения дистрибутивного закона и теоремы двойственности для теоретико-множественных операций. Результаты сформулированы в терминах j-связи, k-условия и оператора $(e, \perp, f)$, имеющих следующий смысл. Две системы подмножеств некоторого множества называются j-связанными, если любой элемент одной из них пересекается с каждым элементом другой. Упорядоченная пара (e, e^*) подмножеств некоторого множества S называется удовлетворяющей k-условию, если любое подмножество X множества S, пересекающееся с каждым элементом из e, содержит подмножество, являющееся элементом множества e^*. Через $OS(\overline{OS})$ обозначается система всех максимальных цепей (антицепей) множества S, а через $O'S(\overline{O'S})$ — система всех максимальных антицепей (цепей), пересекающихся с каждой максимальной цепью (антицепью). Частично упорядоченное множество S называется удовлетворяющим k-условию ($\bar{k}$-условию), если пара $(OS, O'S)$ ($(\overline{OS}, \overline{O'S})$) удовлетворяет k-условию. Если e есть некоторая система подмножеств множества S, а f — отображение последнего, то по определению $(e, \bigcup, f) = \bigcap_{e_1 \in e} \bigcup_{e_0 \in e_1} f(e_0)$,

$(e, \bigcap, f) = \bigcup_{e_1 \in e} \bigcap_{e_0 \in e_1} f(e_0)$.

1. Пусть F есть непустое семейство непустых подмножеств множества S, f — некоторое отображение последнего. Тогда $\bigcap_{x \in F} \bigcup_{x \in X} f(x) = \bigcup_{A} \bigcup_{a \in A} f(a)$, где A пробегает прямое произведение всех элементов семейства F.

2. Пусть частично упорядоченное множество S удовлетворяет k-условию. Тогда для любого отображения f множества S

$c(OS, \cup, f) = (O'S, \cup, cf)$, $c(O'S, \cup, f) = (OS, \cup, cf)$

и аналогично для операции $\cap$ и $\bar{k}$-условия.

Так как простейшим примером множества, удовлетворяющего k-и $\bar{k}$-условиям, является ветвящаяся таблица, то интерес своих исследований автор видит, в частности, в том, что, по его мнению, многие психологические, эволюционные и другие процессы протекают по ветвящейся схеме. Автор предполагает показать это в другом месте. Б. С. Содномов

1359. Последовательности множеств. Албукерки (Le successioni di insiemi. Albuquerque J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, **A4**, № 1-2, 201—224 (итал.; рез. франц.)

Рассматриваются две операции над последовательностями множеств. Пусть дана последовательность множеств $E_0, \ldots, E_n, \ldots$. Рассмотрим всевозможные подпоследовательности этой последовательности, образуем их суммы и возьмем пересечение всех сумм. Полученное таким образом множество автор обозначает символом psE_n. Аналогично, spE_n есть сумма всех пересечений всевозможных подпоследовательностей последовательности $E_0, \ldots, E_n, \ldots$. Доказывается ряд теорем, из которых следует, что операции psE_n и spE_n по своим свойствам сходны с операциями образования верхнего и нижнего предела последовательности множеств (относительно этих понятий см., например, стр. 25—30 книги Н. Н. Лузина (РЖМат, 1954, 3659 К)). Автор устанавливает, что класс последовательностей, удовлетворяющих условию $psE_n = spE_n$, совпадает с классом сходящихся последовательностей (см. указанную выше книгу). Формулировку теоремы 20 о том, что „для любой последовательности $E_0, \ldots, E_n, \ldots$ имеет место $\underline{\lim} E_n \subset spE_n \subset \overline{\lim} E_n \subset psE_n \subset \overline{\lim} E_n$" следует изменить следующим образом: „для любой последовательности $E_0, \ldots, E_n$ имеет место $\underline{\lim} E_n \subset spE_n \subset psE_n \subset \overline{\lim} E_n$", так как в первоначальной формулировке теорема не осмыслена, если последовательность не сходится.

Н. М. Нагорный

1360. Разложение пространств. Деккер (Decompositie van ruimten. Dekker Th. J.), Rapp. Math. centrum, 1956, № 018, 1—7 (голл.)

В дальнейшем R^n означает n-мерное евклидово пространство, E^n — единичный куб в нем, а S^n — сферу в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве. Пусть P и Q — множества, лежащие в метрическом пространстве, и $P \cong Q$ означает, что существует изометрическое отображение P на Q, сохраняющее ориентацию. Автор пишет $P \bar{n} Q$, если существуют попарно непересекающиеся множества P_i, Q_i $(i=1,\ldots,n)$ такие, что $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, $Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$, $P_i \cong Q_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Далее пишется $P \bar{\bar{f}} Q$, если $\exists n (P \bar{n} Q)$. Приводится ряд результатов Серпинского, касающихся разбиения прямой, а также его теорема о том, что $S^2 \bar{\bar{2}} S^2 \setminus D$, если D — конечное или счетное множество. В связи с теоремой Хаусдорфа о возможности разбиения S^2 на множества A, B, C, D такие, что D — счетное и $A \cong B \cong C \cong B \cup C$, отмечается невозможность введения конечноаддитивной меры в R^n при $n>2$. Формулируется следующая проблема Нёймана: каким условиям должны удовлетворять множество M, его подмножество E и группа G преобразований M для того, чтобы существовала E-нормированная G-инвариантная конечноаддитивная мера в M (кратко, (M, E, G)-мера)? Приводится ряд результатов Нёймана, касающихся этой проблемы. В частности: 1) если $M = S^n$, $E = S^n$ (или $M = R^n$, $E = E^n$), а группа G измерима и отображает E на подмножества с мерой Лебега, равной 1, то (M, E, G)-мера существует (группа называется измеримой, если существует (G, G, G)-мера; преобразования G при помощи $\bar{G}$ определяются следующим образом: $\sigma(\tau) = \sigma\tau$, для $\sigma, \tau \in G$); 2) если $M = R^2$, $E = E^2$, а G — аффинная группа, то (M, E, G)-мера невозможна. Приводится теорема Тарского о том, что (M, E, G)-мера существует тогда и только тогда, когда E не может быть разбито на две непересекающиеся части E_1 и E_2 такие, что $E \bar{\bar{f}} E_1$ и $E \bar{\bar{f}} E_2$ [$\bar{f}$ определяется здесь обобщенно: $A \cong B \equiv \equiv \exists \sigma (\sigma \in G \& B = \sigma(A))$].

Приводятся теоремы Банаха, Тарского, Робинсона, Адамса, автора и других о разбиении сферы S^2. Приводятся результаты Серпинского, касающиеся R^2 и R^3. В частности: 1) для каждой мощности $m \leqslant c$ существует $V \subset R^2$, которое можно разбить на m попарно непересекающихся частей, каждая из которых конгруэнтна V; 2) существует $V \subset R^3$ такое, что для любой его точки $pV \setminus p \cong V$. Формулируется ряд нерешенных проблем. Библ. 16 назв. Н. М. Нагорный

1361. Аксиоматическая теория множеств без элементов множеств. Вегель (Axiomatische Mengenlehre ohne Elemente von Mengen. Wegel Herbert), Math. Ann., 1956, **131**, № 5, 435—462 (нем.)

Строится аксиоматическая теория множеств, использующая в качестве основного понятия включение $\subseteq$ множеств. Понятие элемента множества среди основных не фигурирует и его заменяет понятие простого множества, т. е. множества, состоящего из одного элемента. Понятие „системы", фигурирующее у Бернайса среди основных, здесь определяется, но идентифицировать множества и системы не представляется возможным.

Во 2-й и 3-й главах работы доказывается ряд теорем, показывающих силу предложенной системы аксиом, например, теорема Бернштейна о равномощности двух множеств, если каждое из них равномощно некоторому подмножеству другого, теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств данного множества и др. В главе 4-й устанавливается, что предложенная система аксиом слабее системы аксиом Френкеля. Автор указывает, что на основе предложенной системы аксиом можно развивать теорию конечных, бесконечных, счетных, вполне упорядоченных множеств, а также топологию и алгебру. Н. М. Нагорный

1362. О некоторых уравнениях для порядковых чисел. Ван Сюй-тан, Ван Кэ-сянь (Wang Shuhtang, Wang Keh-shien), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 4, 646—649 (кит.; рез. англ.)

Серпинский доказал (РЖМат, 1957, 5444), что уравнение $\xi^2 = \eta^3 + 1$ не имеет трансфинитных порядковых решений ξ, η. Основная цель статьи доказать теорему:

Теорема 1. Уравнение $\xi^n = \eta^{n+1} + 1$ не имеет трансфинитных порядковых решений ξ, η, где $n>1$ — произвольное натуральное число.

Кроме того, теорема 1 обобщается следующим образом.

Теорема 2. Уравнение $\xi^n m = \eta^{n+1} + 1$ не имеет трансфинитных порядковых решений ξ, η, где $n>1, m \neq 2$ — произвольные натуральные числа.

Однако уравнение $\xi^2 2 = \eta^3 + 1$ имеет решение

$$\xi = \omega^3 a + \omega^2 2a + \omega 2a + 2, \quad \eta = \omega^2 2a + \omega 2a + 1.$$

Следовательно, остается открытым вопрос о нахождении всех трансфинитных порядковых чисел ξ, η, удовлетворяющих уравнению $\xi^n 2 = \eta^{n+1} + 1$.

С другой стороны, Серпинский доказал (РЖМат, 1958, 1958), что уравнения $\alpha\beta = \beta\alpha$ и $\alpha^m \beta^n = \beta^n \alpha^m$ для порядковых чисел α и β эквивалентны. Тем же методом авторы доказывают эквивалентность следующих уравнений для порядковых чисел α и β: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha m + \beta n = \beta n + \alpha m$.

Резюме авторов

1363. Об одном уравнении в трансфинитных числах. Сверчковский (On some equation in transfinite

ordinals. Świerczkowski S.), Fundam. math., 1958, **45**, № 3, 213—216 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\xi^{\varphi}=\eta^{\psi}+q, \qquad (1)$$

где φ, $\psi>1$ — непредельные числа, а q — конечно.

Доказываются

Теорема 1. Если $q=0$, то все непредельные числа ξ, η, удовлетворяющие (1), задаются формулами

$$\xi=\tau^{m},\ \eta=\tau^{n},$$

где показатели m, n конечны и $m\varphi=n\psi$.

Теорема 2. Если $q>0$, то никакие трансфинитные числа ξ, η не удовлетворяют (1).

Теорема 2 для $q=1$, $\varphi=2$, $\psi=3$ была ранее доказана Серпинским (РЖМат, 1957, 5444). С. И. Адян

1364. Одно замечание по поводу трансфинитной итерации. Шварц (A note on transfinite iteration. Schwarz Gideon), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 3, 265—266 (англ.)

Если теоретико-множественный оператор D таков, что для любого множества X, $X\subset D(X)$, то формулу $D^{n}(X)=D(D^{n-1}(X))$, с помощью которой обычно определяют конечную степень (итерацию) оператора D, можно записать в виде $D^{n}(X)=D(\bigcup_{k<n}D^{k}(X))$. Это равенство автор использует для определения D^{α}, где α — любое порядковое число. Доказывается следующая теорема, дающая условия, достаточные для того, чтобы все степени оператора, начиная с некоторой, были равны между собой:

Пусть $k=\aleph_{\mu}$ — бесконечное кардинальное число, индекс которого μ не является предельным числом. Пусть D — оператор, обладающий свойствами: 1) для каждого X, $X\subset D(X)$, 2) для любых X и Y из $X\subset Y$ следует $D(X)\subset D(Y)$, 3) для каждого множества A мощности k существует множество Q, элементами которого являются подмножества A мощности, меньшей k, такое, что $D(\bigcup_{a\in A}a)=\bigcup_{B\in Q}D(\bigcup_{a\in B}a)$. Пусть ξ — первое порядковое число мощности k. Тогда для любого порядкового числа $\alpha\geqslant\xi$ и любого множества X

$$D^{\alpha}(X)=\bigcup_{\eta<\xi}D^{\eta}(X).$$

Приводятся некоторые приложения этой теоремы.

Н. М. Нагорный

1365. Независимость слабой формы аксиомы выбора. Мендельсон (The independence of a weak axiom of choice. Mendelson Elliott), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 4, 350—366 (англ.)

Доказывается, что с помощью аксиом A, B, C системы Σ работы Гёделя о непротиворечивости аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы нельзя доказать аксиому выбора даже в следующей слабой форме: H_1. Для всякой счетной последовательности множеств Δ_0, Δ_1,... мощности 2 существует множество, имеющее с каждым Δ_i ($i=0,1,...$) ровно один общий элемент. При этом предполагается, что система аксиом A, B, C непротиворечива. Доказательство основано на построении модели, родственной тем, которые неоднократно рассматривал Мостовский (Mostowski A., Fundam. math., 1939, **31**, 201—252; 1948, **35**, 127—130). В реферируемой работе показывается, что в некоторой модели такого рода нарушается аксиома H_1, хотя верны все аксиомы A, B, C и, кроме того, аксиомы D_j ($j=1,2,...$), утверждающие несуществование конечных циклических множеств мощности j, т. е. таких последовательностей $x_1,...,x_j$, что $x_1\in x_2\in...\in x_j\in x_1$. Независимость H_1 влечет независимость более сильных форм аксиомы выбора, а также следующей формы обобщенной континуум-гипотезы: J. Если x — бесконечное множество и y — множество подмножеств x, содержащее все $\{a\}$, где $a\in x$, то y эквивалентно x или множеству $\mathfrak{P}(x)$ всех подмножеств x. Независимость J автор выводит из того, что согласно результатам Серпинского (Sierpiński W., Fundam. math., 1947, **34**, 1—5) и Шпеккера (РЖМат, 1958, 9683) J влечет аксиому выбора.

Среди следствий из аксиомы выбора, независимость которых доказывается в реферируемой работе, содержится также следующее:

H_8. Если все элементы множества x непусты и попарно не пересекаются, то сумма множества x содержит множество, эквивалентное x.

В конце работы отмечается связь между моделями Мостовского и автора, позволяющая перенести результаты Мостовского, полученные им для систем, содержащих индивидуумы (Urelemente, т. е. предметы, не являющиеся множествами), на систему A, B, C; в частности, это относится к результату о независимости теоремы о возможности вполне упорядочить каждое множество от "принципа порядка", согласно которому всякое множество может быть упорядочено, и аксиом D_j, $j=1, 2,...$ Отмечается, что этот результат был сообщен Шенфилдом (Schoenfield) в Питтсбурге в 1954 г.

Примечание референта. Утверждение о независимости аксиомы выбора в системе A, B, C содержится в работе референта (РЖМат, 1955, 2620, первая сноска на стр. 9 работы и последние фразы разделов 3 и 4). А. С. Есенин-Вольпин

1366. Обобщение одной теоремы Серпинского. Исэки (A generalisation of a theorem of W. Sierpiński. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 1, 28 (англ.)

Дается обобщение одной теоремы Серпинского, касающейся континуум-гипотезы (РЖМат, 1958, 1121). Доказывается теорема: Пусть M — упорядоченное множество с кардинальным числом $\mathfrak{m}$. Кардинальное число $\mathfrak{n}$ тогда и только тогда не меньше $\mathfrak{m}$, когда выполняются условия: каждому элементу a множества M можно поставить в соответствие семейство $F(a)$ интервалов таких, что каждый из них имеет в качестве конца элемент a, $\overline{\overline{F(a)}}<\mathfrak{n}$, и один из каких угодно различных элементов множества M является концом интервала некоторого семейства $F(a)$.

Здесь через $\overline{\overline{A}}$ обозначена мощность множества A. Под интервалом (a,b) упорядоченного множества M разумеется множество точек x таких, что $\{a<x<b,\ x\in M;\ a \text{ и } b\in M\}$; a и b — концы интервала. В. Я. Арсенин

1367. Триадическое построение частично упорядоченных множеств. Куэста (Triadic construction of partially ordered sets. Cuesta N., Acta Salamant. Ser. Cienc., 1955, **1**, № 4, 41 pp., ill.) (англ.)

Пусть M — частично упорядоченое множество с упорядочивающим отношением $\prec$. Полость (cavity) M есть такое разложение M на три попарно непересекающихся множества I, N, F, что если $x\in I$, $y\in F$, $m\in M$, $m'\in M$, $m\prec x$ и $y\prec m'$, то $x\prec y$, $m\in I$ и $m'\in F$. Относительно произвольно выбранного полного упорядочения $M: m_1, m_2,..., m_\xi,...$ $(0<\xi<\mu, |\mu|=|M|)$ полость (I, N, F) выражается триадическим названием (triadic name) $0\ a_1\ a_2...\ a_\xi...$ $(\xi<\mu)$, где a_ξ есть соответственно одно из букв i, n, f в зависимости от того, будет ли $m_\xi\in I$, $m_\xi\in N$, $m_\xi\in F$. Данный частичный порядок может быть расширен заменой полости M новым элементом, который можно предполагать триадическим названием этой полости. Триадические названия полостей расширения могут быть выведены из названий полостей исходного частичного порядка. Это позволяет строить индуктивно (начиная с пустого множества) все частичные упорядочения данного множества; каждому частичному порядку соответствует генеалогическое дерево, элементами которого являются триадические названия элементов частично упорядоченного множества также как и полостей, которые

появляются на последовательных ступенях построения.
F. Bagemihl

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 950.

1368. Замечания о теореме Курепы относительно кратных соответствий. Серпинский (Remarques sur un théorème de M. G. Kurepa concernant les correspondances multiviques. Sierpiński W.), Matematiche, Catania, 1953, **8**, № 2, 79—81 (франц.)

По поводу леммы и теоремы референта (РЖМат, 1955, 3689) автор обращает внимание на то, что неизвестно их доказательство без обычного в таком случае использования аксиомы выбора Z. Так, например, с одной стороны, $L_{21}(L_{rs}$: если существует (r, s)-соответствие A и B, то $r\overline{\overline{A}} = s\overline{\overline{B}})$ влечет за собой P (объединение счетного семейства множеств из двух точек счетно) и, с другой стороны, неизвестно доказательство P без предположения Z. На самом деле, автор замечает, что без предположения Z неизвестно уже доказательство T_{22} (T_{rs}: если существует (r, s)-отображение A в B и B в A, то $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$).
G. Kurepa

Перевод из Zbl. Math., 1955, **52**, 285

1369. Конфинальные множества. Барбэлат (Multimi cofinale. Barbălat I.), Bul. Inst. politehn. Bucuresti, 1956, **18**, № 3-4, 51—55 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть X и Y — непустые конфинальные подмножества частично упорядоченного множества E. Мойсил (G. C. Moisil) сформулировал следующую задачу: установить, существуют ли $A \subset X$, $B \subset Y$, $A \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$ такие, что A и B изоморфны относительно данного порядка. Автор доказывает, что существуют наименьшее кардинальное число m и два подмножества $A \subset X$, $B \subset Y$, $A \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = m$ такие, что m — наименьшее кардинальное число двух подмножеств из X и Y, конфинальных с X и Y. Если m конечно, то множества минимальной мощности совпадают с множествами максимальных элементов X и Y.

Наконец, при помощи построения, использующего трансфинитную индукцию, задача решается в частном случае, когда X и Y вполне упорядочены и их порядковый тип принадлежит не более чем 2-му классу.
Резюме автора

1370. Качественный анализ некоторых фундаментальных проблем канторовской классической теории трансфинитных чисел и исследование «неразрешимости» континуум-гипотезы. Сюй Ли-чжи (Hsu L. C.), Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 1, 67—103 (кит.; рез. англ.)

Излагается новая точка зрения на некоторые известные проблемы канторовской теории трансфинитных чисел. В первой части автор обсуждает вопрос о том, почему континуум-гипотеза не может быть разрешена в чисто формальной системе канторовских трансфинитных чисел. Затем формулируются три общих принципа: „принцип непрерывного продолжения", „принцип относительно полного исчерпания" и „принцип сравнимости процессов".

Во второй части, опираясь на сформулированные принципы (первые два), автор проводит качественный анализ некоторых концепций, таких как аксиома произвольного выбора, значение принципа трансфинитной индукции, антиномия Бурали — Форти. Автор приходит к выводу, что существуют два различных рода законов продолжения. Показано, что аксиома произвольного выбора для несчетной совокупности эквивалентна постулированию существования некоторого „закона продолжения в широком смысле".

В третьей части обсуждается теорема о полной упорядоченности бесконечной совокупности. Устанавливается связь континуум-гипотезы с третьим принципом.
В. Я. Арсенин

1371. Два замечания о теории множеств. Сколем (Two remarks on set theory. Skolem Th.), Math. scand., 1957, **5**, № 1, 40—46 (англ.)

Работа состоит из двух частей, не зависящих друг от друга.

В первой части дается формулировка аксиомы бесконечности, подходящая под схему аксиом свертывания. Эта формулировка применима к системе Цермело—Френкеля и состоит в следующем:

Пусть множество n называется f-элементом множества m, если истинно $n \in m$ & $\{n\} \notin m$, и называется b-элементом m, если $n \in m$ и $n \neq \{x\}$ для каждого $x \in m$. Пусть $I(m)$ означает конъюнкцию следующих четырех утверждений: 1) $0 \in m$; 2) m обладает единственным f-элементом; 3) каждое $n \subseteq m$ обладает хотя бы одним f-элементом; 4) если $n \subseteq m$ и $0 \in n$, причем n имеет единственный f-элемент, совпадающий с единственным f-элементом множества m, то $n = m$. Формулировка аксиомы бесконечности: $\exists x \forall m\,(m \in x \sim I(m))$.

То, что эта формулировка эквивалентно выражает аксиому бесконечности, вытекает из следующих трех теорем:

Теорема 1. Если $I(m)$, то m не имеет никаких b-элементов, отличных от 0.

Теорема 2. Если $I(m)$ и a — f-элемент множества m, то $I(m + \{\{a\}\})$.

Теорема 5. Если $I(m)$, то m конечно.

Именно, из этих теорем следует, что множество всех таких множеств m, что $I(m)$, образует последовательность „натуральных чисел Цермело"

$$\{0\},\ \{0, \{0\}\},\ \{0, \{0\}, \{\{0\}\}\}, \ldots$$

Кроме того, отмечаются следующиедва свойства $I(m)$.

Теорема 3. Если $I(m)$ & $n \subseteq m$ & $0 \in n$, причем n обладает ровно одним f-элементом, то $I(n)$.

Теорема 4. $I(m_1)$ & $I(m_2) \to m_1 \subseteq m_2 \vee m_2 \subseteq m_1$.

Отмечается также, что определимые множества m (т. е. такие, что $x \in m \sim \Phi(x)$ для некоторой пропозициональной функции) образуют перечислимый класс и что это обстоятельство, родственное теореме Левенгейма, обнаруживает „иллюзорный характер классических абсолютистских понятий в теории множеств."

Во второй части рассматриваются различные способы определения упорядоченной последовательности из n элементов как множества. Упорядоченная пара (a, b) определяется по Куратовскому и Винеру как $\{\{a, b\}, \{a\}\}$. Отмечается неудобство определения упорядоченной тройки (a, b, c) как $((a, b), c)$, связанное с тем, что при рассмотрении типов, (a, b) получает более высокий тип, чем c, если типы a, b и c одинаковы. Предлагается определять (a, b, c) как $((a, c), (b, c))$; такая тройка однозначно определяет члены a, b и c, причем равенство $(a, a, a) = (a, a)$ возможно только для „патологических" множеств a (являющихся элементом своего элемента). При этом если уже определены упорядоченные последовательности из n элементов, то упорядоченную последовательность из $n + 1$ элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ предлагается определять как $((a_1, a_{n+1}), (a_2, a_{n+1}), \ldots, (a_n, a_{n+1}))$.

Другой способ определения упорядоченной тройки, обладающий аналогичными свойствами: $(a, b, c) = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$. Далее можно определять (a, b, c, d) как $\{(a, b, c), (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d)\}$ и таким же образом определять пятерки, шестерки и т. д. или, вместо этого, определять (a, b, c, d) как $\{\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}\}$ (двойное применение $\{\}$ нужно для отличия (a, a, a, a) от (a, a, a)

при непатологических a). Указывается, что этим не исчерпываются возможные способы определения упорядоченной последовательности из n элементов.

Примечание референта. Автор утверждает (стр. 40), что приведенное выше определение аксиомы бесконечности применимо к теории Цермело, но так как класс „натуральных чисел Цермело" в теории Цермело может не образовывать множества, мы считаем, что под термином „теория Цермело" здесь следует понимать теорию Цермело—Френкеля.

A. C. Есенин-Вольпин

1372. Действительные и порядковые числа как множества рациональных чисел. Курепа (Real and ordinal numbers as sets of rational numbers. Kurepa George), Glasnik mat.-fiz. i astron. Ser. II., 1953, 8, 270—279 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Как действительные, так и порядковые числа $<\omega_1$ определяются в терминах классов эквивалентности подмножеств рациональных чисел, грубо говоря, следующим образом. Действительное число r есть семейство таких бесконечных подмножеств рациональных чисел, которые имеют одну предельную точку r; и порядковое число $\alpha<\omega_1$ есть семейство вполне упорядоченных подмножеств рациональных чисел типа α. Отметим 2 неточности: стр. 271, строка 2, вместо „ordinal" должно быть „cardinal"; стр. 272, строка 32, вместо „left from" должно быть „to the left of".

S. Ginsburg

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 943.

1373. Два основных принципа для трансфинитных процессов и гегелевская критика «дурной бесконечности». Сюй Ли-чжи, Чжу У-цзя (Hsu L. C., Chu W. C.), Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 111—121 (кит.; рез. англ.)

В предыдущей статье первого из авторов (реф. 1370) постулировались три принципа (принцип непрерывного продолжения, принцип относительно полного исчерпания и принцип сравнимости процессов), которые, как указывают авторы, играют основную роль в исследовании некоторых проблем канторовской теории трансфинитных чисел. Для обоснования первых двух из этих принципов вводится неопределяемое понятие „инвариантного критерия". Во второй части статьи, носящей философский характер, авторы заключают, что второй из перечисленных принципов соответствует гегелевской „актуальной бесконечности", а первый — „дурной бесконечности".

A. C. Есенин-Вольпин

1374. Методические замечания о кардинальных и порядковых числах. Субьета (Notas de clase sobre numeros cardinales y ordinales. Zubieta R. F.), Rev. mat., 1958, № 3, 39—46 (исп.)

Автор считает, что в преподавании элементарной арифметики не следует давать общей идеи кардинальных и порядковых чисел, а нужно ограничиться лишь натуральными числами ввиду иного подхода к определению понятия числа в случае бесконечных мощностей по сравнению с конечным случаем. Для обоснования своего мнения и выяснения возникающих трудностей автор излагает в форме диалога основные понятия теории трансфинитных чисел.

М. Ф. Бокштейн

1375. Специальные «функционалы» и теорема континуума. Эро (Fonctionnelles spéciales et théorème du continu. Eyraud Henri), Ann. Univ. Lyon, 1954, Ser 3, **A**, № 17, 5—10 (франц.)

Повторная неубедительная попытка доказать континуум-гипотезу.

F. Bagemihl

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 3, 244.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

1376. Полиномиальные операции в некоторых пространствах. Николаев В. Ф., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 4, 639—641

Вводится некоторый класс пространств 2π-периодических функций, весьма близкий к классам, введенным С. М. Лозинским (Докл. АН СССР, 1949, **64**, № 4, 453—456). К этому классу, в частности, принадлежат, пространство $\widetilde{C}$ непрерывных 2π-периодических функций и пространство $\widetilde{L}$ суммируемых на $[0, 2\pi]$ и 2π-периодических функций. Изучаются такие линейные операторы A_n из одного пространства упомянутого класса в другое, значениями которых служат тригонометрические многочлены порядка $\leqslant n$. Устанавливается формула

$$\int_0^{2\pi} A_n[f_t,\ x-t]\,dt = \int_0^{2\pi} A_n[S_n(f_t),\ x-t]\,dt, \qquad (1)$$

где $f_t(z) = f(z+t)$, а $S_n(f,\ x)$ — n-я частная сумма Фурье функции $f(z)$. Для случая пространства $\widetilde{C}$ эта формула принадлежит Д. Л. Берману (Докл. АН СССР, 1952, **85**, № 1, 13—16), что, по-видимому, автору было неизвестно. Приводится несколько следствий формулы (1). Отмечаются некоторые экстремальные свойства скользящих (т. е. коммутирующих с оператором сдвига (аргумента) операторов A_n, как, например, неравенство

$$\|A_n\|_E^E \leqslant \|A_n\|_{\widetilde{C}}^{\widetilde{C}}$$

Доказательства не приводятся.

И. П. Натансон

1377. Некоторые замечания об одностороннем приближении. Фрёйд, Ганелиус (Some remarks on one-sided approximation. Freud Géza, Ganelius Tord), Math. scand., 1957, 5, № 2, 276—284 (англ.)

Пусть $r \geqslant 1$ — целое число. По определению, функция $h \in H_r$, если h имеет период 2π, $r-1$ раз непрерывно дифференцируема и $h^{(r-1)}$ является интегралом от функции h_r с ограниченной вариацией. Полагаем $\|f\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$.

Опираясь на свои ранее полученные результаты (РЖМат, 1956, 8718; 1958, 9723), авторы доказывают:

Теорема 1. Пусть $h \in H_r$ и q — целое, $0 \leqslant q \leqslant r$. Для любого целого $n > 0$ существует тригонометрический полином W_n порядка n такой, что

$$W_n - h \geqslant 0$$

и

$$\|W_n - h\| \leqslant C_r \operatorname{var} h_r \cdot n^{-(r-1)},$$

где C_r зависит только от r.

Если γ — точка непрерывности h_r, то

$$W_n^{(q)}(\gamma) - h^{(q)}(\gamma) = o(n^{q-r})$$

и равномерно для всех θ

$$W_n^{(q)}(\theta) - h^{(q)}(\theta) = O(n^{q-r}).$$

Теорема 2. Пусть $h \in H_p$ и существует интервал I такой, что $h(\theta) = \tau(\theta)$, если $\theta \in I$, где $\tau_1 \in H_s$, $s > p$. Пусть I^* — замкнутый интервал, внутренний к I. Тогда для любого целого $n > 0$ существует тригонометрический полином W_n порядка n, удовлетворяющий условиям:

$$V_n \equiv W_n - h \geqslant 0,$$

$$\|V_n\| = O(n^{-p-1}),$$

$$\operatorname{var}_{[0,2\pi]} V_n = O(n^{-p}),$$

$$\int_{I^*} V_n(t)\,dt = O(n^{-s-1}), \qquad (1)$$

$$\operatorname{var}_{I^*} V_n = O(n^{-s}). \qquad (2)$$

Если же имеется несколько непересекающихся интервалов $\{I_k\}$ таких, что $h(\theta) = \eta_k(\theta)$, если $\theta \in I_k$ и $\eta_k \in H_{s_k}$, $s_k > p$, то неравенства, соответствующие (1) и (2), справедливы одновременно в замкнутых интервалах $I_k^* \subset I_k$.

В статье дается конструкция для построения полиномов W_n с указанными в теоремах 1 и 2 свойствами.

А. В. Ефимов

1378. О предельных функциях тригонометрического ряда. Меньшов Д. Е., Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, **7**, 291—334

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ есть ряд из измеримых функций, конечных почти всюду на $[a, b]$. Положим $Q_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu(x)$. Функция $\varphi(x, E)$, определенная на некотором множестве $E \subset [a, b]$, $mE > 0$, называется предельной функцией ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, если существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, что $\lim_{k\to\infty} Q_{\rho_k}(x) = \varphi(x, E)$ почти всюду на E.

Пусть $M = \{\varphi(x, E)\}$ — множество измеримых функций, каждая из которых определена на некотором множестве E, $mE > 0$, $E \subset [-\pi, \pi]$. Задача автора: найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы M было множеством всех предельных функций некоторого тригонометрического ряда. Для формулировки этого условия автор вводит определение.

Определение 3. Функция $\varphi(x, E)$ называется предельным элементом в широком смысле для некоторой последовательности функций $\varphi_n(x, E_n)$, если $mE > 0$ и выполнены условия: для $Q = \lim E_n$ имеем $mQ > 0$, $m(E - Q) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, \overline{E_n}) = \varphi(x, E)$ почти всюду на E.

Определение 4. Функция $f(x, E')$, определенная почти всюду на некотором E', $mE' > 0$, называется предельным элементом в широком смысле для множества $M = \{\varphi(x, E)\}$, если существует последовательность функций $\varphi_n(x, E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, принадлежащих M, для которых $f(x, E')$ есть предельный элемент в широком смысле.

Наконец, множество M называется замкнутым в узком смысле, если оно содержит все свои предельные элементы в широком смысле.

Теорема I. Пусть $M = \{\varphi(x, E)\}$ — множество измеримых функций, каждая из которых определена почти всюду на некотором $E \subset [-\pi, \pi]$, $mE > 0$. Для того чтобы M было множеством всех предельных функций некоторого тригонометрического ряда, необходимо и достаточно, чтобы M было замкнуто в узком смысле.

Эта теорема выводится автором из двух еще более сильных теорем II и III. В их формулировках используется определение верхнего и нижнего пределов по мере для данного ряда (см. определение 5 на стр. 779 работы автора: РЖМат, 1956, 8711). Имеют место теоремы:

Теорема II. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере для некоторого ряда из измеримых функций. Тогда множество $M = \{\varphi(x, E)\}$ всех предельных функций этого ряда удовлетворяет условиям:

α. M замкнуто в узком смысле;

β. если $\varphi(x, E) \in M$, то $G(x) \leqslant \varphi(x, E) \leqslant F(x)$ почти всюду на E;

γ. Если $\varphi(x, E) \in M$ и $E_0 = E + E[F(x) = G(x)]$, то $\varphi_0(x, E_0) \in M$, где $\varphi_0(x, E_0) = \varphi(x, E)$ при $x \in E$ и $\varphi_0(x, E_0) = F(x)$ при $x \in E_0 - E$.

Теорема III. Пусть M есть непустое множество из функций $\varphi(x, E)$, каждая из которых определена почти всюду на некотором $E \subset [-\pi, \pi]$, $mE > 0$. Если M удовлетворяет условиям α, β и γ из теоремы II, где $G(x)$ и $F(x)$ — какие-то измеримые функции, для которых $G(x) \leqslant F(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$, то существует такой тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, что M есть множество всех предельных функций, а $G(x)$ и $F(x)$ являются его нижним и верхним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$.

Из указанных теорем можно, кроме того, получить теоремы, сформулированные в указанной выше заметке автора. Этот вывод будет дан автором в другой работе.

Н. К. Бари

1379. К вопросу о сходимости тригонометрических рядов Фурье для непрерывных функций. Толстов Г. П., Матем. сб., 1958, **44**, № 4, 549—550

Доказывается, что проблема сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье для непрерывных функций эквивалентна такой же проблеме для функций, абсолютно непрерывных в обобщенном смысле (т. е. функций ACG).

Д. Е. Меньшов

1380. Ряды Фурье. XVII. Порядок частных сумм и теоремы сходимости. Сато (Fourier series. XVII. Order of partial sums and convergence theorem. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 6, 298—303 (англ.)

Доказывается ряд теорем, относящихся к порядку частных сумм рядов Фурье. Полученные результаты обобщают ранее доказанные автором теоремы (РЖМат, 1957, 6959). Далее указывается на применение этих теорем к суммируемости рядов Фурье.

Отмечается, что в этом направлении имеются неопубликованные результаты Кинукавы.

Характерные утверждения:

Теорема 3. Пусть $f(x) \in L(0, 2\pi)$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда, если

$$\int_0^t \left[f(x_0+u) + f(x_0-u) \right] du = o(t \lg^{\alpha} t^{-1}) \qquad \text{при } t \to 0$$

и интеграл

$$\int_0^t \left[f(\xi+u) - f(\xi-u) \right] du = o(t \lg^{\alpha-1} t^{-1}) \qquad \text{при } t \to 0$$

равномерно относительно ξ, лежащего в окрестности точки x_0, то

$$s_n(x_0) = o(\lg^{\alpha} n),$$

где $s_n(x_0)$ — частная сумма n-го порядка ряда Фурье функции $f(x)$.

Теорема 7. Если интеграл

$$\int_0^t (t-u) \left[f(\xi+u) - f(\xi-u) \right] du = o(t^2 \lg^{\alpha-1} t^{-1})$$

при $t \to 0$

равномерно относительно ξ, лежащего в окрестности точки Лебега x_0, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0}{1 + \varepsilon \lg^{\alpha} n} \right\} = f(x_0),$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

П. Л. Ульянов

1381. Ряды Фурье. XVIII. О последовательности коэффициентов Фурье. Сато (Fourier series. XVIII. On a sequence of Fourier coefficients. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 7, 380—385 (англ.)

Пусть $f(x) \in L(0, 2\pi)$ и $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$, где a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Доказывается ряд теорем, относящихся к поведению чезаровских средних от $nB_n(x)$. В этом же направлении в последнее время появился результат Сингха (РЖМат, 1957, 6270).

Характерные утверждения:

Теорема 1. Пусть $\psi_{x_0}(t) = f(x_0+t) - f(x_0-t) - l$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Тогда, если

$$\int_0^t \psi_{x_0}(u)\,du = o(t \lg^{\alpha} t^{-1}) \qquad \text{при } t \to 0 \qquad (1)$$

и интеграл

$$\int_0^t \left[\psi_{x_0}(\xi+u) - \psi_{x_0}(\xi-u)\right] du = o(t \lg^{\alpha-1} t^{-1}) \quad \text{при } t \to 0$$

равномерно относительно ξ, то

$$\sigma_n(x_0) - l/\pi = o(\lg^{\alpha} n),$$

где $\sigma_n(x_0)$ — чезаровские средние $(C, 1)$ для последовательности $\{nB_n(x_0)\}$.

Теорема 3. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $0 < r < 1$. Тогда, если выполнено (1) и

$$\int_0^t \left[\psi_{x_0}(\xi+u) - \psi_{x_0}(\xi-u)\right] du = o\{t^{2-r} \lg^{\alpha} t^{-1}\}$$

равномерно относительно ξ, то

$$\sigma_n^r(x_0) - l/\pi = o(\lg^{\alpha} n),$$

где $\sigma_n^r(x_0)$ — чезаровские средние (C, r) для $\{nB_n(x_0)\}$.

Примечание референта. 1) В работе имеются опечатки, в том числе и в библиографии. 2) Указанный выше реферат на статью Сингха, как нам представляется, содержит неточность. Именно, в теореме Сингха не требуется существования $f(x+0) - f(x-0)$, что можно видеть как из доказательства теоремы, так и из того, что если бы выражение $f(x+0) - f(x-0)$ имело смысл, то условие Сингха $\int_0^t \psi(u)\,du = o(t)$ было бы выполнено автоматически и потому его не имело бы смысла вводить, как это делает Сингх.

П. Л. Ульянов

1382. О множестве точек сходимости лакунарных тригонометрических рядов и свойстве равномерного распределения соответствующих последовательностей. Эрдёш, Тейлор (On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences. Erdos P., Taylor S. J.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 28, 598—615 (англ.)

Изучается множество точек сходимости (абсолютной сходимости) лакунарных тригонометрических рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(n_k x + \mu_k) \qquad (1)$$

с точки зрения их мощности и их размерности, где $0 \leqslant \mu_k \leqslant 2\pi$, n_k — целые числа и $t_k = \dfrac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \rho > 1$.

Кроме этого, в конце работы приводится ряд теорем относительно равномерного распределения последовательностей $(n_k x)$.

Приведем некоторые результаты:

Теорема 3. Если n_k таковы, что t_k — целые числа для достаточно больших k и $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, то множество точек абсолютной сходимости ряда (1) при $\mu_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеет мощность континуума.

Теорема 5. Если n_k таковы, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^{-1}$ сходится, то при любых μ_k ряд (1) сходится абсолютно на множестве мощности континуума.

Теорема 8. Если n_k таковы, что $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, то при любых μ_k множество значений x, для которых ряд (1) сходится, имеет размерность 1.

Теорема 12. Пусть C — некоторая положительная постоянная и возрастающая последовательность целых n_k такова, что

$$n_{k+1} - n_k < C \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

тогда множество точек x, для которых $(n_k x)$ неравномерно распределена, имеет размерность 0.

П. Л. Ульянов

1383. О расходимости ряда Фурье. Госселин (On the divergence of Fourier series. Gosselin Richard P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 278—282 (англ.)

Показывается, что для всякой заданной возрастающей последовательности $\{p_\nu\}$ натуральных чисел можно построить интегрируемую на $(0, 2\pi)$ функцию, ряд Фурье которой имеет расходящуюся почти всюду подпоследовательность частных сумм с номерами p_ν. Построение в основном аналогично примеру А. Н. Колмогорова интегрируемой функции с расходящимся почти всюду рядом Фурье.

А. А. Шнейдер

1384. О расходимости ряда Фурье. Кумари (On the nonconvergence of Fourier series. Kumari Sulaxana), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 293—299 (англ.)

Ван доказал, что для сходимости в точке $t = 0$ ряда Фурье четной интегрируемой функции $\varphi(t)$ достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^t \varphi(u)\,du = o(t^k) \qquad (t \to 0,\ k > 1), \qquad (1)$$

$$a_n > -Kn^{-1/k}, \qquad (2)$$

или условия

$$\int_0^t \varphi(u)\,du = o(t/\log t^{-1}) \qquad (t \to 0), \qquad (1)'$$

$$a_n > -K n^{-1} \log n, \qquad (2)'$$

где a_n — коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$, K — какое-нибудь положительное число.

Эти два признака сходимости принимают вполне законченный вид благодаря приведенным в реферируемой статье примерам расходящихся в точке $t=0$ рядов Фурье, показывающим, что ни одно из условий (1), (2), (1)′, (2)′ нельзя ослабить. Именно, оставляя без изменения условия (2) и (2)′, в условиях (1) и (1)′ нельзя заменить o на O. Оставляя же без изменения условия (1) и (1)′, нельзя заменить (2) и (2)′ соответственно на $a_n = O(\rho_n n^{-1/k})$ и $a_n = O(\rho_n n^{-1} \log n)$, где $\{\rho_n\}$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к бесконечности.

А. А. Шнейдер

1385. О локальной абсолютной суммируемости в смысле Чезаро. Цутикура, Сугаку, 1955, **7**, № 3, 29—31 (японск.)

1386. О сильной суммируемости степенных рядов Фурье. Кинукава (On certain strong summability of a Fourier power series. Kinukawa Masakiti), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, **9**, № 1, 12—22 (англ.)

Работа примыкает к предыдущим исследованиям автора (РЖМат, 1957, 4702) и Цутикуры (РЖМат, 1954, 5522).

Характерные результаты:

Теорема 1. Пусть аналитическая в $|z| < 1$ функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (1)$$

принадлежит H_1 и $f(e^{i\varphi})$ — ее граничные значения на $|z|=1$. Тогда конечность интеграла

$$\int_0^1 \Delta_1(r)\, M_p(r, f')\, dr \qquad (1 < p \leqslant 2)$$

влечет сходимость почти всюду ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sigma_n^{\delta}(\theta) - f(e^{i\theta}) \right|^q,$$

где

$$1/p+1/q=1; \qquad M_p(r, f')=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f'(re^{i\varphi})\right|^p d\varphi\right)^{1/p};$$

$\sigma_n^{\delta}(\theta)$ — чезаровские средние порядка δ для ряда (1) при $z=e^{i\theta}$; $\delta > 1/p-1$, если $\Delta_1(r)=(1-r)^{1/p-1}$, и $\delta = 1/p-1$, если $\Delta_1(r)=(1-r)^{1/p-1}\left(\lg\frac{1}{1-r}\right)^{1/p}$

Теорема 5. Если в точке θ

$$\int_0^t \left| f(e^{i\varphi+i\theta}) - f(e^{i\theta}) \right|^p d\varphi = O\{t \lg^{-\beta} t^{-1}\},$$

то в точке θ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sigma_n^{\delta}(\theta) - f(e^{i\theta})|^k}{n},$$

где $1 < p \leqslant 2$, $q \geqslant k > 0$, $\beta > p/k$ и $\delta > 1/p-1$.

П. Л. Ульянов

1387. О сильной суммируемости ряда Фурье. Чжоу Хун-цзин (On the strong summability of Fourier series. Chow Hung Ching), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 2, 161—170 (англ.)

Пусть четная функция $f(x)$ имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Через S_n обозначим частные суммы этого ряда при $x=0$. Положим

$$f_{\alpha}(x) = \alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \quad (\alpha > 0,\ x > 0).$$

Доказываются две теоремы:

1. Если $f_k(x) \to S$ для некоторого $k>0$ и при $0<\alpha<1/2$, $p > 1/(1-\alpha)$ выполняется соотношение

$$\int_0^x \left| f_{\alpha}(t) - S \right|^p dt = O(x) \qquad (x \to +0), \qquad (1)$$

то

$$\sum_{n=1}^{m} \left| S_n - S \right|^q = o(m) \text{ для всякого } q < 1/\alpha.$$

2. Если $f_k(x) \to S$ для некоторого k, $0 < k < 1$, и при $0 < \alpha \leqslant 1/2$, $p=1/(1-\alpha)$ выполняется соотношение (1), в котором O заменено на o, то

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{|S_n - S|^p}{n} = o(\log m).$$

При $\alpha=0$ теорема 1 сводится к результату Харди и Литлвуда.

А. А. Шнейдер

1388. Единственность кратных тригонометрических рядов. Шапиро (Uniqueness of multiple trigonometric series. Shapiro Victor L.), Ann. Math., 1957, 66, № 3, 467—480 (англ.)

Доказываются две теоремы о кратных тригонометрических рядах, первая из которых, в случае однократного тригонометрического ряда, сводится к теореме Верблюнского (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., 1939, 292—297). Более частные результаты для случая двукратных тригонометрических рядов были получены автором ранее (РЖМат, 1957, 8554). В работе принято векторное обозначение.

Теорема 1. Пусть n-кратный тригонометрический ряд

$$\sum a_m e^{i(m,x)} \qquad (1)$$

удовлетворяет условиям: 1) $\sum_{R-1<|m|<R} |a_m| = o(R)$ при $R \to \infty$; 2) $\bar{a}_m = a_{-m}$; 3) функции $f^*(x)$ и $f_*(x)$ конечны всюду, где $f^*(x)$ ($f_*(x)$) — верхний (соответственно нижний) предел абелевских средних ряда (1); 4) $f_*(x) \geqslant A(x)$, где $A(x)$ — интегрируемая L функция на $T_n = \{-\pi < x_1 \leqslant \pi, \ldots, -\pi < x_n \leqslant \pi\}$.

Тогда функция $f_*(x)$ L-интегрируема на T_n и ряд (1) есть ее ряд Фурье.

Теорема 2. Если ряд (1) удовлетворяет условию 1), а функции $f_*(x)$ и $f^*(x)$ интегрируемы L на T_n и конечны всюду на T_n, кроме, быть может, точки q, то ряд (1) является рядом Фурье функции $f_*(x)$.

Автор отмечает, что теорема 2 теряет силу для случая однократных тригонометрических рядов. Соответствующий пример можно найти в книге Зигмунда А., Тригонометрические ряды, М.—Л, 1939, 292.

П. Л. Ульянов

1389. Замечание к асимптотическому представлению ортогональных полиномов. Фрёйд (Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen. Freud G.), Math. scand., 1957, 5, № 2, 285—290 (нем.)

Пусть $f(\theta)$ — весовая функция периода 2π, $f(\theta) \in L$ и $\ln f(\theta) \in L$. Пусть далее $k(z) \equiv k(f, z)$ — регулярная аналитическая в круге $|z| < 1$ функция с $k(0) > 0$, вещественная часть которой для $|z| = 1$ имеет почти всюду граничные значения

$$\lim_{r \to 1-0} \operatorname{Re} k(re^{i\theta}) = \ln f(\theta),$$

$$D(f, z) = \exp\left\{\frac{1}{2} k(z)\right\}.$$

Рассматриваются ортогональные полиномы n-й степени

$$\Phi_n(f, z) = A_n(f) z^n + \ldots,$$

определяемые из условий:

а) $A_n(f) > 0$,

б) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(f, e^{i\theta}) |^2 f(\theta)\, d\theta = 1$,

в) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(f, e^{i\theta}) \overline{\pi(e^{i})}\, f(\theta)\, d\theta = 0$,

где $\pi(z)$ — любой полином степени ниже, чем n.

При некоторых условиях, накладываемых на функцию $f(\theta)$ (см., например, Szegö G., Orthogonal polynomials, N. Y., 1939), для полинома $\Phi_n(f, e^{i\theta})$ справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_n(f, e^{i\theta}) = e^{in\theta} \left\{ \overline{D_n(f, e^{i\theta})} \right\}^{-1} + o(1). \qquad (1)$$

В реферируемой статье доказывается, что если функция $f(\theta)$ имеет ограниченное колебание и $0 < m \leqslant f(\theta) \leqslant M$ для всех $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, то достаточным условием существования представления (1) в отдельной точке

$\theta = \gamma$ является существование в смысле главного значения по Коши интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma-\theta}{2}\,d\theta.$$

Доказывается, кроме того, что равномерно по θ и n $\Phi_n(f, e^{i\theta}) = O(1)$. А. В. Ефимов

1390. О точности приближения с узлами. Пашковский С., Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 11, 737—740

Сравнивается наилучшее приближение $E_n(\xi)$ непрерывной на $[a, b]$ функции $\xi(t)$ алгебраическими многочленами степени не выше n с ее наилучшим приближением $E_n(\xi, T)$ такими многочленами, принимающими в узлах $\{t_1, \ldots, t_m\} = T\ (a \leqslant t_1 < \ldots < t_m \leqslant b)$ значения $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_m)$, причем $n > m$. Доказывается теорема:

Пусть $m \geqslant 3$, $c = \frac{1}{2}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant m-1}(t_{k+1} - t_k)$,

$$d = \max_{1\leqslant k\leqslant m} \max\{t_k - a, b - t_k\},$$

$$p = \min\left\{6(b-a),\ \frac{m-1}{\pi}(2d - (m-1)c)\right\}.$$

Тогда для каждой непрерывной на $[a, b]$ функции $\xi(t)$ будет при $n \geqslant 14\left[\frac{p}{c}\right] + 12$ иметь место неравенство $E_n(\xi, T) \leqslant 2E_n(\xi)$. С. И. Зуховицкий

1391. О наилучшем приближении функции, определенной ее преобразованием Лапласа. Бутцер (Sur la meilleure approximation d'une fonction définie par sa transformée de Laplace. Butzer Paul L.), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 5, 687—689 (франц.)

Пусть $y(\sigma)$ — действительная аналитическая функция,

$$l_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{y^{(k)}(1/2)}{k!} \quad \text{и} \quad l(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n L_n(t) r^n,$$

где $L_n(t) = \frac{e^{t/2}}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$, $0 \leqslant r < 1$. Положив $r = e^{-\xi}$, обозначим $l(t, r)$ через $l_{\xi,t}[y(\sigma)]$.

Теорема 1. Пусть $x(t) \in L(0, R)$ для любого $R > 0$, $y(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u}x(u)\,du$ сходится при $0 < \sigma < \infty$. Тогда $\lim_{\xi\to+0} l_{\xi,t}[y(\sigma)] = x(t)$ для каждого значения t, для которого $\int_t^{t+h}|x(u) - x(t)|\,du = o(h)$, следовательно, почти всюду на $(0, \infty)$ $l_{\xi,t}[y(\sigma)] = T(\xi)[x]$ образуют полугруппу линейных операторов из L_1 в L_1, причем $T(0) = I$ и $T(\xi_1 + \xi_2)[x] = T(\xi_1)[T(\xi_2)[x]]$ $(\xi_1, \xi_2 \geqslant 0)$. Применяя теорию полугрупп и опираясь на свои предыдущие результаты (РЖМат, 1957, 5463), автор получает ряд теорем о приближении в пространстве L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ функции $x(t) \in L_p$ при помощи этих операторов. Аналогичная задача изучается с функциями Эрмита $H_n(t)$. С. И. Зуховицкий

См. также: 1659, 1670, 1677, 1717

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

1392. Всепольская конференция, посвященная теории аналитических функций (Ogólnopolska konferencja poświecona teorii funkcji analitycznych), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 246—248 (польск.)

Отчет о конференции, посвященной теории аналитических функций, состоявшейся в Лодзи 21—23 октября 1954 г. Конференция отметила, что исследования по теории аналитических функций проводились в Польше в 1944 — 1954 гг. в следующих направлениях: 1) применение метода экстремальных точек к конформным отображениям односвязных и многосвязных областей, к построению отображающих функций, к решению задачи Дирихле и к изучению области сходимости рядов однородных многочленов; 2) расположение нулей многочленов; 3) изучение p-листных функций топологическими и вариационными методами; 4) решение экстремальных задач однолистных функций вариационными методами и методом площадей; 5) изучение поведения функций в полуплоскости и в углах в зависимости от их поведения на границе.

Конференция постановила, наряду с продолжением исследований в этих областях, начать и развивать исследования по следующим вопросам: 1) применение метода экстремальных точек к вычислительным методам; 2) приведение к виду, удобному для вычислений, необходимых и достаточных условий Г. М. Голузина и В. Волибнера, основанных на методе площадей; 3) изучение экстремальных точек вариационными методами; 4) применение вариационных методов к изучению p-листных функций; 5) применения теории аналитических функций к интегральным и дифференциальным уравнениям.

В дальнейшем следует развивать также исследования по теории аналитических функций многих переменных, по теории римановых поверхностей, по квазианалитическим функциям. А. А. Гольдберг

1393. Об определении многозначной аналитической функции. Сикорский (O definicji funkcji analitycznej wieloznacznej. Sikorski R.) Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 208—210 (польск.)

Статья носит методический характер. По мнению автора, традиционное определение многозначной аналитической функции как множества аналитических элементов не согласуется с определением обычных многозначных функций и с „рабочим определением" таких многозначных функций, как $\ln z$, s^a, а кроме того, очень абстрактно, поэтому плохо усваивается средним студентом.

Предлагается следующий способ введения понятия многозначной аналитической функции. Сначала дается обычное определение аналитического продолжения мероморфной функции (Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, М., 1957, 258). Если каждой точке $z \in G$ поставлено в соответствие определенное множество $F(z)$ комплексных чисел, то говорим, что в области G определена многозначная комплексная функция F. Каждая мероморфная функция f, заданная в области $H \subset G$, такая, что $f(z) \in F(z)$ для каждого $z \in H$, называется (однозначной) ветвью F. Многозначную ком-

плексную функцию F в области G называем аналитической, если выполняются следующие условия: а) если $z_0 \in G$ и $w_0 \in F(z_0)$, то существует такая ветвь f функции F, определенная в некоторой области $H \subset G$, включающей z_0, что $f(z_0) = w_0$; б) если f и g — ветви функции F, то g является продолжением f в области G; в) если f является ветвью функции F, а мероморфная функция g является продолжением f в области G, то g является ветвью функции f.

Далее определяется естественная область определения аналитической функции и др.

Понятия аналитической функции и римановой поверхности — различные понятия, хотя и находящиеся во взаимно однозначном соответствии. В элементарном курсе трудно развить теорию римановых поверхностей, так как слушатель не имеет достаточных сведений по топологии, поэтому следует ограничиться отдельными примерами. А. А. Гольдберг

1394. Степенные ряды. Кошти (Power series. Koshti M. E.), J. Univ. Poona. Sci. and Technol., 1953, № 4, 108—115 (англ.)

Для аналитической функции $f(x+iy) = u + iv$ выводятся разложения

$$u = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{y^{2r}}{(2r)!} \frac{d^{2r} f(x)}{dx^{2r}},$$

$$v = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{y^{2r-1}}{(2r-1)!} \frac{d^{2r-1} f(x)}{dx^{2r-1}},$$

из которых при $f(z) = \frac{1}{z^n}$ можно получить такие разложения как

$$\cos^n\theta \cos n\theta = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n(n+1)\dots(n+2r-1)}{(2r)!} \operatorname{tg}^{2r}\theta.$$

Аналогичные приложения имеют разложения

$$u = u' + x\frac{dv'}{dy} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^2u'}{dy^2} - \frac{x^3}{3!}\frac{d^3v'}{dy^3} + \dots,$$

$$v = v' - x\frac{du'}{dy} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^2v'}{dy^2} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^3u'}{dy^3} + \frac{x^4}{4!}\frac{d^4v'}{dy^4} - \dots,$$

где $u' + iv' = f(iy)$. В. И. Левин

1395. Прямое доказательство теоремы Морера. Макинтайр (A direct proof of Morera's theorem. Macintyre A. J.), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 374—375 (англ.)

Предлагаемый способ доказательства теоремы Морера основывается на производимом обычными методами выводе равенства

$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0$, если z_0 лежит во внешности C.

Л. А. Маркушевич

1396. Теорема Коши. Спрингер (De stelling van Cauchy. Springer T. A.), Simon Stevin, 1958, 32, № 2, 68—79 (гол.)

1397. Обобщение разложений Якоби и соответствующих производных. Полл (Generalized Jacobi expansions and corresponding derivatives. Pall Gordon), Amer Math. Monthly, 1957, 64, № 8, Part 2, 71—78 (англ.)

Пусть $w = h(z)$ — некоторая функция (в частности, многочлен), определенная в некоторой области W комплексной плоскости или в некотором интервале W действительной оси. Пусть $z_i = p_i(w)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ — ветви обратной функции, так что $h[p_i(w)] = w$. Ветвь z_i определена в некоторой области Z_i комплексной плоскости или в некотором интервале Z_i действительной оси. Пусть, наконец, $q_1(z), \dots, q_n(z)$ — функции, определенные в Z_i $(i = 1,2,\dots,n)$. Рассматривается представление произвольной функции $f(z)$, определенной на системе Z_i (в разных Z_i функции $f(z)$, если они — аналитические, вообще различны) в виде

$f(z_i) = a_1(w)\,q_1(z_i) + \dots + a_n(w)\,q_n(z_i)$ $(i = 1,2,\dots,n)$.

Коэффициенты $a_j(w)$ определяются через $f(z_i)$, их свойства определяются свойствами $f(z_i)$, $q_j(z_i)$; если, например, $f(z)$ и $q(z)$ — аналитические функции в областях Z_i комплексной плоскости, то $a_j(w)$ — также аналитические функции. Выражение

$$D_h(f) = a_1'(w)\,q_1(z) + \dots + a_n'(w)\,q_n(z),$$

в котором w надо заменить на $h(z)$, автор называет h-производной функции f относительно системы p_i, q_i. Отмечаются некоторые свойства таких производных, в частности, находится выражение $D_h(f)$ непосредственно через $f(z)$. Например, если $h(z) = z^2 - rz + s$, $q_1(z) = 1$, $q_2(z) = z$ $(n = 2)$, то

$$D_h(f) = \frac{1}{h'(z)}\left\{f'(z) - \frac{f(z^*) - f(z)}{z^* - z}\right\}, \quad z^* = r - z.$$

Показывается, как можно решить отдельные функциональные уравнения, если их посредством подбора функции $h(z)$, $q_j(z)$ можно представить в форме

$$D_h(f) = g(z),$$

где $g(z)$ — известная функция. А. Ф. Леонтьев

1398. Об одном достаточном условии полноты системы $\{f^{(n)}(z)\}$. Шувалова Э. З., Матем. сб., 1958, **44**, № 1, 131—136

Пусть $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ — целая функция экспоненциального типа. Показывается, что если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N(n)}{n} = 0,$$

где $N(n)$ — число коэффициента $c_k \neq 0$ из совокупности $c_0, c_1, \dots, c_n$, то система $\{f^{(n)}(z)\}$ полна в любом конечном круге. А. Ф. Леонтьев

1399. Аппроксимация рациональными функциями и ограниченными аналитическими функциями. Уолш (Sur l'approximation par fonctions rationnelles et par fonctions holomorphes bornées. Walsh J. L.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **39**, 267—277 (франц.)

Автор излагает в настоящей статье результаты, несколько обобщающие и развивающие теоремы такого же типа, опубликованные им ранее. Приведем основные результаты.

Теорема 1. Пусть даны точки $a_1,\dots,a_\mu$; $b_1,\dots,b_\nu$ и положительные числа $m_1,\dots,m_\mu$, $n_1,\dots,n_\nu$ такие, что $\Sigma m_i = \Sigma n_i = 1$. Положим:

$$u(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1}\dots(z-a_\mu)^{m_\mu}}{(z-b_1)^{n_1}\dots(z-b_\nu)^{n_\nu}}$$

и обозначим для $\sigma > 0$ через E_σ множество точек, в которых $|u(z)| < \sigma$. Каждая функция $f(z)$, голоморфная в E_ρ, но не являющаяся голоморфной всюду в E_{ρ_1} при любом $\rho_1 > \rho$, представляется в E_ρ равномерно сходящимся внутри E_ρ интерполяционным рядом:

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n u_n(z), u_0(z) \equiv 1, u_n(z) = \frac{(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)\dots(z-\beta_n)};$$

точки $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ и $\beta_1, \dots, \beta_n, \dots$ могут быть выбраны так, что

$$A_1 < \left| \frac{(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n)}{[(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_\mu)]^n} \right| < A_2;$$

$$A_1 < \left| \frac{(z-\beta_1)\dots(z-\beta_n)}{[(z-b_1)\dots(z-b_\nu)]^n} \right| < A_2$$

для любого компакта, не содержащего точек $a_1, \dots, a_\mu$, $b_1, \dots, b_\nu$ соответственно. Коэффициенты c_n удовлетворяют соотношению $\overline{\lim} |c_n|^{1/n} = 1/\rho$. Для множества E_σ, $\sigma < \rho$ имеем:

$$\overline{\lim} [\max |f(z) - s_n(z)|, z \in E_\sigma]^{1/n} = \sigma/\rho,$$

$$s_n(z) = \sum_0^n c_k u_k(z).$$

Если, кроме того, $f(z)$ ограничена для E_ρ, то получаем:

$$|c_n| < A_3 \rho^{-n}; \quad [\max |f(z) - s_n(z)|, \ z \in E_\sigma] <$$

$$< A_4 \sigma^n / \rho^n, \quad \sigma < \rho.$$

Перечисленные в теореме 1 свойства интерполяционного ряда показывают, что он является весьма полным аналогом ряда Тейлора.

Теорема 2. Пусть D — область, ограниченная жордановыми контурами $B_1, \dots, B_\mu, C_1, \dots, C_\nu$, и пусть $u(z)$ — гармоническая функция в D, непрерывная в $\bar{D}$ и равная нулю на $B = \sum_1^\mu B_j$ и единице на $C = \sum_1^\nu C_j$. Для σ, $0 < \sigma < 1$, обозначим $D\sigma$ подобласть D, где $0 < u(z) < \sigma$. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в D_ρ и непрерывна на B. Тогда существуют функции $f_n(z)$, голоморфные в D, непрерывные на B и удовлетворяющие неравенствам:

$$\overline{\lim} [\max |f(z) - f_n(z)|, \ z \in B]^{1/n} < e^{-\rho/\tau},$$

$$\overline{\lim} [\max |f_n(z)|, \ z \in D]^{1/n} < e^{(1-\rho)/\tau},$$

где $2\pi\tau$ — полное изменение функции, сопряженной к $u(z)$, при обходе B. Если, кроме того, $f(z)$ ограничена в D_ρ, имеем, сверх этого:

$$[\max |f(z) - f_n(z)|, \quad z \in B] < A_1 e^{-n\rho/\tau}$$

$$[\max |f_n(z)|, \ z \in D] < A_2 e^{n(1-\rho)/\tau}$$

Теорема 4. В обозначениях теоремы 2, пусть $f(z)$ голоморфна в D_ρ, непрерывна в $\bar{D}_\rho$, и ее производная порядка p удовлетворяет на границе D_ρ условию Липшица порядка α, $0 < \alpha < 1$, ($f(z) \in L(p, \alpha)$). Тогда существуют функции $f_n(z)$, голоморфные в D и непрерывные на B, для которых выполняются неравенства:

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{A_1 e^{-n\rho/\tau}}{n^{p+\alpha}}, \ z \in B,$$

$$|f_n(z)| < A_2 \frac{e^{n(1-\rho)/\tau}}{n^{p+\alpha}}, \ z \in D.$$

Обратно: если $f(z)$ непрерывна на B и если $f_n(z)$ непрерывны на B, голоморфны в D и удовлетворяют последним двум неравенствам, для некоторых $p \geqslant 1$ и α, $0 < \alpha < 1$, тогда $f(z)$ голоморфна в D_ρ и $f \in L(p-1, \alpha)$ на границе D_ρ.

С. Я. Хавинсон

1400. Об аппроксимации ограниченными аналитическими функциями. Уолш (On approximation by bounded analytic functions. Walsh J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 2, 467—484 (англ.)

Пусть D есть конечная область, граница которой состоит из взаимно непересекающихся жордановых кривых $B_1, B_2, \dots, B_\mu$ и $C_1, C_2, \dots, C_\nu$ и $u(z)$ есть гармоническая в области D функция, непрерывная в $\bar{D}$, равная нулю на множестве $B = \sum_{i=1}^\mu B_i$ и единице на множестве $C = \sum_{i=1}^\nu C_i$. Пусть Γ_ρ, $0 < \rho < 1$, есть линия уровня $u(z) = \rho$ в D, обозначим через D_ρ подобласть D, для которой $0 < u(z) < \rho$. Граница области D_ρ есть $B + \Gamma_\rho$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу $L(p, \alpha)$ на Γ_ρ, $p \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, если она аналитическая в D_ρ, непрерывная вплоть до Γ_ρ и имеет на кривой Γ_ρ p непрерывных производных, причем p-я производная удовлетворяет условию Липшица порядка α. Если же в окрестности Γ_ρ при $z \in \Gamma_r$, $r < \rho$ выполняется неравенство $|f(z)| < M(\rho - r)^{p+\alpha}$, где $p < 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то $f(z) \in L(p, \alpha)$ на Γ_ρ. Заметим, что при $p \geqslant 0$ класс $L(p, \alpha)$ определяется для любой кривой, а при $p < 0$ только для линии уровня.

Теорема 1. Если аналитическая в D_ρ функция $f(z)$ принадлежит классу $L(p, \alpha)$ на Γ_ρ и $0 < \alpha < 1$, то существует такая последовательность функций $f_n(z)$, аналитических в области D и непрерывных вплоть до B, для которых выполняются неравенства

$$|f(z) - f_n(z)| < A_1 e^{-\frac{n\rho}{\tau}} \cdot n^{-p-\alpha}, \quad z \in B, \tag{1}$$

$$|f_n(z)| < A_2 e^{-\frac{n(1-\rho)}{\tau}} \cdot n^{-p-\alpha}, \quad z \in D, \tag{2}$$

где A_1, A_2 — постоянные, а $2\pi\tau$ есть полное изменение вдоль Γ_ρ функции, сопряженной с $u(z)$. Обратно, если функция $f(z)$ определена на B, а функции $f_n(z)$ аналитические в D и непрерывны вплоть до B и если при некотором целом p и $0 < \alpha < 1$ имеют место неравенства (1) и (2), то функция $f(z)$ есть аналитическая в D_ρ, непрерывная в $\bar{D}_\rho$ и принадлежит классу $L(p-1, \alpha)$ на кривой Γ_ρ.

В качестве следствия приводится следующее уточнение неравенств (1) и (2): прямое и обратное утвержде-

ния теоремы 1 имеют место, если вместо (1) и (2) имеем неравенства

$$|f(z)-f_n(z)| \leqslant A_3 e^{-\frac{n(\rho-r)}{\tau}} \cdot n^{-p-\alpha}, \quad z \in \Gamma_r, 0 \leqslant r < \rho, \quad (3)$$

$$|f_n(z)| \leqslant A_4 e^{\frac{n(r-\rho)}{\tau}} \cdot n^{-p-\alpha}, \quad z \in \Gamma_r, \quad \rho < r \leqslant 1. \quad (4)$$

Далее, прямое и обратное утверждения теоремы 1 имеют место, если вместо (3) и (4) выполняются неравенства

$$|f'(z)-f'_n(z)| \leqslant A_5 e^{-\frac{n(\rho-r)}{\tau}} \cdot n^{-p-\alpha+1}, \quad z \in \Gamma_r, 0 < r < \rho,$$

$$|f'_n(z)| \leqslant A_6 e^{\frac{n(r-\rho)}{\tau}} \cdot n^{-p-\alpha+1}, \quad z \in \Gamma_r, \quad \rho < r < 1.$$

Аналогично, вместо (3) и (4) можно рассматривать неравенства, в левых частях которых стоят интегралы от функций $f(z)$ и $f_n(z)$, а в правых частях показатель степени n уменьшается на единицу.

Подробно рассматривается случай $\alpha = 1$, для которого вводятся вместо $L(p, \alpha)$ классы функций, аналогичные классам Зигмунда в теории приближений, и получаются результаты, аналогичные теореме 1.

Рассматривается также случай семейства функций $f_\lambda(z)$ с непрерывным изменением параметра λ. Доказывается несколько других теорем, а также несколько частных лемм. Статья состоит из введения и 9 параграфов. Библ. 14 назв. П. К. Суетин

1401. Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применения к интерполяции. Евграфов М. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 89—201

Решается поставленная А. О. Гельфондом и В. Л. Гончаровым интерполяционная задача Абеля-Гончарова с узлами в точках $\{n^{1/\rho}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, и более общо, в точках $\{n^{1/\rho} l(n)\}$, где $l(n)$—медленно растущая функция, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} n \dfrac{l'(n)}{l(n)} = 0$. Используется метод близких систем, предложенный для L_2 Винером и Палеем и легко распространяемый на банаховы пространства. Автор распространяет этот метод на пространство аналитических функций, как известно, не являющееся банаховым. Впервые к аналитическим функциям в круге он был применен Боасом, но в предположении, что граничные значения функции принадлежат L_2.

Статья состоит из 4 глав.

В гл. 1 „Общие результаты" рассматриваются пространства $\mathfrak{A}(D)$, $\mathfrak{A}(\bar{D})$, $\mathfrak{A}(\Phi, D)$, $\mathfrak{A}(\Phi, \bar{D})$. Область D предполагается односвязной с односвязным дополнением, содержащим $z = \infty$. $\mathfrak{A}(D)$ — пространство функций, аналитических внутри D, топология определяется равномерной сходимостью последовательности функций в любой замкнутой части области D. $\mathfrak{A}(\bar{D})$ — пространство функций, аналитических в замкнутой области $\bar{D}$, топология определяется равномерной сходимостью в некоторой области $D_1 \supset \bar{D}$, зависящей от последовательности. $\mathfrak{A}(\Phi, D)$ — пространство целых функций $F(z)$, представимых в виде

$$F(z) = \int_C \Phi(z\zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \quad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m_n}, \quad m_n > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n} = \infty, \quad f(\zeta) \in \mathfrak{A}(CD),$$

CD — дополнение области D, замкнутый контур C заключает внутри себя все особые точки функции $f(\zeta)$; топология определяется условием: $F_n(z) \to F(z)$ в $\mathfrak{A}(\Phi, D)$, если $f_n(\zeta) \to f(\zeta)$ в $\mathfrak{A}(C\ D)$; $f(\zeta)$ называется Φ-ассоциированной с целой функцией $F(z)$, $\mathfrak{A}(\Phi, \bar{D})$ определяется аналогично. Устанавливается общий вид линейного функционала в каждом пространстве; например, в $\mathfrak{A}(\Phi, D)$ $L(F) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_C g(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta$, где $f(\zeta)$ — Φ-ассоциированная с $F(z)$, $g(\zeta) \in \mathfrak{A}(D)$, C лежит в области аналитичности функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ и содержит внутри все особые точки функции $f(\zeta)$. Доказывается равносильность слабой сходимости и сходимости по топологии. Определяются биортогональные и Φ-биортогональные системы в двух частных случаях: 1) системе функций $\varphi_n(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_{n,k} z^k$, $n = 0, 1, \ldots, a_{n,n} \neq 0$ (первая приведенная система) биортогональна система полиномов $\psi_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n,k}}{z^{k+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$, определяемая из условий $\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \varphi_m(z)\psi_n(z)\, dz = \delta_{m,n}$ (вторая приведенная система) Φ-биортогональна система полиномов $\psi_n^{\Phi}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n,k}}{m_k} z^k$, $n = 0, 1, \ldots$; 2) второй приведенной системе биортогональна первая.

Строятся ряды Фурье, например, для $F(z) \in \mathfrak{A}(\Phi, D)$ имеем $F(z) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$, $\varphi_n(z) \in \mathfrak{A}(\Phi, D)$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\psi_n(\zeta)\, d\zeta$, $f(\zeta)$ — Φ-ассоциированная с $F(z)$. Даются критерии разложимости функции по заданной системе. Указывается, что ряды по первой приведенной системе „чувствительны" (термин Уиттекера (Whittaker)) к области и „не чувствительны" к разлагаемой функции, т. е. в зависимости от области ряд может сходиться или не сходиться, а от функции требуется только, что она аналитическая в этой области, поведение же ее вне области роли не играет. Ряды по второй приведенной системе обладают противоположным свойством — „чувствительны" к функции и „не чувствительны" к области, т. е. если в зависимости от роста разлагаемой функции или расположения ее особых точек ряд сходится, то сходимость имеет место в максимально возможной области. Существует взаимность разложений функций по биортогональным системам:

Теорема 1. Для того чтобы ряд

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \; a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\psi_n^{\Phi}(\zeta)\, d\zeta,$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi(z\zeta) f(\zeta)\, d\zeta$$

сходился в $\mathfrak{A}(D)$ для любой $F(z) \in \mathfrak{A}(\Phi, |z| < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n^{\Phi}(z), b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(\zeta)\varphi_n(\zeta)\, d\zeta,$$

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi(z\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta$$

сходился в $\mathfrak{A}(|z|)<\infty)$ для любой $G(z)\in\mathfrak{A}(\Phi, D)$.

Вводится понятие правильной системы $\{\varphi_n(z)\}$, если она удовлетворяет условиям: 1. $\overline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi_n(z)|^{1/n}=u(z)$ в области $R_1<u(z)<R_2$, $u(z)=\rho$—замкнутые кривые, расширяющиеся при возрастании ρ и стягивающиеся в $z=0$ при $\rho\to 0$, D_ρ— область внутри $u(z)=\rho$; 2. $\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(z)|^{1/n}=u(z)$ для множества точек z, плотного в области

$$R_1<u(z)<R_2;\ 3.\ \lim_{n\to\infty}\left\{\max_{z\in D_\rho}|\varphi_n(z)|^{1/n}\right\}=\rho.$$

Правильные системы аналогичны системе степеней $\{z^n\}$;

ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(z)$ при $\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}=\frac{1}{\rho}$ сходится в области D_ρ и расходится вне ее на плотном множестве.

Доказывается

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ — первая приведенная система, правильная; $\psi_n(z)$ — биортогональная система. Для того чтобы $\{\varphi_n(z)\}$ была базисом в $\mathfrak{A}(D_\rho)$ при любом ρ, $R_1<\rho<R_2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\{\max_{z\in D_\rho}|\psi_n(z)|^{1/n}\}=\frac{1}{\rho},\ R_1<\rho<R_2.$$

Результаты гл. 1 пересекаются с результатами А. И. Маркушевича (Матем. сб., 1945, 17, № 2, 211—252), Ньюнса (РЖМат, 1953, 683) и референта (РЖМат, 1957, 6285).

Гл. 2 „Близкие системы" распадается на две части. В первой используется принцип, что линейный оператор, имеющий единственный обратный, преобразует базис в базис, полную систему — в полную. Доказывается

Теорема 3. Оператор $A(F)=F(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}K(z,\zeta)F(\zeta)\,d\zeta$ линеен и имеет единственный обратный

1) в пространстве $\mathfrak{A}(|z|<1)$, если

а) $K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(z)}{\zeta^{n+1}}$, $\varepsilon_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_{n,m}z^m$ регулярна при $|z|<r$, $|\zeta|>r$, $\alpha<r<1$;

б) $\sup_n\sum_{m=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,m}|\,r^{m-n}=\theta(r)<1, \alpha<r<1$;

2) в каждом пространстве $\mathfrak{A}(|z|<r)$, $r<1$, если

а) $K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+1}}\varepsilon_n(z)$ регулярна при $|z|<r$, $|\zeta|>r$, $r<1$;

б) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{m=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,m}|\,r^{m+1}=\theta(r)$, $\theta(r)<1$ при $r<1$. Отсюда, в частности, система $\{z^n+z^{n+1}\varepsilon_n(z)\}$ образует базис в любом круге $|z|<r$, $r<R$, если либо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,k}|\,r^k<1,\ r<R,$$

либо $\max_{|z|\le r}|\varepsilon_n(z)|\to 0$ при $n\to\infty$, $r<R$.

Доказывается

Теорема 4. Пусть $\varphi(z)$ — однозначная аналитическая функция, регулярная в области D, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)\neq 0$, $P(z)$ регулярна и не обращается в нуль в D. Обозначим через D_r, $D_r\ni 0$, связную компоненту точек z, $|\varphi(z)|<r$. Тогда система $\{P(z)[\varphi(z)]^n+[\varphi(z)]^{n+1}\varepsilon_n(z)\}$, $\max_{z\in\overline{D}'\subset D}|\varepsilon_n(z)|\to 0$ при $n\to\infty$, образует базис в каждой области D_ρ, где ρ определяется из условий $D_\rho\subset D$, $\varphi(z)$ однолистна в D_ρ.

Во второй части главы рассматриваются операторы, порожденные интерполяционной задачей Абеля-Гончарова. Основную роль играют при этом оценки многочленов Гончарова $P_n(z)=P_n(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1};z)$, определяемых условиями

$$\frac{d^k}{dz^k}P_n(z)|_{z=\lambda_k}=0,\ k<n,\ \frac{d^n}{dz^n}P_n(z)=1.$$

Основной результат:

Теорема 5. Пусть $\alpha(\rho)$ — верхний, $\beta(\rho)$ — нижний предел выражения $\{P_n(1,2^{1/\rho},\ldots,n^{1/\rho};0)\,\rho^n(n!)^{1-1/\rho}\}^{1/n}$ при $n\to\infty$. Если $\alpha(\rho)$ и $\beta(\rho)$ непрерывны, то для любой последовательности $\{\lambda_n\}$ положительных чисел $\lambda_n=\lambda(n)$, где $\lambda(n)$ — дважды дифференцируемая функция и $\lim_{n\to\infty}n\frac{\lambda'(n)}{\lambda(n)}=\frac{1}{\rho}$, верхний и нижний пределы при $n\to\infty$ выражения

$$\left\{P_n(\lambda_0,\ \lambda_1,\ldots,\ \lambda_{n-1};\ 0)\,\rho^n\frac{n!}{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}\right\}$$

также равны соответственно $\alpha(\rho)$ и $\beta(\rho)$.

Из этой теоремы легко получаются оценки для $P_n(z)$.

В гл. 3 „Сходимость интерполяционного ряда Абеля-Гончарова и некоторые свойства последовательных производных целых функций „вводится функция, обобщающая функцию Миттаг-Леффлера. Для $\rho\geqslant 1$ $E_\rho[z,\lambda(r)]=\frac{\rho}{2\pi i}\int_L\frac{e^{\zeta^\rho\lambda(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$, где $\lambda(r)$ — медленно растущая функция, L — произвольный контур, оставляющий слева точки $\zeta=z$ и $\zeta=0$. Для $\rho<1$ $\Gamma_\rho[z,\lambda(r)]=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+C_\rho\frac{z}{\mu(n)}\right)$, $\mu(n)$ — функция, обратная $n^\rho\lambda(n)$, $C_\rho=\left(\frac{\sin\pi\rho}{\pi}\right)^{1/\rho}$. Полагая $\Phi_\rho[z,\lambda(r)]$ равным $E_\rho[z,\lambda(r)]$ при $\rho\geqslant 1$ и равным $\Gamma_\rho[z,\lambda(r)]$ при $\rho<1$, изучается обобщенное преобразование Бореля $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\Phi_\rho[z\zeta,\lambda(r)]f(\zeta)\,d\zeta$. Подобное исследование E_ρ и Γ_ρ позволяет автору получить, применяя метод перевала, оценку

$$z^n\Phi^{(n)}(zn^{1/\rho})=k_nP_\rho(z)[\zeta_\rho(z)]^n+[\zeta_\rho(z)]^{n+1}\varepsilon_n(z),\qquad(1)$$

где k_n — некоторый числовой множитель, который здесь не выписываем и $\max_{z\in\overline{G}_\rho}|\varepsilon_n(z)|\to 0$ при $n\to\infty$; здесь

$\zeta_\rho(z) = \frac{z}{u_\rho(z)} e^{\frac{z}{\rho u_\rho(z)}}$, причем $u_\rho(z)$ есть точка перевала функции $\ln \frac{e^{(z+u)\rho}}{u}$, т. е. определяется из уравнения $\rho[z+u_\rho(z)]^{\rho-1} u_\rho(z) = 1$; область G_ρ состоит из точек z, для которых $|\zeta_\rho(z)| < \frac{\rho}{e}$ (при $\rho < 1$) или $|\zeta_\rho(z)| < e^{-1/\rho}$ (при $\rho \geqslant 1$) и образующих связное множество, содержащее $z = 0$; $\zeta_\rho(z)$ будет регулярна в области G_ρ. Система многочленов Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}$ Ф-биортогональна системе функций $\{z^n \Phi_\rho^{(n)}(\lambda_n z)\}$.

Согласно теореме 4 и оценке (1) последняя система образует базис, а отсюда, применяя теорему 1, следует

Теорема 6. Интерполяционный ряд Абеля-Гончарова с узлами $\{n^{1/\rho}\}$ для любой функции $F(z) \in \mathfrak{A}(\Phi_\rho, G_\rho)$ равномерно сходится к ней в любой конечной части плоскости.

Из теорем 5 и 6 следует

Теорема 7. Интерполяционный ряд Абеля-Гончарова с узлами $\{n^{1/\rho} l(n)\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{l'(n)}{l(n)} = 0$, для любой функции $F(z) \in \mathfrak{A}\{\Phi_\rho[z, \lambda(r)], G_\rho\}$ сходится к ней равномерно во всякой конечной части плоскости; $n^{1/\rho} l(n)$ есть функция, обратная $n^\rho \lambda(r)$.

В частности, справедлива

Теорема 8. Ряд Абеля-Гончарова с узлами $\{n^{1/\rho} l(n)\}$ равномерно сходится к интерполируемой функции $F(z)$, если $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{\nu(r)} < \sigma_\rho$, $M(r) = \max\limits_{|z|\leqslant r} |F(z)|$, $\nu[n^{1/\rho} l(n)] \sim n$; σ_ρ — некоторая константа, определяемая числом ρ.

Из теорем 7 и 8 вытекают теоремы единственности для целых функций, которые легко сформулировать. Специальный параграф посвящен обратным теоремам и свойствам последовательных производных целых функций. Приведем следующую теорему:

Теорема 9. Среди целых функций, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{\nu(r)} > \sigma_\rho, \quad \nu[n^{1/\rho} l(n)] \sim n, \lim_{n\to\infty} n\frac{l'(n)}{l(n)} = 0,$$

найдется по крайней мере одна, для которой ряд Абеля-Гончарова с узлами $\{n^{1/\rho} l(n)\}$ расходится.

Гл. 4 „Приближение функциями системы за пределами области сходимости ряда" посвящена следующим двум задачам теории интерполирования:

1. Найти класс функций, в котором операторное уравнение $A(F) = G$ имеет единственное решение.

2. Найти общий вид решения уравнения $A(F) = 0$ в заданном классе функций.

Автор обобщает ряд результатов, ранее полученных А. О. Гельфондом и А. Ф. Леонтьевым. Доказывает, что для уравнения

$$F(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{|t|=r} K(z,t) F(t)\, dt = G(z), \quad |z| < r,$$

$$K(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(z)}{t^{n+1}}, \qquad \varepsilon_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n,k} z^k$$

справедливы теоремы, аналогичные теоремам Фредгольма, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon_{n,k}| r^{k-n} = \Theta(r), \Theta(r) < 1, \rho_0 < r < \rho_1.$$

Полученные результаты позволяют исследовать разложение по функциям $\{z^n P(z) + z^{n+1}\varepsilon_n(z)\}$ в области, в которой $P(z)$ обращается в нуль, а также рассмотреть полноту и неполноту этих систем. Приведем только одну теорему

Теорема 10. Система $\{z^n P(z) + z^{n+1}\varepsilon_n(z)\}$, $P(z) \in \mathfrak{A}(|z| < R)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{|z|\leqslant r} |\varepsilon_n(z)| = 0$, $r < R$, полна в любой односвязной области D, лежащей в круге $|z| < R$ и не содержащей нулей функции $P(z)$. М. Г. Хапланов

1402. Интерполяция данной аналитической функции посредством аналитических функций минимальной нормы. Эванс, Уолш (On interpolation to a given analytic function by analytic functions of minimum norm. Evans J. P., Walsh J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 1, 158—172 (англ.)

Изучается следующая задача: Пусть область R_1 содержит точки $\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{31}, \ldots, \beta_{33}, \ldots$ и пусть функция $f(z)$ аналитична в этих точках. Исследовать сходимость к f последовательности $\{g_n(z)\}$, где $g_n(z)$ — функция, аналитическая в целой области R_1, совпадающая с $f(z)$ в точках $\beta_{n1}, \ldots, \beta_{nn}$ и обладающая минимальной нормой. При этом в настоящей работе рассматриваются интегральные нормы, например $\|F\| = \{\iint_{R_1} |F(z)|^q ds\}^{1/q}$.

В предыдущих работах Уолша рассматривался случай, когда $\|F\| = \sup |F(z)|$, $z \in R_1$ (Walsh J. L., Proc. Nat. Acad. Sci USA, 1938, **24**, 477—486; Trans. Amer. Math. Soc., 1939, **46**, 46—65).

Сформулируем полученный результат:

Теорема 1. 1. Пусть R_1 — конечная область с границей C_1, состоящей из конечного числа жордановых кривых. Пусть R_0 — множество, чья граница C_0 состоит из конечного числа жордановых кривых, причем $\overline{R}_0 \subset r_1$ и $\overline{R}_0$ не разделяет $R_1 - \overline{R}_0$ с C_1. Предположим, что последовательность $\{\beta_{nm}\} \subset \overline{R}_0$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} |(z-\beta_{n1})\ldots(z-\beta_{nn})|^{1/n} = e^{V_1(z)}$ равномерно на каждом замкнутом ограниченном подмножестве дополнения к $\overline{R}_0$. Пусть $V_2(z)$ — гармоническая в R_1, непрерывная в $\overline{R}_1$ функция, равная $V_1(z)$ на C_1. Предположим функцию $V(z) = V_1(z) - V_2(z)$ непрерывной и равной $\gamma(<0)$ на C_0.

Положим $\Phi(z) = 1 - \frac{V(z)}{\gamma}$ и через C_σ обозначим линию уровня $\Phi(z) = \sigma$. $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, в $\overline{R}_1 - R_0$, а через R_σ — множество, состоящее из $\overline{R}_0$ и тех точек $z \in R_1 - \overline{R}_0$, для которых $0 < \Phi(z) < \sigma$. Пусть функция $0 < \rho < \rho' < 1$ аналитична в R_ρ, но не аналитична ни в каком $R_{\rho'}, \rho' > \rho$. Тогда для фиксированного q, $0 < q \leqslant \infty$, последовательность экстремальных функций $F_n(z)$, $F_n(\beta_{nj}) = f(\beta_{nj})$, $j = 1, \ldots, n$; $\iint_{R_1} |F_n|^q ds = \min$ сходится к $f(z)$ в R_ρ, равномерно на всяком замкнутом подмножестве R_ρ, и мы имеем: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [\iint_{R_\sigma} |f(z) - F_n(z)|^t ds]^{1/n} = e^{\gamma(\rho-\sigma)}$, $0 \leqslant \sigma < \rho$. Кроме того, для $0 < t \leqslant \infty$, если $\rho \leqslant \sigma < s$, и для $0 < t \leqslant q$, если $q = 1$: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [\iint_{R_\sigma} |F_n|^t ds]^{1/n} = e^{\gamma(\rho-\sigma)}$

Теоремы 2. 1 и 3. 1 аналогичны теореме 1. 1 и касаются других метрик. Далее дается приложение полученных результатов для получения нового вывода и усиления теории Уолша и Дейвиса, касающейся рядов, являющихся для многосвязных областей полным аналогом ряда Тейлора.

В заключительном § 5 полученная теория развивается и применяется к изучению асимптотического поведения ортонормальных систем функций и, в частности, расположения их нулей. С. Я. Хавинсон

1403. Аналог внутренней теоремы площадей для псевдоконформного отображения единичного бицилиндра. Крушинг А. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 29—32

Берется единичный бицилиндр S и пара аналитических функций в S, отображающих S на некоторую область S' пространства двух комплексных переменных. В работе находится выражение величины четырехмерного объема области S' через коэффициенты Тейлора отображающих функций. А. А. Темляков

1404. Об однолистных отображениях единичного бицилиндра. Крушинг А. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 29—32

Пусть пара функций

$$W = f(w,z), \quad Z = \varphi(w,z), \tag{1}$$

аналитических в бицилиндре $S(|w)<1,\ |z|<1)$, осуществляет однолистное отображение этого бицилиндра на некоторую область S' четырехмерного пространства двух комплексных переменных w,z. Предполагая, что $\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0$ во всем бицилиндре S, автор устанавливает оценку

$$\frac{1-R}{(1+R)^3} \leqslant \frac{|I^*|}{\left|\frac{\partial^* f}{\partial^* w}\right|} \leqslant \frac{1+R}{(1-R)^3}, \tag{2}$$

где

$$I^* = \frac{I(w,z)}{I(w,0)}\left(I(w,z) \equiv \frac{D(f,\varphi)}{D(w,z)}\right)$$

$$\frac{\partial^* f}{\partial^* w} = \frac{\partial f(w,z)}{\partial w} : \frac{\partial f(w,0)}{\partial w}, \qquad R = \sqrt{|w|^2+|z|^2}.$$

В силу однолистности отображения (1) в S, $\frac{D(f,\varphi)}{D(w,z)} \neq 0$ во всем S и потому при $\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0$ в S возможны следующие случаи:

1. $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ во всем S,
2. $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ во всем S, тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ во всем S.

Рассматривая эти два случая, автор в первом случае получает еще две оценки

$$\frac{1-R}{(1+R)^3} \leqslant \frac{|I^*|}{\left|\frac{\partial^* f}{\partial^* z}\right|} \leqslant \frac{1+R}{(1-R)^3}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^4 \leqslant \frac{\left|\frac{\partial^* f}{\partial^* z}\right| |I(0,z)|}{\left|\frac{\partial^* f}{\partial^* w}\right| |I(w,0)|} \leqslant \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^4,$$

причем

$$I^* = \frac{I(w,z)}{I(0,z)}, \quad \frac{\partial^* f}{\partial^* z} = \frac{\partial f(w,z)}{\partial z} : \frac{\partial f(0,z)}{\partial z}.$$

Во втором случае — такие два неравенства:

$$\frac{1-R}{(1+R)^3} \leqslant \frac{|I^*|}{\left|\frac{\partial^* \varphi}{\partial^* z}\right|} \leqslant \frac{1+R}{(1-R)^3}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^4 \leqslant \frac{\left|\frac{\partial^* \varphi}{\partial^* z}\right| |I(0,z)|}{\left|\frac{\partial^* f}{\partial^* w}\right| |I(w,0)|} \leqslant \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^4,$$

где

$$I^* = \frac{I(w,z)}{I(0,z)}, \quad \frac{\partial^* \varphi}{\partial^* z} = \frac{\partial \varphi(w,z)}{\partial z} : \frac{\partial \varphi(0,z)}{\partial z}.$$

Примечание референтов. В оценках (2) и (3), (4) (в работе автора соответственно оценки (4) и (5), (7)) I^* определяется неодинаково, на что автор не указывает.

Имеются опечатки и пропуски. Например: на стр. 30, строки 10, 11 снизу, напечатано: $w_1 = \Phi(z_1,C)$, $w_2 = \Phi(z_2,C)$ вместо $W_1 = \psi(z_1,C)$, $w_2 = \psi(z_2,C)$; на стр. 31 строка 5 сверху, напечатано $\frac{\partial f(w,z)}{\partial z} : \frac{\partial f(0,0)}{\partial z} = \frac{\partial^* f}{\partial^* z}$ вместо $\frac{\partial f(w,z)}{\partial z} : \frac{\partial f(0,z)}{\partial z} = \frac{\partial^* f}{\partial^* z}$; на стр. 31, строка 6 сверху, напечатано $\frac{I(w,z)}{I(0,0)} = I^*$ вместо $\frac{I(w,z)}{I(w,0)} = I^*$; в оценках (6), (8) реферируемой статьи пропущен множитель $\frac{I(0,z)}{I(w,0)}$. А. А. Темляков, И. И. Баврин

1405. Об однолистных функциях с вещественными коэффициентами. Черников В. В., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2, Томск, Томский ун-т, 1957, 20

Для класса S_r однолистных и регулярных в круге $|z|<1$ функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ с вещественными коэффициентами a_n выводится вариационная формула. С помощью полученной формулы исследуются некоторые задачи об экстремумах функционалов. Для некоторых из них устанавливаются точные оценки. В заметке не приводятся доказательства и даже не приводятся полученные автором оценки. Н. А. Лебедев

1406. Области значений некоторых функционалов в классе функций, однолистных и регулярных в круге. Александров И. А., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2, Томск, Томский ун-т, 1957, 18—19

Пусть S_p $(p = 1,2,\ldots)$ — класс функций

$$f(z) = z + a_{p+1}z^{p+1} + a_{2p+1}z^{2p+1} + \ldots,$$

однолистных и регулярных в $|z|<1$. Автором с помощью метода, предложенного П. П. Куфаревым (РЖМат, 1958, 1998), найдена область значений функционала

$$I = \frac{z^n f'^m(z)}{f^n(z)\,|f(z)|^e}.$$

(При $e = 0$ получается результат референта: РЖМат, 1956, 7286). В работе приведены также и некоторые другие результаты.

Примечание референта. В задаче об области значений функционала I достаточно ограничиться классом S_1, ибо если $f_1(z)\in S_1$, то $f_p(z)=\sqrt[p]{f_1(z^p)}\in S_p$, и обратно. Н. А. Лебедев

1407. О преобразованиях Фурье и их применениях к рядам и о типично вещественных функциях порядка p. Артемиадис (Sur les transformées de Fourier et leurs applications aux séries et sur les fonctions typiquement réelles d'ordre p. Artemiadis Nicolas), Ann. scient. École norm. supér., 1957, **74**, № 4, 269—318 (франц.)

Работа, представляющая собой диссертацию, состоит из 3 глав. Пусть функция $f(x)\in L_1$ — пространству абсолютно интегрируемых на всей действительной оси функций и пусть

$$Tf(x)=T(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx$$

— ее преобразование Фурье. В первой главе доказываются теоремы, в которых приводятся оценки $f(x)$ при условии, что

$$\mathrm{Re}\,T(f)\geqslant 0. \qquad (1)$$

В качестве примера отметим следующую теорему: Если $f(x)\in L_1$, $f(x)$ непрерывна, $\mathrm{Re}T(f)\geqslant 0$, $\mathrm{Re}f(0)>0$, $T(f)\in L_1$, то

$$|f(x)|+|f(-x)|\{\cos(\arg f(x)+\arg f(-x))\}\leqslant 2\mathrm{Re}f(0),$$

$$[|f(x)|+|f(-x)|][1+\cos\{\arg f(x)+\arg f(-x)\}]\leqslant 4\mathrm{Re}f(0).$$

Условие (1) не всегда выполняется. В связи с этим указываются пути (это важно для приложений) построения по данной функции $f(x)$ новых функций, для которых указанное условие имеет место. Функция $P(x)$ называется регуляризацией функции $f(x)$, если $P(x)\in L_1$ и $\mathrm{Re}T(f+P)\geqslant 0$. Приведен способ конструкции $P(x)$ в виде ряда. Иногда удается подобрать функцию $B(\alpha)=T\beta(x)$ таким образом, что $\mathrm{Re}[\varphi(\alpha)B(\alpha)]\geqslant 0$, где $\varphi(\alpha)=T(f)$. На первом и втором пути можно в отдельных случаях просто оценить исходную функцию $f(x)$.

Во второй главе даются применения результатов первой главы к рядам Тейлора и рядам Дирихле. Относительно рядов Дирихле доказывается теорема: Пусть $\lambda_n\uparrow+\infty$, $\lambda_1=0$, $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant d>0$, ряд Дирихле $\sum_1^\infty a_n e^{\lambda_n s}$ сходится абсолютно в полуплоскости $\mathrm{Re}s<0$, $\mathrm{Re}a_1>0$. Если $\mathrm{Re}\left(\sum_1^\infty a_n e^{\lambda_n s}\right)\geqslant 0$, то $|a_n|\leqslant 2\mathrm{Re}a_1 (n=1,2,\ldots)$.

В части, касающейся рядов Тейлора, устанавливается ряд результатов относительно функций $F(z)=z+\sum_{n=2}^\infty a_n z^n$, регулярных и типично вещественных ($F(z)$ имеет действительные значения только при действительных z) в единичном круге, в частности, улучшается неравенство Мандельбройта: показывается, что при дополнительном условии $\lim\limits_{r\to 1-0}(1-r)^2F(r)=8l$ имеет место

$$\nu^2 l\leqslant 1+a_2+\ldots+a_{\nu-1}+\frac{a_\nu}{2}\leqslant 2F(1)$$

(у Мандельбройта слева стоит нуль). Рассматривается класс функций $F(z)=1+\sum_1^\infty a_n z^n$, $z=re^{i\alpha}$, регулярных в единичном круге и таких, что при $0\leqslant r_0\leqslant r<1$ выполняется соотношение

$$\mathrm{Re}F(z)\geqslant \mathrm{Im}F(z)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Например, доказывается, что если $F(r)\underset{r\to 1-0}{\sim}\frac{c}{1-r}$, то

$$1+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}\sim cn \text{ при } n\to\infty.$$

Для класса функций $F(z)=z+\sum_{n=2}^\infty a_n z^n$, $z=re^{i\alpha}$, регулярных в единичном круге и удовлетворяющих при $0\leqslant r_0\leqslant r<1$ условию

$$\mathrm{Re}F(z)+\frac{1+r}{1-r}\mathrm{Im}F(z)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\geqslant 0,$$

устанавливается, что $|a_n|\leqslant n$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

В третьей главе изучаются функции $F(z)=\sum_1^\infty a_n z^n$, регулярные и типично вещественные порядка p в единичном круге (коэффициенты a_n действительны и при $0\leqslant r_0\leqslant r<1$ $\mathrm{Im}F(z)$ меняет знак на окружности $|z|=r$ ровно $2p$ раз). На эти функции в случае $p=2$ обобщается определенным образом теорема Мандельбройта относительно типично вещественных функций порядка $p=1$.

Большинство результатов диссертации опубликовано ранее (РЖМат, 1956, 3093; 1957, 8569, 8570, 8731).

А. Ф. Леонтьев

1408. К структуре однолистных функций. Хорних (Zur Struktur der schlichten Funktionen. Hornich Hans), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 1-2, 38—49 (нем.)

Обозначим через $\mathfrak{R}$ пространство всех сходящихся в $|z|<1$ степенных рядов

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots$$

и положим

$$\|f\|=\sup_n\sqrt[n]{|a_n|},\quad \rho(f,g)=\|f-g\|.$$

Множество всех однолистных в $|z|<1$ функций из $\mathfrak{R}$ обозначим через S. К S будем также причислять $f(z)\equiv 0$. Дополнение к S в $\mathfrak{R}$ обозначим через T $(S+T=\mathfrak{R})$.

Автор исследует структуру метрического пространства $\mathfrak{R}$ и структуру множеств S и T в отношении их связности. Показывается: 1) пространство $\mathfrak{R}$ распадается на континуум связных компонент K, причем компонента состоит из всех функций вида $f(z)+g(z)$, где $f(z)$ — фиксированная функция, а $g(z)$ — произвольная целая функция; 2) расстояние между любыми двумя компонентами больше нуля; 3) каждая функция из $\mathfrak{R}$ есть точка сгущения функций из $\mathfrak{R}$, принадлежащих различным компонентам; 4) существуют компоненты пространства $\mathfrak{R}$, которые не содержат однолистных функций; 5) каждая компонента пространства $\mathfrak{R}$ содержит неоднолистные функции; 6) в каждой компоненте пространства $\mathfrak{R}$ множество неоднолистных функций связно. Н. А. Лебедев

1409. Лемма Шварца и особенность Брио и Буке. Винтнер (Schwarz's lemma and a singularity of Briot—Bouquet. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 4, 778—796 (англ.)

Доказывается лемма: Если: 1) В бицилиндре $\{|z|<1, |w|<1\}$ функция $f(z,w)$ голоморфна и удовлетворяет

условию $|f(z,w)|<1$; 2) $f(0,0)=0$. Тогда дифференциальное уравнение $z\frac{dw}{dz}=f(z,w)$ имеет единственное решение $w=w(z)$, удовлетворяющее начальному условию $w(0)=0$. Эта функция $w=w(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$. Указывается также ряд следствий из этой леммы. Б. А. Фукс

1410. Замечания к принципу Фрагмена—Линделёфа. Дингхас (Bemerkungen zum Phragmén—Lindelöfschen Prinzip. Dinghas Alexander. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1957, **30**, № 9, S. 59—64) (нем.)

Пусть функция $w(z)$ аналитична в полуплоскости $H:\operatorname{Re} z>0$ и для каждой конечной граничной точки z_0 полуплоскости H удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{z\to z_0}}\,|w(z)|\leqslant 1 \qquad (z\in H). \tag{1}$$

Система функций $\{\psi_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$,

$$\psi_n(\vartheta)=\begin{cases}\cos n\vartheta, & \text{если } n \text{ нечетно}\\ \sin n\vartheta, & \text{если } n \text{ четно,}\end{cases}$$

ортогональна в интервале $J:-\pi\leqslant 2\vartheta\leqslant\pi$, причем $\frac{2}{\pi}\int_J\psi_i\psi_k dx=\delta_{ik}$. Полагаем $z=re^{i\vartheta}$, и

$$P\left(\frac{1}{r},\ \upsilon\right)=\frac{a_1}{r}\psi_1(\vartheta)+\ldots+\frac{a_n}{r^n}\psi_n(\vartheta),$$

где коэффициенты a_k — действительные числа.

Допускается, что $P\left(\frac{1}{r},\vartheta\right)>0$ в каждой точке интервала J (с возможным исключением концов интервала), и рассматривается функция

$$\mu(r)=\int_J\ln^+|w(re^{i\varphi})|\,P\left(\frac{1}{r},\vartheta\right)d\vartheta.$$

Доказывается

Теорема 1. Если $w(z)$ аналитична в H и удовлетворяет условию (1), то либо $|w(z)|<1$ $(z\in H)$, либо функция $\mu(r)$, начиная с некоторого r, положительна и монотонно возрастает.

Важнейший частный случай, когда $P\left(\frac{1}{r},\vartheta\right)=\frac{\cos\vartheta}{r}$, впервые рассмотрел другим методом Альфорс (Ahlfors L., Trans. Amer. Math. Soc., 1937, **41**, 1—8).

Изучается вопрос о том, каким дополнительным условиям должна удовлетворять функция $w(z)$, чтобы $\mu(r)$ оставалась постоянной в некотором интервале изменения r.

В частности, в случае $P\left(\frac{1}{r},\vartheta\right)=\frac{\cos\vartheta}{r}$ оказалось, что $\mu(r)$ тогда и только тогда постоянна в интервале $[r,\rho]$ $(0<r<\rho)$, когда множество $\{z:|w(z)|=1,\ r<|z|<\rho\}$ пусто.

Результаты обобщаются также для случая функции $w(z)$, аналитической в области $G\subseteq H$, граница которой содержит точки $z=0$ и $z=\infty$, и в предположении, что для каждой конечной граничной точки c области G выполняется условие

$$\overline{\lim_{z\to c}}\,|w(z)|<1 \qquad (z\in G).$$

А. А. Бонами

1411. Некоторые неравенства для функций, голоморфных в полосе. Альбрехт (Einige Ungleichungen für in einem Parallelstreifen holomorphe Funktionen. Albrecht Rudolf), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 2, 146—162 (нем.)

Из теоремы Пика (G. Pick) непосредственными вычислениями выводятся некоторые неравенства для действительной и мнимой частей функций, голоморфных в полосе и имеющих там ограниченную действительную часть.

Пусть $w=f(z)$, $z=x+iy$, $u=\operatorname{Re} f(z)$, $v=\operatorname{Im} f(z)$, голоморфна в полосе $m_x<x<M_x$, $-\infty<y<\infty$ и $m_u<u<M_u$, где $M_u=\sup\operatorname{Re} f(z)$, $m_u=\inf\operatorname{Re} f(z)$.

Возьмем две различные точки $z_1=x_1+iy_1$, $z_0=x_0+iy_0$ полосы, и пусть ρ — неевклидово расстояние между ними, а $w_1=f(z_1)=u_1+iv_1$, $w_0=f(z_0)=u_0+iv_0$ — их образы. Из полученных оценок приводим ($b=M_u-m_u$):

$$|u_1-u_0|\leqslant\frac{2b}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\operatorname{sh}\frac{\rho}{2}. \tag{1}$$

Соответственным образом оценивается колебание мнимой части функции $f(z)$.

Далее получены неравенства для $\operatorname{Re} f(z)$ на прямых $x=\text{const}$. Для этого рассматриваются точки z_1 отрезка $E_{z_1}:\operatorname{Re} z=x_1=\text{const.}$, $m_x<x_1<M_x$, $\operatorname{Im} z_1=y_1$, $S_1<y_1<S_2$, $S_1=\text{const.}$, $S_2=\text{const.}$ Образ этого отрезка обозначим E_{w_1}. Пусть

$$M_1=\sup\operatorname{Re} f(x_1+iy_1)$$

$m_1=\inf\operatorname{Re} f(x_1+iy_1)$, причем $m_u<m_1\leqslant M_1<M_u$.

Рассмотрим также параллельный отрезок E_{z_2} и его образ E_{w_2}. Тогда установлено ($a=M_x-m_x$, $b=M_u-m_u$):

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_2-m_x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_1-m_x)}\geqslant\left\{\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_2-m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_1-m_u)}\right\}^{\delta}, \tag{2a}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_2-m_x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_1-m_x)}\geqslant\left\{\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(m_2-m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(m_1-m_u)}\right\}^{\delta}, \tag{2б}$$

где

$\delta=\begin{cases}+1, & \text{если } M_2\geqslant M_1 \text{ (соотв. } m_2\geqslant m_1)\\ -1, & \text{если } M_2<M_1 \text{ (соотв. } m_2<m_1).\end{cases}$

С помощью гармонической меры неравенствам (2а) и (2б) придается форма, инвариантная относительно конформных отображений.

В заключение находится аналог теоремы Жюлиа.

А. А. Бонами

1412. Экстремальная длина и емкость. Пфлугер (Extremallängen und Kapazität. Pfluger Albert), Comment. math. helv., 1955, **29**, № 2, 120—131 (нем.)

Автор исследует связи между логарифмической емкостью множеств и экстремальной длиной. Основной результат (теорема 1), полученный им, утверждает следующее:

Пусть E — произвольное множество точек на окружности $|z|=1$, Γ_0—жорданова кривая, лежащая в круге $|z|<1/3$ и охватывающая начало координат, и $Y=Y(E)$ — множество всех путей j внутри круга $|z|<1$, которые соединяют Γ_0 с точками множества E. Между константой Робэна γ_E множества E и экстремальной длиной $\lambda_{Y(E)}$ имеет место неравенство

$$2\gamma_E+k\leqslant 2\pi\lambda_{Y(E)}\leqslant 2\gamma_E+K,$$

где положительные числа k и K зависят только от Γ_0.

В частности, $\lambda_{\gamma(E)} = \infty$ лишь тогда, когда $\gamma_E = \infty$, т. е. когда внешняя емкость E равна нулю.

Автор дает приложения этой теоремы к вопросам конформного и квазиконформного отображения и теории мероморфных функций, получая новые результаты или новые доказательства известных фактов.

Отметим теорему 4: Квазиконформное отображение круга K_z на круг K_w индуцирует топологическое отображение окружности $|z| = 1$ на окружность $|w| = 1$, при котором соответствующие друг другу множества E_z и E_w либо одновременно имеют внешнюю емкость нуль, либо одновременно больше нуля. С. Я. Хавинсон

1413. Экстремальная длина и теория функций. Херш (Longueurs extrémales et théorie des fonctions. Hersch Joseph), Comment. math. helv., 1955, **29**, № 4, 301—337 (франц.)

Статья дает систематическое изложение результатов диссертации автора, опубликованных ранее в виде кратких заметок (РЖМат, 1954, 3677; 1955, 176, 5747).

С. Я. Хавинсон

1414. Суперпозиции целых функций. Бейкер (Zusammensetzungen ganzer Funktionen. Baker Irvine Noel), Math. Z., 1958, **69**, № 2, 121—163 (нем.)

В первой половине реферируемой работы дана оценка минимума модуля на кривых специального вида функции

$$F(z) = f(g(z)) \qquad (f(z) \text{ и } g(z) — \text{целые функции}).$$

Оценка основана на известной теореме Вимана. Укажем еще такой результат:

Теорема 5. Пусть заданы два числа ρ_g и ρ_G $(0 < \rho_g < 1,\ 0 < \rho_G < 1)$ и вещественная функция $\mu(r)$ $\lim\limits_{r\to\infty} \mu(r) = \infty$. Существуют две целых функции $g(z)$ и $G(z)$ порядка ρ_g, соответственно ρ_G, такие, что

$$M[G(g(z)), r] < \exp(r^{\mu(r)}).$$

Здесь, как обычно, $M(f, r) = \max_{|z|=r} f(z)$.

Во второй половине работы основное внимание уделяется перестановочным суперпозициям, т. е. таким, что

$$f(g(z)) \equiv g(f(z)) \tag{1}$$

$$(f(z) \text{ и } g(z) — \text{целые функции}).$$

Оказывается, что из (1) следует неравенство $M(g, r) < M(f_n, r)$, где f_n — некоторая итерация f, $r > r_0$. Если в (1) $g(z)$ — полином, а $f(z)$ — трансцендентна, то необходимо $g(z) \equiv ze^{2\pi i\alpha} + b$ (α — рационально). Если же $f(z) \equiv ae^{bz} + c$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, то $g(z)$ необходимо либо const, либо z, либо итерация $f(z)$. Интересна следующая

Теорема 9. Не существует семейства функций $f(\alpha, z)$, $\alpha \geqslant 0$ с такими свойствами: а) $f(\alpha, f(\beta, z)) = f(\alpha + \beta, z)$; б) $f(0, z) \equiv z$; в) $f(\alpha, z)$ для каждого $\alpha > 0$ целая функция z; г) хотя бы для одного $\alpha_0 > 0$ $f(\alpha_0, z)$ не линейна, д) $\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha, z) = z$.

В работе даны некоторые необходимые условия разрешимости в целых функциях функциональных уравнений

$$f(g(z)) = F(z) \text{ и } f(f(z)) = F(z) \tag{2}$$

($F(z)$ — заданная целая функция).

Изучается также возможность локального решения второго из уравнений (2). Результаты носят отрицательный характер, например: не существует голоморфного и равного нулю в нуле решения функционального уравнения: $f[f(z)] = e^z - 1$. (ср. РЖМат, 1958, 263). Библ. 28 назв. И. В. Островский

1415. Обобщение теоремы Картрайт о целой функции конечной степени, ограниченной на последовательности точек. Левин Б. Я., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, **21**, № 4, 549—558

Теорема Картрайт (Cartwright M., Quart. J. Math., Oxf. ser., 1936, **7**, 46—55) утверждает, что если целая функция $f(z)$ конечной степени удовлетворяет условию $h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$, где $h_f(\theta)$ — индикатор $f(z)$, то из неравенств $|f(\pm n)| \leqslant 1$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ следует ограниченность $|f(x)|$ на всей вещественной оси. Имеются различные обобщения этой теоремы. В ряде обобщений условие ограниченности $f(x)$ в целых точках заменено условием ограниченности $f(z)$ или в точках вещественной оси, уже не обязательно целых, или в точках комплексной плоскости. В работах Агмона (Agmon Sh., Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **70**, 492—508) и Н. И. Ахиезера (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1952, **16**, 353—364) предполагается, что $f(x)$ имеет мажоранту на последовательности точек и из этого выводится быстрота роста $f(x)$ на вещественной оси.

Данная статья примыкает по постановке вопроса к упомянутой работе Н. И. Ахиезера и ее основной результат представляет собой существенное обобщение его результатов.

Пусть целая функция $\omega(z)$ принадлежит классу P, т. е. она конечной степени, все ее корни лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и $h_\omega\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant h_\omega\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Положим $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$, причем тейлоровские коэффициенты у функций $P(z)$ и $Q(z)$ вещественные. Обозначим через α_k корни $P(z)$ (все они вещественные). Как известно,

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = az + b + \frac{A_0}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty} A_k\left[\frac{1}{z-\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\right]. \tag{1}$$

Основной результат (теорема 1) состоит в следующем: Пусть $\omega(z) \in P$ и в разложении (1) коэффициент $a = 0$. Если целая функция конечной степени $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{f(\pm iy)}{\omega(-iy)}\right| = O\left(e^{-\varepsilon|y|}\right)$$

и во всех корнях α_k функции $P(z)$ выполняется неравенство

$$|f(\alpha_k)| \leqslant |\omega(\alpha_k)|,$$

то при всех $h > 0$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leqslant C_h |\omega(x - ih)| \quad (-\infty \leqslant x \leqslant \infty), \tag{2}$$

где C_h — постоянная.

В теореме 2 приведены условия, достаточные для того, чтобы в неравенстве (2) можно было функцию $\omega(x - ih)$ заменить функцией $\omega(x)$. А. Ф. Леонтьев

1416. О росте аналитической функции на вертикальных прямых. Пейеримхоф, Рихерт (Über das Anwachsen analytischer Funktionen auf vertikalen Geraden. Peyerimhoff Alexander, Richert Hans-Egon), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1957, **11**, 125—134 (нем.)

Устанавливаются теоремы (типа теорем Фрагмена-Линделёфа) об оценке аналитической функции внутри полосы, когда известны ее оценки на границе.

В дальнейшем $\varphi_\nu(t)$ $(\nu = 1,2)$ означает положительную функцию, определенную для $t \geqslant T_0$ и такую, что для всех $y \geqslant T_0$ и $t \geqslant T_0$ выполняется (при некоторых постоянных γ и C) соотношение

$$\varphi(y) \leqslant Ce^{\gamma|y-t|}\varphi(t)$$

(такую функцию авторы называют нормально осциллляционной).

Теорема 1. Пусть функция $f(s)$, $s = \sigma + it$ регулярна в полуполосе

$$\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2, \quad t \geqslant T_0,$$

на вертикальных сторонах удовлетворяет условиям

$$|f(\sigma_\nu + it)| \leqslant \varphi_\nu(t) \quad (\nu = 1,2), \tag{1}$$

а внутри полуполосы равномерно $f(\sigma + it) + O(e^{Kt})$. Тогда внутри полуполосы

$$f(\sigma + it) = O\left(\varphi_1(t)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\varphi_2(t)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}\right). \tag{2}$$

Если в этой теореме (1) и (2) левые части заменим соответственно на

$$\left(\int_{T_0}^{t}|f(\sigma_\nu + i\mu)|^p d\mu\right)^{1/p} \quad \text{и} \quad \left(\int_{T_0}^{t}|f(\sigma + i\mu)|^p d\mu\right)^{1/p},$$

где $p \geqslant 1$, то получим теорему 2.

Приводится применение теоремы 1. Известно, что если σ_x — абсцисса C_x-суммируемости интеграла Лапласа

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-su}a(u)\,du, \tag{3}$$

то в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_x + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$f(\sigma + it) = O(t^{x+1}).$$

Показывается (теорема 3), что, каковы бы ни были числа $x \geqslant 0$ и α и функции $\eta(t)$, $0 \leqslant \eta(t) \uparrow +\infty$, существует интеграл Лапласа (3) такой, что для него $\sigma_x = \alpha$ и при всех $\sigma > \sigma_x$

$$f(\sigma + it) \neq O\left(\frac{t^{x+1}}{\eta(t)}\right).$$

Аналогичное утверждение имеет место для ряда Дирихле. А. Ф. Леонтьев

1417. К вопросу об одном классе целых функций. Репин И. И., Уч. зап. Щербаковск. пед. ин-та, 1956, вып. 1, ч. 2, 189—199

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел с показателем сходимости $\rho_1 > \rho$,

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}f(\lambda_k z) \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{1}$$

— последовательность агрегатов конечного порядка ω, удовлетворяющего условию: $\frac{1}{\omega} > \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}$. В статье автора (РЖМат, 1956, 5199) было показано, что если последовательность (1) сходится к предельной функции $P(z)$, то существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k} = c_k$ и при дополнительном предположении

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\ln|\lambda_n|}\ln\ln\left|\frac{1}{L^1(\lambda_n)}\right| \leqslant \rho_1, \tag{2}$$

($L(z)$ — каноническое произведение с нулями в точках λ_n) сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(\lambda_k z), \tag{3}$$

причем сходится к $P(z)$. Доказывается, что условие (2) для сходимости ряда (3) является необходимым в следующем смысле: по любым ρ_1 и $\overline{\rho}_1 > \rho_1$ можно построить последовательность $\{\lambda_n\}$ с показателем сходимости ρ_1 и $\delta = \overline{\rho}_1$ такую, что найдется последовательность (1), для которой ряд (3) расходится по меньшей мере в одной точке.

В статье имеется много опечаток, в частности вместо символа ln для логарифма всюду пишется e_n и вместо lim в некоторых местах — e_{lim}. А. Ф. Леонтьев

1418. О мероморфных функциях с ограниченной характеристикой. Сторвик (On meromorphic functions of bounded characteristic. Storvick David A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 32—38 (англ.)

Мероморфная в круге $|z| < 1$ функция $w = f(z)$ с ограниченной характеристикой называется функцией класса (B), если модуль ее радиальных граничных значений равен 1 почти всюду на $|z| = 1$; называется функцией класса (L), если ее значения лежат в какой-либо области G, граница которой Γ имеет положительную логарифмическую емкость, причем радиальные граничные значения принадлежат Γ почти всюду на $|z| = 1$ (класс (L) изучался в работах Лехто (O. Lehto) и Цудзи (M. Tsuji).

Доказывается, что в случае, когда функция $f(z)$ класса (B) не есть p-листная функция, отображающая $|z| < 1$ на односвязную область, ограниченную дугой единичной окружности, т. е. $f(z)$ не сводится к конечному произведению Бляшке, то каждое w, $|w| = 1$, принимаемое $f(z)$ конечное число раз, является ее асимптотическим значением. Автор далее доказывает, что для функции класса (L) каждая достижимая точка Γ есть радиальное граничное значение, указывая в примечании, что, как он узнал уже после сдачи статьи в печать, эта теорема была получена Лехто (РЖМат, 1956, 5206) и Оцука. Приводится пример функции класса (B), не принадлежащей (L). Библ. 14 назв.

А. И. Маркушевич

1419. О расположении нулей некоторых ортогональных функций. Уолш, Эванс (On the location of the zeros of certain orthogonal functions. Walsh J. L., Evans J. P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1085—1090 (англ.)

Пусть R будет конечная область плоскости z и $L^2(R)$ обозначает класс функций, аналитических в R с условием $\iint_R |f(z)|^2 dS < \infty$. Пусть точки β_1, β_2, β_3, ... заданы внутри R и $\varphi_n(z)$ — функция из класса $L^2(R)$, для которой $\varphi_n(\beta_1) = \varphi_n(\beta_2) = \ldots = \varphi_n(\beta_{n-1}) = 0$, $\varphi_n(\beta_n) = 1$ и которая минимизирует $\iint_R |\varphi_n(z)|^2 dS$ в

классе $L^2(R)$. Авторы доказывают следующую теорему: Пусть конечная область R содержит внутри точки $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ и все предельные точки $\{\beta_n\}$. Тогда во всяком круге, лежащем вместе со своей границей в R, содержащем внутри себя все предельные точки $\{\beta_n\}$, нет нулей $\varphi_n(z)$, отличных от $\beta_k (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ для достаточно большого n.

Эти же авторы установили раньше аналогичный результат для случая, когда двойной интеграл заменен контурным интегралом по границе области R (реф. 1402).

С. Я. Альпер

1420. Об одном классе аналитических функций на римановой поверхности, обобщающем абелевы интегралы. Телеман (O clasă specială de functii multiforme pe o suprafata riemanniana închisă. Teleman C.), Studii si cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 1-2, 163—182 (рум.; рез. русск., франц.)

На заданной римановой поверхности R рассматривается множество аналитических функций h таких, что каждая h является локальной униформизующей в некоторой односвязной области на R и различные функции h связаны между собой дробно-линейным преобразованием. Доказывается, что выражение $h_1 \circ h_2 = \{h_1\}_{h_2} dh_2$ ($\{h\}_\tau$ — шварциан от h по τ), построенное для любой пары функций h_1, h_2 из рассматриваемого множества, определяет квадратичный дифференциал, регулярный на R кососимметричный относительно h_1, h_2.

Получены явные выражения этих квадратичных дифференциалов на алгебраической кривой $F(z, u) = 0$ при некоторых предположениях относительно F и u, а также показано, что функции h на кривой $F(z, u)$ суть интегралы некоторых дифференциальных уравнений вида $\{h\}_z = H(z, u)$. При помощи функций h на R можно построить локально-евклидову конформную связность; установлено также, что локально-евклидовы конформные связности, определенные на замкнутой римановой поверхности рода $p > 1$, зависят от $3p-3$ произвольных постоянных. Библ. 8 назв.

И. И. Данилюк

1421. Дополнение к статье «Замечания к вопросу о конформном отображении римановой поверхности на себя». Оикава (A supplement to «Notes on conformal mappings of a Riemann surface onto itself». Oikawa Kotaro), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 3, 115—116 (англ.)

Пусть W — риманова поверхность рода g, имеющая k невырожденных компонент края и $N(g, k)$ — порядок группы, состоящей из всех конформных отображений W на себя. Пусть далее $N^1(g, k)$ обозначает порядок группы конформных отображений на себя римановой поверхности рода g с k выключенными точками. Дополняя свой ранее полученный результат (РЖМат, 1957, 5493), автор доказывает соотношение

$$N(g, k) = N^1(g, k)$$

при условии, что $2g + k - 1 \geqslant 2$ ($g \geqslant 0$, $k \geqslant 1$).

С. А. Гельфер

1422. Интегральные теоремы в теории функций многих комплексных переменных. Мартинелли (Teoremi integrali nella teoria delle funzioni di più variabili complesse. Martinelli Enzo), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1952—1953 (1954), 24, 172—182 (итал.; рез. англ.)

Излагаются общие результаты относительно распространения первой и второй интегральных теорем Коши на кратные интегралы от аналитических функций многих комплексных переменных (РЖМат, 1956, 373).

А. А. Темляков

1423. Характеристика следа голоморфной функции многих комплексных переменных на границе области. Фикера (Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse. Fichera Gaetano), Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 6, 706—715 (итал.)

Рассматривается ограниченная область A пространства комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$. Ее граница Σ предполагается 1 связной поверхностью действительной размерности $2n-1$, удовлетворяющей некоторым условиям гладкости. Функция $w(P)$ (где $P \in \Sigma$) называется следом функции $W(Q)$ (где $Q \in A$), если $\lim W(Q) = w(P)$ при $Q \to P$ по вектору $\lambda(P)$. Здесь $\lambda(P)$ — непрерывное поле векторов, заданных на Σ, причем в каждой точке $P \in \Sigma$ угол $(\lambda, V) < \frac{\pi}{2}$, где $V(P)$ — вектор внутренней нормали в точке P. При этом значения $w(P)$ не должны зависеть от выбора поля $\lambda(P)$. Оказываются справедливыми

Теорема 1. Если функция $W(Q)$ (где $Q \in A$) непрерывна в области A вместе со своими производными W'_{x_k}, W'_{y_k} $(k = 1, \ldots, n)$ и $\int_A \left| W'_{x_k} \right|^2 d\tau$, $\int_A |W'_{y_k}|^2 d\tau < +\infty$, то она обладает следом $w(P)$ на Σ. Функция $w(P)$ измерима на Σ и $\int_\Sigma |w|^2 d\sigma < +\infty$ (здесь $d\tau$ — элемент объема A, $d\sigma$ — элемент объема Σ). Функции $w(P)$, фигурирующие в теореме 1, составляют класс H.

Теорема 2. Для того чтобы функция $w(P) \in H$ являлась следом некоторой голоморфной на A функции $W(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Sigma [w \wedge d(\mu dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)] = 0$$

для всех внешних дифференциальных форм

$$\mu = z_1^{V_1} \ldots z_n^{V_n} \bar{z}_1^{\bar{V}_1} \ldots \bar{z}_n^{\bar{V}_n} \, d\bar{z}_1 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge d\bar{z}_{h-1} \wedge d\bar{z}_{h+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n,$$

где $V_1, \ldots, V_n, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n$, — любые неотрицательные целые числа, $n > 1$, $1 \leqslant h < k \leqslant h$.

Из теоремы 2, как следствие, получается классическая теорема Гартогса, устанавливающая, что функция голоморфная на границе Σ некоторой ограниченной области A, голоморфно продолжается внутрь этой области A.

Б. А. Фукс

1424. Приложение уравнений в конечных разностях к автоморфным функциям двух переменных с коммутативной группой. Мюрберг (Eine Anwendung der Differenzengleichungen auf gewisse automorphe Funktionen zweier Variablen, deren Gruppe kommutativ ist. Myrberg P. J., Suomalais. tiedeakat. toimituks, 1958, Sar. **A1**, № 248, 10 S.) (нем.)

Находится общий вид циклических коммутативных подстановок вида $x' = \alpha_\nu x + \beta_\nu$, $y' = a_\nu(x) y + b_\nu(x)$, где α_ν, β_ν — постоянные, $a_\nu(x)$ и $b_\nu(x)$ — целые функции. Для нециклического случая рассмотрение проводится только для групп с двумя образующими. Для указанных групп определяется общий вид соответствующих автоморфных функций.

Б. А. Фукс

1425. Голоморфные функционалы и комплексная выпуклость в пространствах Банаха. Бремерман (Holomorphic functionals and complex convexity in Banach spaces. Bremermann H. J.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 811—831 (англ.)

Комплекснозначный функционал G-голоморфен в области D комплексного пространства Банаха B_c, если его след в любой аналитической плоскости $z = z_0 + \lambda a$, где $z_0 \in D, a \in B_c$, λ—комплексный параметр, является голоморфной функцией от λ в пересечении этой плоскости с областью D.

Действительнозначный функционал плюрисубгармоничен в подобной области D, если его след в указанной выше плоскости субгармоничен в пересечении этой плоскости с областью D.

Область $D \subset B_c$ называется областью голоморфности, если существует функционал, G-голоморфный в этой области, который не может быть продолжен G-голоморфно за ее пределы.

В работе устанавливается ряд свойств областей голоморфности пространства B_c, в частности доказываются предложения:

Фундаментальная лемма: D—область комплексного пространства Банаха B_c; S—такая односвязная область в плоскости $z=z_0+\lambda b$, что $S \cup T \subset D$, где T— граница $S, z_0 \in D, b \in B_c$, λ—комплексный параметр; $X(\lambda)$ — функция, голоморфная в S, причем $X(\lambda) \neq 0$ и $|X(\lambda)|$ непрерывен в $S \cup T$. Обозначим $d^N_{a,D}(z')$ верхнюю грань радиусов кругов с центром в точке z' на плоскости $z=z'+a\lambda$ (где $a \in B_c, \lambda$—комплексный параметр), лежащих в D; $d_D^{(N)}(z')=\sup r$ для шаров $\{\|z-z'\|<r\} \subset D$, где $\|\ldots\|$ —норма N пространства Банаха B_c. Тогда: 1) Если $|X(\lambda)| d^{(N)}_{a,D}(z_0+\lambda b) \geqslant m>0$ при $(z_0+\lambda b) \in T$, то всякий функционал, G-голоморфный в области D, может быть G-голоморфно продолжен в те точки плоскости $z=z_0+\lambda b+\tau a$, для которых $(z_0-\lambda b) \in S \cup T$, $|\tau|<m \cdot |X(\lambda)|^{-1}$. 2) Если $|X(\lambda)| d_D^{(N)}(z') \geqslant m>0$ при $(z_0+\lambda b) \in T$, то всякий функционал, G-голоморфный в области D, может быть G-голоморфно продолжен во все точки z, для которых $\|z_0+\lambda b-z\|<m \cdot |X(\lambda)|^{-1}$ при $(z_0+\lambda b) \in S \cup T$.

Теорема. Если D — область голоморфности, то функционалы $-\ln d^{(N)}_{a,D}(z)$ и $-\ln d^{(N)}_D(z)$ плюрисубгармоничны в области D.

Область D называется псевдовыпуклой, если для всех $a \in B_c$ функционал $-\ln d^{(N)}_{a,D}(z)$ (или $-\ln d^{(N)}_D(z)$ — что оказывается равноценным) является в этой области плюрисубгармоничным. Как показывает автор, это определение инвариантно по отношению к способу определения нормы N при условии, что рассматриваемые нормы порождают эквивалентные топологии. Из предыдущей теоремы следует, что область голоморфности всегда псевдовыпукла.

Теорема о непрерывном расположении особых точек G голоморфной функции: Пусть D— псевдовыпуклая область, $\{S_\nu\}$—последовательность ограниченных областей, расположенных на комплексно-одномерных аналитических плоскостях, $\{T_\nu\}$ — границы этих областей, причем $\lim S_\nu = S_0$, $\lim T_\nu = T_0$. Тогда, если для всех ν оказывается $S_\nu T_\nu \subset D$, и $T_0 \subset D$, то $S_0 \subset D$.

Пусть B_r — действительное пространство Банаха, B_c— комплексное пространство Банаха, составляемое парами $(x,y)=x+iy$, где $x \in B_r, y \in B_r$; при этом произведение $\lambda(x,y)$ пары (x,y) и комплексного параметра $\lambda=\sigma+i\tau$ определяется равенством $\lambda(x,y)=(\sigma x-\tau y, \sigma y-\tau x)$, норма $\|\ldots\|_c$ пространства B_c —равенством $\|x+iy\|_c=(\|x\|_r^2+\|y\|_r^2)^{1/2}$. Трубообразная область Tx пространства B_c с основанием $X \in B_r$ определяется условиями: $x \in X$, $y \in B_r$.

Устанавливается, что G-голоморфный в области Tx функционал $f(z)$ определяется его следом на основании X. Доказывается теорема: Область Tx псевдовыпукла в том и только в том случае, если область X является выпуклой.

Ряд предложений работы обобщается на случай областей над комплексным пространством Банаха. В работе имеется ряд описок и опечаток Б. А. Фукс

1426. Построение оболочек голоморфности произвольных областей. Бремерман (Construction of the envelopes of holomorphy of arbitrary domains. Bremermann H. J.), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, **17**, № 4-5, 175—200 (англ.)

Каждая область $D_1 \supset D$, в которой голоморфны все функции, голоморфные в D, называется голоморфным продолжением области. Наибольшее возможное голоморфное продолжение области является ее оболочкой голоморфности.

Рассмотрение ведется в комплексном пространстве Банаха B_c. Из фундаментальной леммы автора (реф. 1425, там же определения и обозначения) следует:

Лемма. Если функция $f(z')$ голоморфна в области $T^*\{\|z'-z\|<m \cdot |\chi(z)|^{-1}, z \in T\}$, то она голоморфно продолжается на область $S^*\{\|z'-z\|<m \cdot |\varkappa(z)|^{-1}, z \in S\}$.

Если

$$m=\inf_{z \in T} d_D^N(z) \cdot |\chi(z)|, \quad S \cup T \subset D$$

и область D однолистна, то всякая функция, голоморфная в D, оказывается голоморфно продолжаемой на область S^*. При этом если множество $S^* \cap D$ связно, то всякая функция, голоморфная в D, остается однозначной при продолжении в $S^* \cup D$. В противном случае последнее, вообще говоря, не имеет места; тут получается многолистная область, обозначаемая символом $S^*_{\cap} D$. Ее различные листы непосредственно примыкают к различным связным компонентам множества $S^* \cup D$.

Доказывается теорема: Максимальное голоморфное продолжение области D, которого можно достичь при данном T применением предыдущей леммы, получается если взять $\chi(z)=\exp[h(z)+ih^*(z)]$, где гармоническая функция $h(z)$ определяется в области S своими значениями на границе: $h(z)=-\ln d_D^{(N)}(z)$ при $z \in T$, а $h^*(z)$— —гармоническая функция, сопряженная с $h(z)$. Описанный процесс легко итерируется, если область $S^* \widetilde{\cup} D$ однолистна. В этом случае его последовательное применение дает в пределе оболочку голоморфности области D. Для случая, когда области $S^* \cup D$ оказываются многолистными, автор указывает, как надо усложнить процесс продолжения для того чтобы, была возможна его итерация. Однако в этом случае нельзя утверждать, что в пределе обязательно получится оболочка голоморфности исходной области. Б. А. Фукс

1427 Д. Об областях значений некоторых функционалов на классе функций, регулярных и однолистных в круге. Александров И. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Томский ун-т, Томск, 1958

1428 Д. Суммирование рядов функций аналитических в единичном круге. Покало А. К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорусск. ун-т, Минск, 1958

См. также: 1389, 1438, 1443, 1614, 1662, 1679

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1429. Дифференциальные гипергеометрические операторы. Белардинелли (Operatori differenziali ipergeometrici. Belardinelli Giuseppe), Scritti mat. onore Filippo Sibirani, Bologna, 1957, 13—19 (итал.)

1430. Дифференциальные уравнения с кусочно-непрерывной правой частью. Филиппов А. Ф., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 4, 217—218

1431. Некоторые задачи в целом для дифференциальных уравнений первого порядка. Кордуняну (Cîteva probleme globale referitoare la ecuatiile diferentiale de primul ordin. Corduneanu C.), An stiint. Univ. Iasi., 1956, Sec. 1—2, №1—2, 33—52 (рум.; рез. русск., франц.)

Получен ряд результатов о существовании и единственности ограниченных (при $0 \leqslant x < \infty$ или $-\infty < x < \infty$) решений уравнения.

$$y' = f(x,y), \qquad (1)$$

о периодичности таких решений и т. д. В частности, доказаны следующие утверждения

Пусть при $x \geqslant 0$ функция $f(x,y)$ непрерывна, $0 < m \leqslant f'_y \leqslant M$, $f(x,0)$ ограничена. Тогда: 1) среди решений уравнения (1) существует (и только одно) решение $y(x)$, ограниченное при $0 \leqslant x < \infty$; 2) к $y(x)$ равномерно сходится последовательность $y_n(x)$, где y_n — ограниченное при $0 \leqslant x < \infty$ решение уравнения $y'_n - My_n = f(x,y_{n-1}) - My_{n-1}$; $y_0(x)$ — любая ограниченная непрерывная функция; 3) это решение $y(x)$ является периодическим (почти периодическим), если $f(x,y)$ периодична по x (почти периодична по x равномерно относительно y при $|y| \leqslant \frac{1}{m}\sup_x |f(x,0)|$); 4) к $y(x)$ равномерно сходится ограниченное решение уравнения $y' = f(x,y) + \alpha h(x,y,\alpha)$, если h непрерывна по x,y, удовлетворяет условию Липшица по y (равномерно относительно x и α), $|h(x,0,\alpha)| \leqslant C$ при $0 \leqslant x < \infty$, $|\alpha| \leqslant \alpha_0$. А. Ф. Филиппов

1432. Достаточные условия для продолжаемости всех решений стационарной системы на неограниченный в обе стороны интервал. Ястжембска-Олех (Sufficient conditions for all integrals of a stationary system to be determined in the bilateraly unbounded interval. Jastrzebska-Olech J.), Ann. polon. math., 1958, **4**, № 2, 220—225 (англ.)

Доказана следующая теорема: Пусть

$$\frac{dy}{dt} = F(y) \qquad (1)$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, — система дифференциальных уравнений в векторной записи; $F(y)$ непрерывна в области Ω; пусть $\mu(y,H)$ — расстояние от точки $y \in \Omega$ до границы H области Ω, а если Ω — все пространство, то $\mu(y,H) = 1 + |y|$; пусть функция $\lambda(z) > 0$ и непрерывна $(0 < z < \infty)$, $\int_a^b \frac{dz}{\lambda(z)}$ расходится как при $a \to 0$, так и при $b \to \infty$. Если $|F(y)| \leqslant \lambda(\mu(y,H))$ для всех $y \in \Omega$, то любое решение системы (1) продолжаемо на интервал $-\infty < t < \infty$.

Близкий результат получен Винтнером (Wintner A., Amer. J. Math., 1946, **68**, № 1, 173 — 178).

Примечание референта. Теорема справедлива и для систем вида $dy/dt = F(t,y)$. А. Ф. Филиппов

1433. Об одном дифференциальном уравнении Хальма. Долапчиев, Чобанов (Върху едно диференциално уравнение на J. Halm. Долапчиев Бл., Чобанов Ив.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1958, 3, № 1, 51—68 (болг.; рез. русск., нем.)

В работе находятся в замкнутой форме интегралы дифференциального уравнения

$$(1 + x^2)^2 y'' + (ax^2 + b)y = 0$$

Хальма, решенного последним в случаях $a = 0$ и $a = b + 3$ для других зависимостей между параметрами a и b. Это делается путем приложения к этим специальным случаям одного метода решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка при некоторых зависимостях, входящих в него параметров. Из резюме авторов

1434. Интегрирование дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи первых интегралов. Миу (Integrarea ecuatiilor diferentiale cu coeficienti constanti cu ajutorul integralelor prime. Miu I.), Caz. mat. si fiz., 1956, **A8**, № 9, 467—471 (рум.)

1435. Об итерации однородных линейных дифференциальных уравнений. Густый (O iteraci homogenních lineárních diferenciálních rovnic. Hustý Zdeněk), Sbor. Vysoké školy zeměd. a Lesn. fak. Brně, 1956, C, № 4, 133—148 (чешск.; рез. русск., нем.)

Приводятся необходимые и достаточные условия, которые должны быть наложены на коэффициенты уравнений

$$y''' + 3a_2 y'' + 3a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (1)$$

и

$$y^{(IV)} + 2a_3 y''' + 3a_2 y'' + 2a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (2)$$

чтобы уравнения (1), (2) возникли итерацией уравнения $A_1 y' + A_0 y = 0$,

Далее выведена каноническая форма линейного однородного дифференциального уравнения 4-го порядка и одна теорема об итерации линейного однородного разностного уравнения. Резюме автора

1436. Уравнение Т. Уно и Р. Йокоми. Сансоне (L'equazione di T. Uno e R. Yokomi. Sansone Giovanni), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1954—1955 (1956), **26**, 9 (итал.)

1437. О дифференциальном уравнении Хилла. Хассе (Über eine Hillsche Differentialgleichung. Hasse Maria), Wiss. Z. Friedrich—Schiller—Univ. Math.-naturwiss. Reihe, 1955—1956, **5**, № 3—4, 233—236 (нем.)

Решение дифференциального уравнения Хилла

$$\varphi'' + \{\lambda + \cos t(1 + \varepsilon\cos t)\}\varphi = 0$$

получено в виде $c_1 e^{\mu t} f(t) + c_2 e^{-\mu t} g(t)$.

Величины $e^{2\pi\mu}$ и $e^{-2\pi\mu}$ оценены как корни квадратного уравнения. В прямоугольной системе координат (λ, ε) построен график устойчивого решения. Решение будет неустойчивым, если действительная часть μ не стремится к нулю; оно устойчиво, если μ — чисто мнимое, а $e^{2\pi\mu} \neq 1$. S.Kulik

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 4, 311.

1438. Обыкновенные дифференциальные уравнения и преобразование Лапласа. Винтнер (Ordinary differential equations and Laplace transforms. Wintner A.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 2, 265—294 (англ.)

В первой части работы рассматривается линейное уравнение в комплексной области

$$\frac{d^2w}{dz^2} + g(z)\frac{dw}{dz} + f(z)w = 0.$$

Устанавливаются условия, при которых решение имеет вид

$$w(z) = c_1 zu(z) + c_2 v(z),$$

где $u(z)$ и $v(z)$ представляются интегральным преобразованием Лапласа — Стилтьеса.

Во второй части для нелинейного уравнения в комплексной области $dw/dz = f(z,w)$ устанавливаются условия, при которых решение $w(z)$ может быть представлено интегральным преобразованием Лапласа — Стилтьеса. П. И. Кузнецов

1439. О второй трансцендентной Пенлеве. Еругин Н. П., Докл. АН БССР, 1958, 2, № 4, 139—142.

Рассматриваются уравнения

$$W'' = 2W^3 + zW \pm \frac{1}{2}, \qquad (1)$$

которым удовлетворяют решения уравнений

$$W' = \pm (W^2 + z/2). \qquad (2)$$

Положив $W = x(z)/y(z)$, мы получим, что x, y — решение системы $x' = \varphi(z)x \pm \frac{z}{2} y$; $y' = \mp x + \varphi(z)y$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. Пусть

$$x(z) = e^{\int \varphi(z)\,dz} x_1;\ y(z) = e^{\int \varphi(z)\,dz} y_1.$$

Тогда

$$x_1' = \mp \frac{z}{2} y_1;\ y_1' = \mp x_1, \qquad (3)$$

$$y_1'' + \frac{z}{2} y_1 = 0. \qquad (4)$$

Преобразование

$$y_1 = z^{1/2} w;\quad \tau = \frac{\sqrt{2}}{3} z^{3/2}$$

приводит уравнение (4) к уравнению Бесселя порядка 1/3

$$\tau^2 \frac{d^2w}{d\tau^2} + \tau \frac{dw}{d\tau} + \left(\tau^2 - \frac{1}{9}\right) w = 0.$$

Всякое решение уравнения (4) имеет на полуоси $z > 0$ бесконечное число нулей z_n, асимптотическое расстояние между которыми определяется равенством

$$\delta_n = \frac{\pi\sqrt{2}\left[1 + Q\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{\sqrt{z_n}},$$

где $\lim_{n\to\infty}\left[nQ\left(\frac{1}{n}\right)\right] = A \geqslant 0$.

На полуоси $z < 0$ решения этого уравнения неколеблющиеся.

Решения уравнения (1), начальные значения которых W_0 и W_0', связаны соотношением $W_0' = -\frac{z_0}{2} - W_0^2$, имеют вид: $W = \mp \frac{y_1'}{y_1}$,

где

$$y_1 = z^{1/2}\left[AJ_{1/3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} z^{3/2}\right) + BJ_{-1/3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} z^{3/2}\right)\right],$$

A и B — произвольные постоянные. Ю. А. Рабинович

1440. К теории первого уравнения Пенлеве. Еругин Н. П., Докл. АН БССР, 1958, 2, № 1, 3—6

Рассматривается первое уравнение Пенлеве

$$W'' = 6W^2 + z. \qquad (1)$$

Доказывается, что

$$W = \frac{\zeta'^2 - \zeta\zeta''}{\zeta^2}, \qquad (2)$$

где $\zeta(z)$ — целое решение уравнения

$$\zeta\zeta^{IV} - 4\zeta'''\zeta' + 3\zeta''^2 + z\zeta^2 = 0. \qquad (3)$$

Если

$$W(0) = W_0,\ W'(0) = W_1, \text{ то } \zeta(0) = 1,\ \zeta'(0) = \frac{W_0^2}{2} - 2W_0^3;$$

$$\zeta''(0) = \zeta^{12}(0) - W_0;\ \zeta'''(0) = \zeta'^3(0) - 3W_0\zeta'(0) - W_1. \qquad (4)$$

С помощью уравнения (3) и формул (4) автор находит в случае

$$W_0 = 0,\ W_1 = 1\quad \zeta = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{7}{78} z^3 - \frac{31}{384} z^4 - \frac{111}{3840} z^5 + \ldots,$$

а в случае $W_0 = 1$,

$$W_1 = 0\quad \zeta = 1 - 2z + \frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 - \frac{11}{24} z^4 + \frac{77}{120} z^5 + \ldots \qquad (5)$$

Далее ищется решение уравнения (3) вида

$$\zeta = a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots \qquad (6)$$

Отправляясь от разложения $\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{(n)}(0)}{n!} z^n$ частного решения уравнения (3), для которого начальные значения $\zeta(0)$, $\zeta'(0)$, $\zeta''(0)$ и $\zeta'''(0)$ удовлетворяют условиям (4), мы можем приближенно найти наименьший по модулю корень уравнения $\zeta(z) = 0$. Тем самым мы приближенно найдем ближайшую от начала координат особую точку соответствующего решения $W(z)$ уравнения (1). Найдя z_0, мы построим разложение $\zeta(z)$ и $W(z)$ в окрестности z_0. Ю. Л. Рабинович

1441. О квазианалитических решениях одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. Грабовская Р. Г., Научн. ежегодник. Одесск. ун-та, 1956, Одесса, 1957, 119—121

Для дифференциального уравнения вида

$$W' = \frac{P(W, Z)}{Q(W, Z)}, \qquad (1)$$

где P и Q — полиномы относительно W с коэффициентами, аналитически зависящими от Z, рассматривается задача Коши: $W(Z_0) = W_0$ в предположении, что $P(W_0, Z_0) = 0$, $Q(W_0, Z_0) = 0$. Формулируется теорема, выделяющая класс уравнений вида (1), для которых решение поставленной задачи $W^0(Z)$ существует и удовлетворяет в некотором секторе положительного радиуса с центром в точке Z_0, содержащем угол, больший π, условиям теоремы Ватсона. Для этого решения пишется интегральное представление. Доказательства теоремы не приводится. Д. П. Костомаров

1442. Определение оптимальной реакции линейных систем (Системы с нулевой ошибкой смещения). Бабистер (Determination of the optimum response of linear systems (zero displacement error systems). Babister A. W.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1957, **10**, № 4, 504—512 (англ.)

Рассматривается задача подбора параметров a_k асимптотически устойчивой линейной системы

$$a_n \frac{d^n x}{d\tau^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{d\tau} + a_0 x = f(\tau) \qquad (1)$$

таким образом, чтобы реакция этой системы на возмущающее воздействие $f(\tau)$ ($f = 0$ при $\tau < 0$, $f = f_0$ при $\tau \geqslant 0$) была оптимальной в определенном смысле. Для уравнения (1), приведенного заменой $\omega_0\tau = u$ к виду

$$\frac{d^n x}{du^n} + q_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{du^{n-1}} + \ldots + q_1 \frac{dx}{du} + x = \frac{f_0}{a_0} \quad (\tau > 0),$$

в предположении $f_0/a_0 = 1$ выписываются формулы для вычисления коэффициентов q_k, при которых величина

$$L = \int_0^\infty e^2(\tau)\, d\tau$$

($e(\tau)$ — ошибка смещения) имеет минимум. Приводится таблица корней характеристического уравнения, соответствующая $L_{\min}$ в случаях $n=2, 3, \ldots, 8$. Реакция системы при $L_{\min}$ обладает рядом отрицательных черт: наличие существенного перерегулирования, медленное затухание членов большой частоты и в соответствии с этим — большое значение величины

$$L_1 = \int_0^\infty \left(\frac{de}{d\tau}\right)^2 d\tau.$$

Для получения более удовлетворительной реакции системы предлагается приближенный способ построения оптимальной системы. При этом способе коэффициенты q_k выбираются из окрестности значений их, дающих $L_{\min}$, таким образом, что величина L незначительно увеличивается, а величина L_1 существенно уменьшается. Из условий

$$\frac{\partial L_1}{\partial q_r} = 0 \quad (r=1, \ldots, n-3), \quad \frac{\partial L_1}{\partial q_r} = -\frac{1}{2}\omega_0 \quad (r = n-2,\ n-1),$$

выполняющихся в точке $L_{\min}$, следует, что для указанной выше цели достаточно увеличить q_{n-1} и q_{n-2} на некоторую величину θ. Указывается правило для подбора θ. Приводятся кривые переходного процесса при $n=4$ и $n=5$ в системах, построенных предложенным способом, а также таблицы корней характеристического уравнения для этих систем (для $n=3, 4, \ldots, 8$). Из графиков и таблиц следует, что системы, построенные описанным приближенным способом, обладают рядом преимуществ (в частности, более „гладкая" реакция на возмущение f), сравнительно с системами, построенными для $L=L_{\min}$. Н. Н. Красовский

1443. Некоторый класс систем дифференциальных уравнений и его исследование матричными методами. I. Макаи (A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods. I. Makai E. Publs math., 1957, 5, № 1-2, pp. 5—37) (англ.)

Рассматривается линейная дифференциальная система типа Фукса специального вида

$$(xE - A_1)\, dy/dx = Ay, \qquad (1)$$

где E — единичная матрица, A_1, A — постоянные (комплексные!) $n \times n$-матрицы, причем A_1 диагональна и неособенна.

Указывается, что всякое решение какой-нибудь аналитической линейной дифференциальной системы в замкнутой подобласти плоскости x, не содержащей особых точек этого решения, можно сколь угодно близко (в метрике пространства C) аппроксимировать решением некоторой системы вида (1). Многие из известных линейных дифференциальных уравнений (Гаусса, Бесселя, Уиттекера, Ламе, Матье, Хейна, Похгаммера, уравнения для полиномов Якоби и Лагерра и т. д.) сводятся к системам типа (1), приобретая при этом, как правило, более симметричный (сравнительно с записью в виде одного уравнения) вид.

Обычными приемами находится разложение решения (1) в степенной ряд в окрестности $x = 0$ с радиусом сходимости, равным наименьшему из модулей собственных чисел A_1.

Особое внимание уделено выявлению случаев, когда (1) полиноминальное решение, и построению таких решений. Задача нахождения полиномиальных решений переформулирована в терминах операционного исчисления. Доказано, что множество линейных комбинаций собственных функций оператора $(xE - A_1)\, d/dx - A$, т. е. полиномиальных решений системы $(xE - A_1)dy/dx = (A + \lambda E)\, y$, плотно в пространстве вектор-функций, регулярных в данной замкнутой области.

В качестве примера общего характера подробно изучено линейное дифференциальное уравнение второго порядка, сводящееся к (1), причем рассмотрены и различные исключительные случаи.

Библ. 10 назв. Автор не упоминает работ советских математиков, в частности работ И. А. Лаппо-Данилевского. Ю. С. Богданов

1444. Представление чисел влияния в матричном виде. Бауэр (Darstellung von Einflußzahlen in Matrizenschreibweise. Bauer W.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7—8, 272 (нем.)

1445. Уравнение Матьё и интегральное уравнение Вольтера. Пароди (Équations de Mathieu et équations intégrales de Volterra. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 15, 1006—1007 (франц.)

Предлагается способ приближенного нахождения решений уравнения Матье

$$y'' + (\eta + \gamma\cos t)y = g(t), \qquad (1)$$

состоящий в сведении уравнения (1) при помощи преобразования Лапласа к уравнению Вольтерра

$$y(t) + \frac{\gamma}{\sqrt{\eta}}\int_0^t \sin\sqrt{\eta}\,(t-\tau)\cos\tau y(\tau)d\tau = y(0)\cos\sqrt{\eta}\,t + \frac{y'(0)}{\sqrt{\eta}}\sin\sqrt{\eta}\,t + \frac{1}{\sqrt{\eta}}\int_0^t \sin\sqrt{\eta}\,(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Аналогичный способ предлагается для решения уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (\eta + \gamma\cos x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \qquad (2)$$

состоящий в сведении (2) к интегральному уравнению

$$y(t,x) - (\eta + \gamma\cos x)\int_0^t (t-\tau)\frac{\partial^2 y(\tau,x)}{\partial x^2}d\tau - y(0,x) - t\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0.$$

А. Ф. Зубова

1446. Решение операционным методом некоторых дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Муравьев П. А., Матем. сб., 1958, **44**, № 2, 157—178

Операционным методом интегрируются линейные однородные уравнения n-го порядка с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами и с одним постоянным запаздыванием и системы таких же уравнений первого порядка. Доказывается теорема существования и единственности решения основной начальной задачи. Даются точные и приближенные формулы решений с оценкой погрешности. Приведены примеры.

Примечание референта. Теоремы существования и единственности для таких уравнений значительно более общего вида известны. Л. Э. Эльгольц

1447. О решении линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристических

уравнений. Дрымбэ (Asupra solutiilor sistemelor de ecuatii diferentiale, liniare, omogene, cu coeficienti constanti, in cazul radacinilor multiple ale ecuatiei caracteristice. Drîmbă C.), Gaz. mat. si fiz., 1956, **A8**, № 9, 459—463 (рум.)

1448. Построение обобщенной функции Грина для уравнения колебания стержня. Галустян С. Б., Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1956, вып. 14, стр. 85—106

В работе автора (РЖМат, 1958, 9850) построена функция Грина для уравнения

$$v^{(IV)}(x) - \lambda\rho(x)v(x) = 0 \qquad (1)$$

при однородных краевых условиях:

$$\alpha_1 v(x_0) + \alpha_2 v'''(x_0) = 0,\ \beta_1 v'(x_0) - \beta_2 v''(x_0) = 0,$$

$$\gamma_1 v(x_1) + \gamma_2 v'''(x_1) = 0,\ \delta_1 v'(x_1) + \delta_2 v''(x_1) = 0 \qquad (2)$$

в предположении, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

В данной работе рассматривается случай, когда $\lambda = 0$ служит собственным значением задачи. Вводится понятие обобщенной функции Грина $K(x,s)$ для задачи (1)—(2).

Обобщенная фукция Грина строится отдельно для случая, когда $\lambda = 0$ — простое собственное значение и когда оно кратно. Доказана симметричность функции $K(x,s)$ относительно параметра и аргумента. Рассмотрены 4 примера. Автор не цитирует работ Янчевского, в которых рассмотрены многие аналогичные задачи (Ann. Math., 1927—1928, **29**, 521—542; 1930, **31**, 663—680; Докл. АН СССР, 1935, **1**, 89—92). Р. С. Гусарова

1449. О краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения. Рофе-Бекетов Ф. С., Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 149—154

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x,y), \qquad (1)$$

для которого ищется решение при условиях

$$y(a) = A,\ y(b) = B. \qquad (2)$$

Предположим, что существуют при $x \in [a,b]$ две кривые $y = p(x)$ и $y = g(x)$ $(p(x) \geqslant q(x))$ такие, что

$$p''(x) \leqslant f(x,p(x)),\ q''(x) \geqslant f(x,q(x));$$

$$p(a) \geqslant A \geqslant q(a),\ p(b) \geqslant B \geqslant q(b),$$

причем $p''(x)$ и $q''(x)$ могут иметь конечное число разрывов, но должны быть абсолютно интегрируемы.

Предполагается далее, что в области $S: a \leqslant x \leqslant b,\ q(x) \leqslant y \leqslant p(x)$ между кривыми $p(x)$ и $q(x)$ функция $f(x,y)$ непрерывна, за исключением, быть может, конечного числа точек, лежащих на граничных кривых $p(x)$ и $q(x)$, и монотонно убывает по y. Тогда краевая задача (1), (2) имеет по крайней мере одно решение, лежащее в области S. Н. И. Мозжерова

1450. О характеристиках, входящих в начало с нулевыми и бесконечными порядками или мерами кривизны. Куклес И. С., Груз Д. М., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1958, № 1, 15—27 (рез. узб.)

Уравнение

$$X(x;y)dy = Y(x,y)dx, \qquad (1)$$

где $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ — квазианалитические функции (РЖМат, 1958, 6681), подробно исследуется методом Фроммера на предмет выяснения возможных порядков и мер кривизны характеристик $y = y(x)$, примыкающих к началу координат. Общий план изложения отличается от принятого Фроммером. Часть результатов являются новыми и в случае аналитических $X(x,y)$ и $Y(x,y)$. Это результаты, относящиеся к вопросу о существовании характеристик с нулевой и бесконечной мерами кривизны. Формулируются они в терминах характеристической ломаной (ломаная Фроммера, служащая для определения возможных порядков кривизны).

Автор называет обыкновенным звеном звено ломаной, принадлежащее лишь одной прямой схемы Фроммера, особым—звено, принадлежащее двум слившимся прямым. Далее, он называет а) обыкновенным порядком кривизны порядок кривизны, которому соответствует лишь конечное число различных мер кривизны, причем все эти меры отличны от нуля и бесконечности б) левым (правым) квазиособым—порядок кривизны, которому, помимо мер кривизны, указанных в а), соответствует еще нулевая (бесконечная) мера кривизны, причем число характеристик с этой мерой кривизны бесконечно велико, в) особым — порядок кривизны, которому соответствует бесконечное число различных мер кривизны.

Упомянутые результаты автора можно сформулировать следующим образом:

1) Порядок кривизны $0 < \lambda < +\infty$, равный абсциссе точки пересечения обыкновенных звеньев характеристической ломаной, является обыкновенным.

2) Порядок кривизны $0 < \lambda < +\infty$, равный абсциссе левого (правого) конца особого звена, может быть обыкновенным, особым, левым (правым) квазиособым. При этом результаты автора всякий раз позволяют определить, какой именно из этих случаев имеет место. А. Ф. Андреев

1451. О числе операций, связанных с применением метода Фроммера. Куклес И. С., Груз. Д. М., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем. н., 1958, № 1, 29—45 (рез. узб.)

Пусть для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}, \qquad (1)$$

где X и Y — ряды по степеням x и y, сходящиеся в окрестности (0, 0) и исчезающие в (0, 0), число $\lambda > 0$ есть обыкновенный порядок кривизны характеристик, примыкающих к (0, 0) (реф. 1450). Замена $y = ux^\lambda$ преобразует уравнение (1) к виду

$$\frac{du}{dx} = \frac{P_1(u) + x^{h_1}R_1(x,u)}{x^m[P_2(u) + x^{h_2}R_2(x,u)]}. \qquad (2)$$

Ненулевые корни γ многочлена $P_1(u)$ являются мерами кривизны характеристик уравнения (1), примыкающих к (0, 0) с порядком кривизны λ. Авторы изучают вопрос о числе операций (подстановок некоторого вида), которые надо сделать, чтобы выяснить, имеет ли уравнение (1) характеристики вида

$$y = \gamma x^\lambda + 0(x^\lambda) \qquad (3)$$

и если имеет, то одну или бесконечно много.

Сначала рассматривается случай $P_2(\gamma) \neq 0$,

$$P_1(u) = (u - \gamma)^n \overline{P}_1(u),\ \overline{P}_1(\gamma) \neq 0.$$

В этом случае замена $u = \gamma + v$ в уравнении (2) сводит задачу о существовании и числе решений вида (3) урав-

нения (1) к задаче о существовании и числе решений $v(x)$, $v \to 0$ при $x \to 0$, уравнения

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i v^{n+i} + x^h R(x, v)}{x^m} \qquad (4)$$

($m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$). Без ограничения общности обыкновенный порядок кривизны λ, а следовательно, и число m, можно считать целыми, а функцию $x^h R(x, v)$ — аналитической от x и v. Следуя Хаимову, авторы называют уравнение (4) обобщенным уравнением Брио и Буке.

Теорема. Для решения проблемы различения особой точки (начала координат) уравнения (4) требуется не более n различных подстановок вида

$$v = \gamma_{1i} x^{\lambda_{1i}} + \gamma_{2i} x^{\lambda_{1i} + \lambda_{2i}} + \ldots + (\gamma_{r_i i} + v_i) x^{\lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \ldots + \lambda_{r_i i}}$$

($i = 1, 2, \ldots \leqslant n$), причем в любой из этих подстановок число

$$r_i \leqslant \frac{(m-1) f(n)}{2}, \qquad (5)$$

где $f(1) = 0$, $f(n) = n!$ при $n > 1$.

Оценка (5) проще, но, как указывают авторы, слабее аналогичных оценок Хаимова (Уч. зап. Сталинабадск. пед. ин-та, 1952, № 1) и Груза (Тр. Узб. ун-та, в печати).

Затем рассматривается случай $P_2(\gamma) = 0$. Согласно теореме Вейерштрасса из теории аналитических функций уравнение (2) (в этом случае) можно переписать в виде (здесь буква „u“ заменена на „y“)

$$\frac{dy}{dx} = x^h \Phi(x, y) \frac{y^s + \omega_1 y^{s-1} + \omega_2 y^{s-2} + \ldots + \omega_s}{y^r + \sigma_1 y^{r-1} + \sigma_2 y^{r-2} + \ldots + \sigma_r}, \qquad (1')$$

где $\omega_l(x)$, $\sigma_l(x)$ — аналитические функции от x, исчезающие при $x = 0$, а $\Phi(x, y)$ — аналитическая функция от x и y такая, что $\Phi(0, 0) \neq 0$. Пусть $\Delta(x)$ означает результат многочленов от y, стоящих в числителе и знаменателе правой части (1'), а число k — младшую степень в разложении $\Delta(x)$ по степеням x.

Теорема. Если начало координат есть изолированная особая точка для уравнения (1'), то с помощью не более p (где $p = s$, если $h < 0$, и $p = r + 1$, если $h \geqslant 0$) подстановок вида

$$y = \gamma_{1l} x^{\lambda_{1l}} + \gamma_{2l} x^{\lambda_{2l}} + \ldots + \gamma_{rl} x^{\lambda_{r_i l}} + v_l x^{\lambda_{r_i l}} \qquad (6)$$

можно получить все обобщенные уравнения Брио и Буке, соответствующие различным порядкам и мерам кривизны характеристик уравнения (1'). При этом число r_l в каждой из подстановок (6) удовлетворяет неравенству

$$r_l \leqslant sk.$$

Для случая, когда числитель и знаменатель правой части (1) являются полиномами специального вида от x и y, числа оцениваются не через k, а непосредственно через показатели степеней членов этих полиномов.

Примечание референта. Чтение работы крайне затрудняется нечеткостью изложения (см., например, п° 19) и обилием опечаток. А. Ф. Андреев

1452. Об одном обобщении дифференциального уравнения Т. Уно и Р. Йокоми. Виргопия (Su una generalizzazione dell'equazione differenziale di T. Uno ed R. Yokomi. Virgopia Nicola), Rend. mat. e applic., 1956, **15**, № 1-2, 153—176 (итал.)

Рассматривается картина расположения траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = P(y^2) - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda]; \quad \frac{dy}{dt} = -xy, \qquad (1)$$

где функция $P(v)$ имеет две непрерывные производные на $-\infty < v < +\infty$ и $P(0) = 0$. В зависимости от значения параметра λ и характера функции $P(y^2)$ изучаются условия существования предельных циклов. Особую роль в исследовании играет изоклина бесконечности $P(y^2) - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda] = 0$, характер которой определяет в зависимости от значения параметра λ наличие и характер точек покоя. Для характера расположения траекторий также оказывается существенным взаимное расположение точек пересечения сепаратрис с осью ординат. Изучаются случаи, когда $P(v)$ всюду возрастает и когда $P(v)$ сначала возрастает от нуля, а затем убывает. Доказано, что при $\lambda \leqslant 0$ и $\lambda \geqslant 1$ не может существовать предельных циклов. Напротив, при $0 < \lambda < 1$ циклы могут существовать. Исследованное Сансоне и Конти уравнение Уно и Йокоми (РЖМат, 1956, 401; 1957, 5547) получается из (1) при $P(y^2) \equiv y^2$ и для $0 < \lambda < 1$ имеет единственный предельный цикл, окружающий точку покоя на оси ординат. М. И. Ельшин

1453. Об устойчивости «в большом» периодического решения дифференциальной системы. Сейферт (On stability in the large for periodic solution of differential systems. Seifert George), Ann. Math., 1958, **67**, № 1, 83—89 (англ.)

Рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, \qquad (1)$$

где f_i и $\partial f_i / \partial x_j$ непрерывны и имеют по t период τ. Пусть из односвязной замкнутой области R плоскости (x_1, x_2), ограниченной кусочно-гладкой замкнутой кривой, не выходит ни одно решение системы (1), попавшее в эту область. Известно (Демидович, Вестн. Моск. ун-та, 1949, № 2, 13—25), что при этих условиях в области R существует периодическое решение системы (1).

Доказывается, что выполнение нижеследующего условия достаточно для того, чтобы это периодическое решение было единственным и чтобы оно было асимптотически устойчивым в R (т. е. чтобы все решения, попадающие в R, неограниченно приближались к этому решению при $t \to +\infty$).

Сушествуют такие непрерывно дифференцируемые функции от x_1 и x_2 g_{11}, g_{22}, $g_{12} \equiv g_{21}$, что при $(x_1, x_2) \in R$ и всех t имеем $g_{11} > 0$, $g_{11} g_{22} > g_{12}^2$, $h_{11} < 0$, $4h_{11}h_{22} > (h_{12} + h_{21})^2$, где

$$h_{jk} = h_{jk}(x_1, x_2, t) = \sum_{i=1}^{2} \left(g_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} f_i \right).$$

Смысл этого условия в том, что в метрике, определяемой функциями g_{ij}, длина любой кривой на плоскости (x_1, x_2) с течением времени неограниченно убывает, если каждая точка кривой движется по закону, определяемому системой (1).

Доказанная теорема в применении к уравнению $\ddot{x} + F'(x)\dot{x} + g(x) = p(t)$ дает следующий результат. Если $p(t + \tau) \equiv p(t)$, $p(t)$, $F'(x)$ и $g'(x)$ непрерывны, если на плоскости (x, y) существует замкнутая ограниченная односвязная область R, из которой не выходит ни одно решение системы $\dot{x} = y - F(x)$, $\dot{y} = -g(x) + p(t)$, и если в R имеем $F'(x) > 0$, $|g'(x)| \, |y - F(x)| \leqslant 2F'(x) g(x)$, то в R существует единственное перио-

дическое решение и это решение асимптотически устойчиво в R. А. Ф. Филиппов

1454. Исследование знакопеременности свободных нелинейных колебаний методом сравнения. Левандовский (An investigation of the alternating character of free non-linear vibrations by means of comparison. Lewandowski Andrzej), Arch. mech. stosowanej, 1958, **10**, № 1, 81—97 (англ.; рез. русск., польск.)

Для уравнения $\ddot{x}+R(x, \dot{x})+x=0$ исследуется поведение решений на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ в окрестности устойчивого положения равновесия (методом сравнения с решениями линейного уравнения). Приведем один из результатов.

Если $R(0, 0)=0$, $(R(0, \dot{x})+x)x\geqslant 0$, и в точке $(0, 0)$ производные $\partial R/\partial x$ и $\partial R/\partial \dot{x}$ непрерывны и $\partial R/\partial x\geqslant 2\sqrt{\partial R/\partial \dot{x}+1}$, а в окрестности этой точки $xR(x, \dot{x})>2(\dot{x})^2$ для $\dot{x}\neq 0$, то на плоскости $(x, \dot{x})$ можно построить такую область, содержащую точку $(0, 0)$, что любое решение, попавшее в эту область, неограниченно приближается к этой точке при $t\to\infty$, пересекая ось Ox не более одного раза, т. е. точка $(0, 0)$ является узлом. А. Ф. Филиппов

1455. Вращение векторных приближений и проблема устойчивости решений уравнения типа маятника. Сейферт (A rotated vector approach to the problem of stability of solutions of pendulum-type equations. Seifert George), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 1—16 (англ.)

Изучается дифференциальное уравнение

$$d^2\theta/dt^2+f(\theta, \alpha)d\theta/dt=g(\theta), \qquad (1)$$

где $f(\theta, \alpha)$ определена и имеет непрерывные вторые частные производные для $\alpha>0$, $-\infty<\theta<+\infty$ и в этой области $f(\theta, \alpha)>0$ $\partial f/\partial\alpha>0$ и $f(\theta+2\pi, \alpha)\equiv f(\theta, \alpha)$; $g(\theta)$ имеет непрерывные вторые частные производные, $g(\theta+2\pi)\equiv g(\theta)$, причем для значений θ_i, при которых $g(\theta_i)=0$, имеет место $g'(\theta_i)\neq 0$. Кроме того, $\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta>0$.

Картина фазовых траекторий изучается на поверхности цилиндра. В первой части работы доказывается ряд теорем сравнения для положительных решений (1) при изменении параметра α и, в частности, для периодических решений, охватывающих цилиндр, если последние существуют. Во второй части изучается случай $f(\theta, \alpha)\equiv\alpha f(\theta)$. Даются оценки значения параметра, для которого гарантируется, что при $\alpha>\alpha^*$ периодических решений, охватывающих цилиндр, не существует и решения (1) образуют ряд устойчивых областей, отделенных друг от друга входящими в седла сепаратрисами, в каждой из которых траектории при $t\to\infty$ приближаются к единственной устойчивой точке покоя, находящейся в этой области. М. И. Ельшин

1456. О вынужденных колебаниях цепи, содержащей катушку с железным сердечником. Коломбо (Sulle oscillazioni forzate di un circuito comprendente una bobina a nucleo di ferro. Colombo Giuseppe), Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1953, **22**, 380—398) (итал.)

Нелинейная цепь L, R, C, содержащая катушку с железным сердечником, исследуется в смысле существования некоторых устойчивых субгармоник возбуждающей частоты. В частности, рассматривается уравнение

$$f'(\dot{q})\ddot{q}+R\dot{q}+C^{-1}q=E(t), \qquad (1)$$

где магнитный поток $f(\dot{q})$ „почти“ кусочно-линеен, $E(t)$ „почти“ кусочно-постоянен и имеет период $2T$. Показывается, что если, кроме того, 1) R мал, 2) $f'(\dot{q})$ „почти“ равна нулю для $|\dot{q}|\geqslant I$ при достаточно малом I, 3) $\pi/2<T<5\pi/6$, то уравнение (1) имеет устойчивое решение — субгармонику с минимальным периодом $6T$ (Периодическое решение периода $2T$ не является устойчивым). Справедливость этого утверждения вытекает из того, что приближенное уравнение

$$f'_0(\dot{q})\ddot{q}+C^{-1}q=E_0(t),$$

где $f'_0(\dot{q})=L_1$ или L_2 (постоянные) соответственно для $|\dot{q}|\geqslant I$ или $|\dot{q}|<T$, $L_1\ll L_2$, $I\ll 1$ и $E_0(t)=-E^*$ или E^* (постоянная) соответственно для $0\leqslant t<T$ или $T\leqslant t<2T$, имеет искомое устойчивое решение — субгармонику. Далее непосредственным применением теоремы Брауэра о неподвижной точке аналогичное утверждение доказывается для уравнения (1).

Наряду с этим случаем автор параллельно, но значительно более кратко, исследует случай, когда R и T являются достаточно большими, а остальные условия малости остаются прежними. Тогда существует устойчивое периодическое решение периода $2T$, которое практически совпадает с $E(t)$. C. R. De Prima

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 427.

1457. О синхронизации нелинейных систем со многими степенями свободы. Джованнини (Sulla sincronizzazione dei sistemi non lineari a piu di due gradi di libertà. Giovannini Gigliana), Rend Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1954—1955, **14**, 371—376 (итал.)

Автор ставит вопрос о том, можно ли применить стробоскопический метод к задачам, связанным с нелинейными системами с более чем двумя степенями свободы. Автор рассматривает частный случай системы с тремя степенями свободы и находит, что для применимости указанного метода необходимо, чтобы некоторая усложненная система уравнений имела действительные решения. В одном специальном случае существования таких решений очевидно. На основании этого факта автор гипотетически отвечает утвердительно на поставленный выше вопрос. Z. A. MacColl

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 8, 851

1458. Исследование асимптотических движений упругого осциллятора с вязким трением. Мальгарини (Studio asintotico del moto d'un oscillatore elastico, con resistenza di tipo «Subviscoso». Malgarini Giorgio), Rend. 1st. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1953, **86**, № 1, 258—280 (итал.)

Изучается асимптотическое поведение траекторий уравнения

$$x''+H(x')+x=0 \qquad (1)$$

на фазовой плоскости в предположении, что функция $H(v)$ обладает следующими свойствами: при $v\neq 0$, $vH(v)>0$; $H(0)=0$; $H(v)$ непрерывна на $-\infty<v<+\infty$ и при $v\neq 0$ имеет непрерывные производные $H'(v)$ и $H''(v)$; $H'(v)>0$; $vH''(v)<0$ и $\lim\limits_{v\to 0} H(v)/v=+\infty$. Так как из этих условий получается $v\dfrac{d}{dv}(H(v)/v)<0$, то из

$\lim\limits_{V\to-\infty}(H(v)/v)=k_1$ и $\lim\limits_{V\to+\infty}(H(v)/v)=k_2$

при $k_1>2$ и $k_2>2$ вытекает неколебательный характер решений (1). Если же $0<k_1<2$ и $0<k_2<2$, характер движений зависит от начальных условий. В этом случае движения могут быть также и малыми колебаниями. Уравнение (1) сводится к системе

$$\dot{x}=y; \qquad \dot{y}=-x-H(y),$$

которая исследуется в полярных координатах. В качестве примера рассматривается случай $H(y)=2\varepsilon|y|^{m-1}y$, где $0<m<1$. М. И. Ельшин

1459. Об устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка. Харасахал В., Тр. Сектора матем. и механ. АН КазССР, 46—49

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \tag{1}$$

и

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det P, \quad S = p_{11} + p_{22}.$$

Результат: тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво, если

$$\Delta > 0, \quad S < 0, \quad \frac{d}{dt}\left(p_{21}^2 + p_{22}^2 + \Delta\right) < 2S\Delta,$$

$$\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\Delta + \sum_{k=1}^{2} P_{ik}^2\right) + 2S\Delta\right] > \left[\frac{d}{dt}(p_{11}p_{21} + p_{12}p_{22})\right]^2.$$

Р. Э. Виноград

1460. Колебания интегралов линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Кастро-Бжезицкий (Integrales oscilantes de las ecuaciones diferenciales lineales con segundo miembro. Castro Brzezicki A. de), Ciencias, 1957, 22, № 1, 5—28 (исп.)

Изучается характер колебаний решений уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

В первой части работы дается оценка расстояний между последовательными корнями решений (1) и доказывается ряд элементарных предложений: если $p(x) \geqslant 0$, $q'(x) \leqslant 0$, то $|u'(x_k)|$ и $q(\xi_k)\,u^2(\xi_k)$ не возрастают; если $q' + 2pq \geqslant 0$, то $|u(\xi_k)|$ и $u'^2(x_k)/q(x_k)$ не возрастают. Здесь $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — частные решения (1), x_k, ξ_K — последовательности корней $u(x_k) = 0$ и $u^1(\xi_K) = 0$. Противоположные неравенства приводят к неубыванию этих выражений. Во второй части проводится сравнение решений уравнения (1) с решениями соответствующего однородного уравнения и, в частности, сравнение распределений корней решений этих уравнений. В третьей части, с помощью обобщенной формулы Пиконе, получается общая теорема сравнения для неоднородных уравнений

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + q_1(x)y_1 = f_1(x);$$

$$y_2'' + p_2(x)y_2' + q_2(x)y_2 = f_2(x).$$

Указываются условия, связывающие коэффициенты уравнений и общие для y_1 и y_2 начальные данные, при выполнении которых отношения y_1/y_2 и y_1'/y_2' возрастают или убывают. М. И. Ельшин

1461. Коллоквиум по проблемам нелинейной механики. Шольц (Kolloquium über Probleme der nichtlinearen Mechanik. Scholz H.), MTW-Mitt. 1958, 5, № 3, 157—167 (нем.)

В Лоренцгофе (ФРГ) состоялся коллоквиум, посвященный проблемам дифференциальных уравнений, связанным с нелинейной механикой. Были прочитаны и обсуждены следующие доклады:

Метлер (E. Mettler) из Карлсруе, Проблемы устойчивости для свободных колебаний механических систем; Хелке (G. Helke) из Фрейбурга, К проблеме устойчивости вынужденных колебаний нелинейных систем с одной степенью свободы; им рассматривалось решение уравнения

$$\ddot{x} + v^2x + g(x) + \mu(r(\dot{x}) + p\cos\alpha t) = 0$$

в зависимости от параметра α; Рейссиг (R. Reissig) из Дрездена, Прямые методы в теории колебаний и устойчивости для одного нелинейного уравнения второго порядка; Хан (W. Hahn) из Брауншвейга, Проблемы прямых методов Ляпунова. В этом докладе рассматривался вопрос о свойствах функции Ляпунова, позволяющих устанавливать устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Магнус (K. Magnus) из Фрейбурга, Исследование устойчивости по Ляпунову тяжелой кардановой системы. В докладе дан практический пример применения теории устойчивости по Ляпунову; Минорский (N. Minorsky) из США, Топологии решений уравнения Лиенара; он рассматривал уравнение $\ddot{x} + (a + cx^2 + ex^4)\,\dot{x} + x = 0$, $|a|$, $|c|$, $|e| \ll 1$, и исследовал его решения с помощью некоторой системы в трехмерном пространстве; Каудерер (H. Kauderer) из Ганновера, Нелинейное приближение дифференциального уравнения Е. Мейснера; Койтер (W. T. Koiter) из Дельфта, Нелинейные ветвления в проблемах статики упругих сред; Клоттер (K. Klotter) из Карлсруе, Пример точного решения проблемы автоколебаний; Андре (J. André) из Брауншвейга, Замечания о кусочно-линейных колебаниях; он рассматривал уравнения

$$\dot{\xi} = D\xi + \eta, \quad \eta = R\operatorname{sgn}R\xi,$$

где ξ, D, R, η соответственно $(n, 1)$,- (n, n),- (n, m)-матрицы; Ловаш-Надь (V. Lovass-Nagy) из Будапешта, Нелинейные проблемы распределения тепла; Шольц (H. Scholz), Методы Крылова и Боголюбова и Вейнганда в отношении их практических применений; Магнус (K. Magnus) из Фрейбурга, О связи между различными методами нелинейной механики; Хершель (R. Herschel) из Ульма, О поведении нелинейной системы регулирования на монотонной границе устойчивости.

В. В. Немыцкий

1462. Дисконьюгантные системы дифференциальных уравнений Хартман, Винтнер (On disconjugate differential systems. Hartman Philip, Wintner Aurel), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 72—81 (англ.)

Рассматриваются дифференциальные системы

$$(G(t)x')' + F(t)x = 0 \tag{1}$$

или

$$x'' + G(t)x' + F(t)x = 0, \tag{2}$$

где G и F — квадратные (n строк и n столбцов) матрицы с непрерывными на $a \leqslant t \leqslant b$ элементами; $x = x(t)$ — вектор с n координатами. Изучаются условия, при которых ни одно нетривиальное частное решение (1) или (2) (вектор) не обращается в нуль больше одного раза на рассматриваемом интервале. Доказательства основаны на теореме Морса, распространяющей теорему сравнения Штурма на случай систем (1) и (2). Полученные условия аналогичны $F(t) \leqslant 0$ для скалярных уравнений (1) и (2) и записываются в терминах матрицы

$$E = F - \frac{1}{2}G' - \frac{1}{4}G^2,$$

представляющей распространение на случай общих систем (1) или (2) инварианта скалярного уравнения второго порядка. М. И. Ельшин

1463. О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит. Лыкова О. Б., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 4, 419—431 (рез. англ.)

Продолжение исследований автора (РЖМат, 1958, 2930, 5715, 9823). Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x) + \varepsilon X^*(t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

где x X, X^* — n-мерные векторы евклидова пространства, E^n и ε — малый положительный параметр. Предполагается, что: а) невозмущенная система

$$dx/dt = X(x) \tag{2}$$

допускает двупараметрическое семейство периодических решений

$$x = x^0(\psi, a) \tag{3}$$

периода 2π относительно ψ, где $\psi = \omega t + \varphi$, a и φ — произвольные постоянные и $\omega = \omega(a)$; б) для системы уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = X'_x(x^0)\,\delta x, \tag{4}$$

соответствующей периодическому решению (3), отличные от нуля $n-2$ характеристических показателя обладают отрицательными вещественными частями; в) найдется, вообще говоря, комплекснозначная матрица $A = A(\psi, a)$ типа $n \times (n-2)$, периодическая по t с периодом 2π, имеющая ограниченные и равномерно-непрерывные производные любого порядка по ψ и a, и такая, что

$$\Delta(a) = \min_{\psi}\left\{\det\left\|\frac{\partial x^0}{\partial \psi}, \frac{\partial x^0}{\partial a}, \frac{1}{2}(A+\overline{A})\right\|\right\} \neq 0 \text{ при } a \in \mathfrak{A},$$

где $\overline{A}$ — матрица, сопряженная с A; г) существует в пространстве $E^{n+1} = \{x_1, \ldots, x_n; \varepsilon\}$ окрестность $U_\delta^{\varepsilon_0}$ кривой $x = x^0(\psi, a)$, $\varepsilon = 0$, в которой вектор-функция $X(x) + \varepsilon X^*(t, x, \varepsilon)$ и ее частные производные любого порядка по x и ε ограничены и равномерно-непрерывны для $-\infty < t < +\infty$; д) вектор-функция $X^*(t, x, \varepsilon)$ является периодической по t с периодом 2π при $x, \varepsilon \in U_\delta^{\varepsilon_0}$.

Теорема. Если для системы (1) выполнены условия а), б), в), г) и д), то уравнение (1) при каждом достаточно малом ε, в некоторой области U_{σ_1} допускает единственное двупараметрическое локальное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_t$ вида

$$x = x^0(\psi, a) + \frac{1}{2}\Big\{A(\psi, a) f(t, \psi, a, \varepsilon) + \overline{A}(\psi, a)\,\overline{f}(t, \psi, a, \varepsilon)\Big\} \equiv F(t, \psi, a, \varepsilon),$$

где f и F определены при $-\infty < t < +\infty$, $\psi \in \Omega$, $a \in \mathfrak{A}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, обладают периодом 2π по t и ψ, имеют ограниченные и равномерно-непрерывные производные любого порядка по ψ, a и ε, причем $F(t, \psi, a, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. На многообразии $\mathfrak{M}_t$ переменные ψ и a удовлетворяют уравнениям вида:

$$d\psi/dt = \omega(a) + P(t, \varphi, a, f, \varepsilon),$$
$$da/dt = Q(t, \psi, a, f, \varepsilon),$$

где функции P и Q при $f = f(t, \psi, a, \varepsilon)$ того же характера, что и функция F.

Многообразие $\mathfrak{M}_t$ устойчиво в том смысле, что любое решение системы (1), начальные значения которого принадлежат некоторой области, стремится при растущем t к многообразию $\mathfrak{M}_t$, до тех пор, пока $a \in \mathfrak{A}$.

Б. П. Демидович

1464. Дополнение к статье о теореме Бохера. Винтнер (Addenda to the paper on Bôcher's theorem (vol. 76 (1954), pp. 183—190. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1956, 78, № 4, 895—897 (англ.)

Заметка примыкает к статье автора, указанной в заглавии. (РЖМат, 1955, 4410). Пусть $\alpha(t)$ — $n \times n$-матрица непрерывных при $0 \leqslant t < \infty$ функций; символ $\alpha \in S$ означает, что $\alpha(t)$ имеет следующее свойство: для любого вектора c существует решение $x(t)$ системы $dx/dt = \alpha(t)\,x$, удовлетворяющее условию $x(t) \to c$ при $t \to \infty$, $\alpha \in R$ означает интегрируемость и $\alpha \in L$ интегрируемость нормы $|\alpha|$ на $[0, \infty)$.

Если $\alpha_0(t)$ — диагональная $n \times n$-матрица с коэффициентами из $\alpha(t)$, тогда для $\alpha \in S$ достаточно выполнения условий $\alpha_0 \in R$ и $(\alpha - \alpha_0) \in L$.

Рассматриваются также уравнения

$$x'' + f(t)\,x = 0, \tag{1}$$
$$y'' + y = 0. \tag{2}$$

Для того чтобы уравнение (1) имело решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, асимптотически эквивалентные при $t \to \infty$ решениям e^{-it}, e^{it} уравнения (2), достаточно выполнения следующих условий:

$$f_k \in R,\ F_k \in L \quad (k = 1, 0, -1),$$

где

$$f_k(t) = f(t)\,e^{2kti}, \tag{3}$$

$$F_k(t) = f(t)\int_t^\infty f(s) e^{-2ksi} ds. \tag{4}$$

Доказательства, опирающиеся на предыдущие результаты автора, только намечены. Условия (3) и (4) являются более тонкими, чем известное жесткое условие $f(t) \in L$, что иллюстрируется на примере с $f(t) = \sin ta/t$ при $a \neq 0$. Отмечается, что условия (3) и (4) сохраняют свою силу как достаточные условия асимптотической эквивалентности при $t \to \infty$ решений уравнения (2) и решений уравнения $x'' + f(t)\,x' + x = 0$.

Н. Н. Красовский

1465. Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом для одной системы трех дифференциальных уравнений. Плисс В. А., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 4, 708—710

Рассматривается система

$$dx/dt = y - ax - f(x),\quad dy/dt = z - bf(x),\quad dz/dt = -cf(x), \tag{1}$$
$$ab > c\ \ b > 0\ \ c > 0\ \ xf(x) > 0\ \ x \neq 0\ \ f(0) = 0.$$

Теорема. Для того чтобы решение системы (1) было устойчиво в целом, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\overline{\lim_{x \to 0}}\left(f(x) + \int_0^x f(x)dx\right) = +\infty,$$

$$\overline{\lim_{x \to -\infty}}\left(-f(x) + \int_0^x f(x)dx\right) = +\infty.$$

В. В. Немыцкий

1466. К вопросу об определении конечного интервала времени устойчивости решений системы дифференциальных уравнений. Штелик В. Г., Укр. матем. ж., 1958, 10, № 1, 100—102

Рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{i=1}^{N} p_{ji}(t)x_i+\mathrm{X}_j(t,x_1,\ldots,x_N),\ j=1,\ldots,N, \qquad (1)$$

где $p_{ij}(t)$ — комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям Липшица на интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$, $t_0\geqslant 0$ с постоянной α; а функции X_j разлагаются в области $|x_j|\leqslant h$, $t_0\leqslant t\leqslant T$ в ряды по степеням $x_1,\ldots,x_N$, причем эти разложения начинаются с членов не ниже второго порядка. Невозмущенное движение называется устойчивым на конечном интервале времени длины τ, если при достаточно малом $A>0$ величины $x_i(t)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^{n}|a_{s1}x_1+\ldots+a_{sN}x_N|^2\leqslant A \text{ с } \det||a_{ik}||\neq 0 \qquad (2)$$

для всех $t\in[t_0,\ t_0+\tau]$ при условии, что начальные значения $x_s=x_s(t_0)$ удовлетворяют тому же неравенству (2).

Доказывается теорема: Пусть комплекснозначные коэффициенты системы (1) удовлетворяют следующим условиям на $t_0\leqslant t\leqslant T$:

1) $|p_{ij}(t')-p_{ij}(t'')|\leqslant a|t'-t''|$;

2) $|\mathrm{X}_j(t_1,x_1,\ldots,x_N)|\leqslant \varkappa\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\right)^{1/2}$, где $\varkappa$ — малая постоянная, не зависящая от t;

3) все корни уравнения $\det||p_{ji}^0-\lambda\delta_{ji}||=0$ имеют отрицательные вещественные части.

Тогда невозмущенное движение устойчиво на конечном интервале времени $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau$, где τ вычисляется по формуле

$$\tau=\frac{2}{aN^3(N-1)^{(N-1)/2}}[(N-1)!(2N-1)2^N p^0]^{-N(N-1)/2}\times$$
$$\times\left[\frac{2pN(N-1)}{2+N(N-1)}\right]^{N(N-1)/2+1}-\frac{\varkappa}{a}.$$

Н. И. Мозжерова

1467. Изучение синхронной асимптотической устойчивости. Ла-Салль (A study of synchronous asymptotic stability. La Salle J. P.), Ann. Math., 1957, **65**, № 3, 571—581 (англ.)

С абстрактной точки зрения рассматриваются некоторые случаи асимптотической устойчивости движения которые представляют интерес для исследования периодических процессов в физических системах. В метрическом пространстве R изучаются точечные преобразования $\{q=T(p)\}\equiv\{q=f(p,\ t_0,\ t_0+T)\}$, определенные траекториями $f(p,\ t_0,\ t)$ и соответствующие перемещению точек $p\in R$ вдоль траекторий f в течение интервала времени T. Вводится понятие асимптотической эквивалентности: точки p и q асимптотически эквивалентны, если $\lim\rho(T^n(p),\ T^n(q))=0$ при $n\to\infty$. Открытое множество $U\subset R$ называется сжимающимся, если точки из U асимптотически эквивалентны. Естественным образом вводится понятие максимального сжимающегося множества и на базе разбиения пространства R на классы асимптотически эквивалентных множеств, а также путем рассмотрения покрытий подмножеств из R максимальными сжимающимися множествами U_α изучаются возможные в системе движения $M(p)\equiv\equiv\{T(p),\ T^2(p),\ldots\}$ и, в частности, периодические режимы а также рассматриваются возможные типы устойчивости. Определяется мера устойчивости множества H, допускающего покрытие множествами U_α, как расстояние H до ближайшей точки q из R, не эквивалентной асимптотически устойчивому множеству H. Даются аналогичные определения меры устойчивости движения $M(p)$. В зависимости от величины этой меры дается классификация асимптотической устойчивости $M(p)$. Доказываются некоторые леммы и теоремы, описывающие возможные типы покрытий движения $M(p)$ множествами U_α, а также характеризующие связь между асимптотической устойчивостью разных типов.

Примечание. Анализ случаев асимптотической устойчивости, данный в статье, страдает односторонностью. Здесь не рассматриваются многочисленные известные в теории динамических систем и точечных преобразований типы устойчивости и по сути дела лишь обобщаются некоторые частные случаи, рассматривавшиеся при исследовании периодических движений в системах со степенями свободы Трефтцем (Trefftz E., Math., Ann., 1925, **95**, 307—312) и Рейссигом (РЖМат, 1956, 2195), на работы которых только и делаются ссылки в статье. Н. Н. Красовский

1468. О характеристичных числах линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Харасахал В., Тр. Сектора матем. и механ. АН КазССР, 1958, **1**, 147—150

Для характеристичного числа λ произвольного решения системы

$$dx/dt=P(t)x$$

строятся оценки известного типа:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\alpha(\tau)d\tau\leqslant-\lambda\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\beta(\tau)d\tau,$$

где α, β — наименьшее и наибольшее собственные числа симметризованной матрицы $1/2\ (P+P^*)$.

Р. Э. Виноград

1469. О некоторых уравнениях Гурвица. Дервидюэ (Sur certaines équations de Hurwitz. Derwidué L.), Mathesis, 1956, **65**, № 1-3, 37—40 (франц.)

Находятся, минуя явную запись характеристического многочлена и разложения определителей, простые критерии устойчивости решений однородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$A_mY^{(m)}+A_{m-1}Y^{(m-1)}+\ldots+A_0Y=0$$

(A_l — квадратные матрицы) в двух частных случаях, когда все A_l являются либо перестановочными между собой, либо эрмитовыми (одновременно положительно или отрицательно определенными). А. И. Кострикин

1470. К вопросу об устойчивости. Дервидюэ (Une question de stabilité. Derwidué L.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 246—248 (франц.)

Излагаются известные теоремы, относящиеся к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. В. В. Немыцкий

1471. Об устойчивости решений некоторых дифференциальных уравнений четвертого порядка. Картрайт (On the stability of solutions of certain differential equations of the fourth order. Cartwright M. L.), Quart J. Mech. and Appl. Math., 1956, **9**, № 2, 185—194 (англ.)

Рассматриваются уравнения четвертого порядка

$$x^{(4)}+a_1x^{(3)}+a_2x^{(2)}+a_3x^{(1)}+f(x)=0 \qquad (1)$$

и

$$x^{(4)}+a_1x^{(3)}+\psi(x^{(1)})x^{(2)}+a_3x^{(1)}+a_4x=0, \qquad (2)$$

где $a_k=\mathrm{const}$, $f(z)$ и $\psi(z)$ — дважды дифференцируемые функции. Построением функций Ляпунова устанав-

ливаются ограничения на функции f и ψ, при которых критерий Рауса-Гурвица для линейных уравнений с постоянными коэффициентами распространяется на нелинейные уравнения (1) и (2). В статье указано, что решенная проблема является частью общей проблемы, поставленной М. А. Айзерманом (Успехи матем. наук, 1949, **4**, 187—188). Также имеются ссылки на работы С. Н. Шиманова (РЖМат, 1953, 1188) и Е. А. Барбашина (Прикл. матем. и механ., 1952, **16**, 629—632), решавших аналогичными методами ту же проблему для уравнений третьего порядка. М. И. Ельшин

1472. Общий случай устойчивости характеристических показателей и существования ведущих координат. Виноград Р. Э., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 4, 633—635

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$y' = P(t)\,y, \tag{1}$$

$$x' = P(t)\,x + \varphi(t, x),\ \varphi(t, 0) = 0, \tag{2}$$

x — вектор, $P(t)$ — $n \times n$-матрица с ограниченными коэффициентами, $\varphi(t, x)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по x с „константой" $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, причем $\int_0^\infty g_1(t)\,dt < \infty$.

Пусть матрица $P(t)$ приведена к диагональному виду с элементами $p_i(t)$. Формулируется теорема:

Пусть выполнено условие

$$\int_\tau^t (p_{i+1}(\xi) - p_i(\xi))\,d\xi \leqslant a(t-\tau) - B, \tag{3}$$

$\tau < t$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $a > 0$, $B > 0$.

Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых возмущениях φ с $g_2(t) < \delta$ решения системы (2) обладают свойствами:

$$1.\ |x(t)| = \exp\left[c(t) + \int_0^t (p_i + \varepsilon_x)\,d\xi\right]\ (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где $|c(t)|$ ограничено, $|\varepsilon_x| < \varepsilon$.

2. Множество $E^k(t_0)$ начальных точек решений с показателями $< p_k + \varepsilon$ гомеоморфно k-мерной плоскости, $E^k(t_0) \subset E^{k+1}(t_0)$.

3. Начиная с $t = 0$, если $\int_0^\infty g_1(t)\,dt$ мал, или с некоторого t_1, в общем случае выполняется условие

$$(x^2_{k+1} + \ldots + x_n^2)/(x^2_1 + \ldots + x^2_k) < \gamma^2.$$

4. Всякое решение (4) погружается, начиная с некоторого большого t, в конус ширины γ около оси x_i.

5. Для всякого $t_0 \geqslant 0$ существует единый гомеоморфизм между начальными точками решений (1) и (2), при котором показатели соответствующих решений совпадают с точностью до $\pm\varepsilon$.

6. Если вместо $g_2 < \delta$ имеем $g_2 \to 0$ при $t \to \infty$, то поправки $\pm\varepsilon$ снимаются, а ширина конусов γ как угодно мала при больших t.

Приводится краткое доказательство теоремы.

Н. Н. Красовский

1473. Об устойчивости в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. Огурцов А. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 124—129

Доказываются критерии устойчивости в целом для некоторых нелинейных уравнений. Приведем некоторые результаты.

Нулевое решение уравнения

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \psi\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0 \tag{1}$$

$$\varphi(0) = 0, \qquad f(0) = 0$$

асимптотически устойчиво в целом, если выполняются следующие условия:

$$\frac{f(x)}{x} > 0 \text{ при } x \neq 0,\ \frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0 \text{ при } y \neq 0,$$

$$\psi(x, y) > 1,\ \ y \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \leqslant 0,$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \left[\int_0^x f(x)\,dx + f(x)\,y + \int_0^y \varphi(y)\,dy\right] = \infty.$$

Нулевое решение уравнения

$$\frac{d^4x}{dt^4} + a\frac{d^3x}{dt^3} + b\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + cx = 0,$$

$$\varphi(0) = 0,$$

асимптотически устойчиво в целом, если выполняются следующие условия: $a > 0$, $c > 0$, $b > \max\left\{4 + 2\sqrt{c+1},\ 2c(a^2+1)\right\}$, $[\varphi(y)/y] > 2ac/b$ при $y \neq 0$, $\varphi'(y) \leqslant a$.

Рассматривается также уравнение третьего порядка, которое, помимо членов из левой части (1), включает нелинейное слагаемое $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Доказательства устойчивости проводятся путем построения функций Ляпунова специального вида. Н. Н. Красовский

1474. О периодических решениях квазилинейных дифференциальных уравнений в одном классе случаев. Волк И. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 31—40

Приведены достаточные условия существования периодического решения для системы с большими и малыми параметрами:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu}\left[p_{\nu_1}x_1 + \ldots + p_{\nu_n}x_n + P_\nu + U_\nu(\mu, c, t, x_1, \ldots, x_n)\right], \tag{1}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n,$$

где $p_{\nu i}$, P_ν, U периодичны по t, μ и c — малые параметры, а k_ν могут быть и отрицательными. Эти условия выражены в терминах поведения характеристических показателей некоторых линейных периодических систем, связанных с (1) при условии специального строения матрицы $\{p_{\nu i}\}$. Р. Э. Виноград

1475. О некоторых видах периодических решений. Уно (On some mode of appearance of periodic solutions. Uno

Toshio), Proc. 5th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1955. Tokyo, 1956, 433—434 (англ.)

1476. О вынужденных установившихся колебаниях в нелинейных замкнутых системах контроля. Савараги, Хиросава (On the forced steady oscillations in a nonlinear closed loop control system. Sawaragi Yoshikazu, Hirosawa Eiichi. Mem. Fac. Engng Kyoto Univ. 1955, **17**, 166—174 (англ.)

Находятся характеристики чувствительности для гармонических и комбинированных колебаний контрольных цепей, изображаемых уравнением $\dddot{\varphi} + S\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + RS\varphi - TS\varphi^3 = s\sigma$, где R, S, T, s — постоянные, а $\sigma = \sigma_0 \sin\mu\tau$.

Устойчивость гармонических колебаний автор исследует более детально, используя при этом метод Андронова и Витта (см., например, Stoker J. J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, New York, Interscience, 1950, 153—163).

H. A. Antosiewicz

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 39.

1477. Об устойчивости квазилинейных систем с последействием. Красовский Н. Н., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 3, 435—438

Рассматривается уравнение с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx}{dt} = X[x(t+\upsilon)] \quad (-h \leqslant \upsilon \leqslant 0), \tag{1}$$

где x — элемент банахова пространства B, X — ограниченный линейный оператор на непрерывных кривых $x(\upsilon)$ $(-h \leqslant \upsilon \leqslant 0)$, отображающий эти кривые в B, $t \geqslant 0$.

Пространство непрерывных кривых $x(\upsilon)$ с нормой $\sup_{-h\leqslant\upsilon\leqslant 0} \| x(\upsilon) \|$ обозначается $B(\cdot)$, а его элементы $x(\cdot)$.

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\left.\frac{dx(t,\cdot)}{dt}\right|_{dt=+0} = Ax(t,\cdot) \quad (x(t,\cdot) \in B(\cdot))$$

с неограниченным оператором

$$Ax(\cdot) = y(\cdot) = \begin{cases} y(\upsilon) = \dfrac{dx}{d\upsilon} \text{ при } -h \leqslant \upsilon < 0 \\ y(0) = X[x(\upsilon)]. \end{cases}$$

Получены следующие основные результаты:

I. Если спектр $\{\lambda_\sigma\}$ оператора A удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}\lambda_\sigma \leqslant -\gamma < 0, \tag{2}$$

то решения уравнения (1) асимптотически устойчивы по показательному закону.

II. При тех же условиях тривиальное решение уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = X[x(t+\upsilon)] + R[x(t+\upsilon), t] \quad (-h \leqslant \upsilon \leqslant 0)$$

асимптотически устойчиво, если $\| R(x(\upsilon), t) \| \leqslant a \| x(\cdot) \|$, где число a достаточно мало.

III. Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, когда линейный оператор $X = X[x(t+\upsilon), t]$ зависит от t, но в некотором смысле асимптотически постоянен, если спектр предельного оператора A_∞ удовлетворяет условию (2).

Эти теоремы охватывают как частный случай известные результаты Белмана и Райта об устойчивости дифференциально-разностных уравнений стационарных или асимптотически стационарных в первом приближении, если все корни K_i характеристического квазиполинома удовлетворяют неравенствам $\mathrm{Re}\, K_i < -\gamma < 0$.

В работе даны довольно подробные наброски доказательств основных утверждений. Л. Э. Эльсгольц

1478. О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в гильбертовом пространстве. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Соболевский П. Е., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 6, 990—993

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$dx/dt + A(t)x = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant b) \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H, где $A(t)$ — самосопряженный оператор, $f(t)$ — вектор-функция со значениями в H, а также нелинейное дифференциальное уравнение

$$dx/dt + A(t)x = f(t, x), \tag{2}$$

где $f(t, x)$ — нелинейный оператор, действующий в H.

Т. Като показал, в более общем случае банахова пространства (РЖМат, 1955, 2769), что при некоторых предположениях решение уравнения (1) представимо в виде

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + Qf(t), \tag{3}$$

где $U(t, s)$ — ограниченный оператор такой, что

$$dU(t, s)x_0/dt + A(t)U(t, s)x_0 = 0$$

$$(x_0 \in D(A)),\ U(s, s) = I, \tag{4}$$

и $Qf(t) = \int_0^t U(t, s)f(s)\,ds$. В предыдущей заметке авторов (РЖМат, 1957, 6365) формула (3) обоснована в случае, когда $f(t)$ сильно непрерывно дифференцируема (Kato T., Div. Electromag. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., Res. Rep.,BR—11, i + 11 pp., 1955). В реферируемой работе операторы U и Q изучаются более подробно при следующих предположениях: а) операторы $A(t)$ самосопряжены и $(A(t)x, x) \geqslant (x, x)$ при $x \in D(A)$; б) при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ операторы $C_\alpha(t) = A^\alpha(t)\,dA^{-\alpha}(t)/dt$ равномерно ограничены по α и t; в) оператор $C_1(t)$ ограничен и сильно непрерывен по t. При этих условиях выполняется оценка $\| A^\alpha U(t, s) \| \leqslant M(t-s)^{-\alpha}$ для $t > s$ и $0 \leqslant \alpha < 2$. При $\alpha = 2$ она справедлива, если $C_1(t)$ удовлетворяет условию Липшица. В частности, при любом $x_0 \in H$ вектор-функция $x = U(t, s)x_0 \in D(A)$ и, следовательно, удовлетворяет однородному уравнению (4). Формула (3) переносится на случай, когда $f(t) \in \mathrm{Lip}\,\varepsilon$ при $\varepsilon \leqslant 1$ и $x_0 \in H$. При этом, если $x_0 \in D(A)$, то $\| A^\alpha\, dx/dt \| \leqslant Mt^{-\alpha}$ для $\alpha < \varepsilon$. Оператор Q ограничен в пространстве C непрерывных функций $f(t) \in H$ с нормой $\| f \|_C = \max \| f(t) \|$ и в пространстве C'_0 непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю при $t = 0$, с нормой $\| f \|_{C'_0} = \max \| f'(t) \|$, и вполне непрерывен в этих пространствах, если вполне непрерывен оператор $A^{-1}(t)$ в H. Устанавливаются оценки $\| Qf(t+\Delta t) - Qf(t) \| \leqslant K_1 \Delta t\, |\ln \Delta t|\, \| f \|_C$ и $\| \frac{d}{dt} Qf(t+\Delta t) - \frac{d}{dt} Qf(t) \| \leqslant K \Delta t\, |\ln \Delta t|\, \| f \|_{C'_0}$. Пусть выполнены условия а), б), в) и оператор $A^{-1}(t)$ вполне непрерывен, а $f(t, x) \in H$ — непрерывный ограниченный оператор на

$[0, b] \times \{ \| x - x_0 \| \leqslant r \}$. Далее, пусть существует на некотором отрезке $(0, h)$ $(h \leqslant b)$ непрерывное решение интегрального уравнения

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + Qf(t, x(t)) \qquad (5)$$

такое, что при условии $\| f(t + \Delta t, x + \Delta x) - f(t, x) \| \leqslant K(|\Delta t|^\alpha + \| \Delta x \|^\alpha)$ $(\alpha \leqslant 1)$ каждое непрерывное решение этого уравнения удовлетворяет при $t > 0$ уравнению (2). Указывается, что условие ограниченности оператора $f(t, x)$ в гильбертовом пространстве является стеснительным, и рассматривается случай, когда $f(t, x)$ ограничен и непрерывен на линейном множестве M, являющемся банаховым пространством с нормой $\| x \|_M \leqslant K \| x \|_H$. Если при некотором ε $(0 < \varepsilon < 1)$ операторы $A^{-\varepsilon}(t)$ действуют из H в M, причем $\| A^{-\varepsilon}(t)\, x \|_M \leqslant q \| x \|_H (x \in H)$, и выполнены еще некоторые условия, то существует решение уравнения (2) с начальным значением $x_0 \in D(A^\varepsilon)$, непрерывное в M и дифференцируемое в H. В качестве примера рассматривается смешанная задача с нулевыми граничными значениями для уравнения $\partial u/\partial t = \Delta u + f(t, s, u)$ в ограниченной области n-мерного пространства и устанавливается локальная теорема существования ограниченных решений этой задачи при $n = 2, 3$ (при $n > 3$ с некоторыми ограничениями на рост $f(t, s, u)$ по u). Уравнение (1) другими методами изучалось в работах М. И. Вишика (Матем. сб., 1956, **139**, № 1) и О. А. Ладыженской (РЖМат, 1957, 638).

Примечание референта. Пользуясь результатами Хейнца (Heinz, Math. Ann., 1951, **123**, 415—438), можно показать, что из условий а) и в) всегда вытекает условие б). Ю. Л. Далецкий

1479. О приближенных методах решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Соболевский П. Е., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 2, 240—243

Вначале изучается однородное линейное уравнение

$$dx/dt + Ax = 0 \qquad (1)$$

в банаховом пространстве E, где A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, имеющий область определения $D(A)$. Приближенные решения уравнения (1) конструируются как решения приближенных уравнений

$$dx/dt + A_n x = 0, \qquad (2)$$

где A_n сильно сходятся к A. Ф. Риссом а С. Надем (Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во ин. лит., 1951) показано, что для сходимости решений $e^{-A_n t} x_0$ уравнения (2) к решениям уравнения (1) достаточно, чтобы нормы операторов $e^{-A_n t}$ были равномерно (по $t \in [0, T]$ и $n = 1, 2, \ldots$) ограничены. При этом Рисс и Надь дополнительно предполагали, что операторы A_n коммутируют друг с другом. Автор освобождается (теорема 1) от этого ограничения, не выполняющегося, например, в обычно применяемых вариантах метода Бубнова — Галеркина.

Рассматривается однородное уравнение $dx/dt + A(t)x = 0$ с переменным оператором $A(t)$. Его решения $U(t, s)x_0$, удовлетворяющие начальному условию $x(s) = x_0$, конструируются как пределы решений $U_n(t, s)x_0$ уравнений $dx/dt + A_n(t)x = 0$, где $A_n(t)$ сильно сходятся к $A(t)$ при каждом t. Предполагается, что оператор $A(t)\, dA^{-1}(t)/dt$ ограничен и сильно непрерывен по t. Утверждается (теорема 2), что для сильной (равномерной по t и s при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$) сходимости операторов $U_n(t, s)$ к $U(t, s)$ достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\| [\lambda I + A(t)]^{-1} \right\| \leqslant \frac{1}{1 + \lambda}, \qquad \left\| [\lambda I + A_n(t)]^{-1} \right\| \leqslant \frac{1}{1 + \lambda}$$
$$(\lambda > -1)$$

Далее изучается нелинейное уравнение

$$dx/dt + A(t)x = f(t, x), \qquad (3)$$

где $A(t)$ — линейный неограниченный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, не зависящей от t, а $f(t, x)$ ограниченный нелинейный оператор. Ищутся решения уравнения (3), удовлетворяющие начальному условию $x(0) = x^0 \in D(A)$. Условия существования решений у уравнения (3) указаны в работах М. А. Красносельского, С. Г. Крейна и П. Е. Соболевского (РЖМат, 1957, 6365; реф. 1478). Приближенные решения $x_n(t)$ уравнения (3) конструируются как точные решения задачи

$$dx/dt + A_n(t)x = f_n(t, x), \quad x(0) = x_n^0, \qquad (4)$$

где $A_n(t)$ сильно (равномерно по $t \in [0, T]$) сходятся к $A(t)$, $f_n(t, x)$ равномерно сходятся к $f(t, x)$, $\| x_n^0 - x^0 \| \to 0$. Указаны условия (теорема 3) сильной сходимости $x_n(t)$ к решению уравнения (3).

„Приближенные" уравнения (4) в случае, когда E — это гильбертово пространство, специализируются в виде уравнений метода Бубнова — Галеркина:

$$dx/dt + P_n A(t) x = P_n f(t, x), \qquad (5)$$

где P_n — операторы ортогонального проектирования на линейную оболочку первых n элементов базиса, составленного из собственных векторов некоторого самосопряженного оператора, область определения которого совпадает с $D(A)$.

В конце статьи указаны достаточные условия (теорема 5) сходимости метода Бубнова — Галеркина для уравнения

$$dx/dt + Ax = f(t, x, bx),$$

где $f(t, x, y)$ — непрерывный оператор, A — самосопряженный положительно определенный оператор, а B — замкнутый неограниченный линейный оператор для которого $D(B) \supset D(A^{1/2})$. М. А. Красносельский

1480 К. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Зубов В. И. Л., ЛГУ, 1957, 241 стр., 10 р. 85 к.

Книга имеет целью познакомить читателя с новыми результатами, полученными в теории устойчивости движения, и подвести итог некоторым исследованиям автора в этой области. Основным содержанием является развитие второго метода Ляпунова, излагаемого в книге с весьма общей точки зрения для систем в абстрактном пространстве. Рассматривается приложение этих общих результатов к исследованию некоторых конкретных типов систем (системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы уравнений в частных производных).

Дается также развитие некоторых результатов, относящихся к первому методу Ляпунова, связанному с представлением рядами специального вида решений обыкновенных уравнений в окрестности особой точки. Книга содержит пять глав.

В первых параграфах первой главы (Устойчивость инвариантных множеств динамической системы в метрическом пространстве) приводится вспомогательный материал (основные сведения из общей теории динамических систем, изложенные в соответствии с книгой В. В. Немыцкого и В. В. Степанова (Качественная тео-

рия дифференциальных уравнений, изд. 2-е, ГИТТИ, М — Л, 1949)). В последующих параграфах даются основные определения, связанные с понятием устойчивости по Ляпунову инвариантных множеств динамических систем в метрическом пространстве. В частности исследуются возможные типы равномерной устойчивости. Доказываются теоремы, обобщающие теоремы метода функций Ляпунова на случаи, рассматриваемые здесь. Приводятся теоремы существования функционалов V, играющих в метрическом пространстве роль функций Ляпунова. Интегрированием неравенств, связанных с этими функционалами, выводятся оценки расстояния точки на траектории от инвариантов множества.

Рассматривается задача определения области притяжения асимптотически устойчивого множества.

Глава 2. Исследование задачи об устойчивости движения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь рассматривается приложение теории второго метода Ляпунова к задачам устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Даются теоремы существования дифференцируемых функций Ляпунова, решаются задачи определения области притяжения асимптотически устойчивой особой точки заданной системы, а также обратная задача определения структуры правых частей уравнений возмущенного движения по заданной области притяжения. Рассматривается аналитическая структура функций Ляпунова для случая систем уравнений с аналитической правой частью. Доказываются теоремы об устойчивости для систем уравнений с однородными правыми частями.

Глава 3. Исследование окрестности нулевого решения системы дифференциальных уравнений при помощи первого метода Ляпунова. Здесь рассматриваются задачи представления решений некоторых уравнений в частных производных рядами специального вида в окрестности особой точки. Теоремы, обосновывающие такие представления, прилагаются к исследованию окрестности особой точки обыкновенных дифференциальных уравнений и, в частности, эти теоремы прилагаются к решению некоторых задач устойчивости.

Глава 4. Исследование вопроса об устойчивости инвариантных множеств общих систем. Здесь дается определение „общей системы", обобщающее понятие динамической системы и имеющее целью включения в это общее абстрактное понятие некоторых схем траекторий, возникающих при исследовании систем уравнений, в частных производных. Понятие общей системы соответствует обобщениям динамической системы, исключающим требования единственности и заменяющее групповое свойство по t полугрупповым. Точнее говоря, это двупараметрическое семейство преобразований $F^t_{t_0}(p)$ $(p \in R)$ метрического пространства R, обладающее следующими свойствами: $F^t_{t_0}(p)$ определено при $p \in R$, $t_0 \geqslant 0$, $F^t_{t_0}(p) \in R$ при $t \geqslant t_0$ и $F^t_{t_0}(p)$ не пусто, $F^t_{t_0}(p) \to p$ при $t \to t_0 + 0$, для любого $p_1 \in F^{t_1}_{t_0}(p)$ имеем $\bigcup_{p_1} F^t_{t_1}(p_1) = F^t_{t_0}(p)$ при $t \geqslant t_1$ по $p_1 \in F^{t_1}_{t_0}(p)$. Для общих систем развивается понятие устойчивости инвариантных множеств. Доказываются теоремы, обобщающие второй метод Ляпунова на случай общих систем. Здесь, как и в первой главе, выводятся оценки расстояния „движения" от инвариантного множества и т. д.

Глава 5. Решение вопроса об устойчивости для систем уравнений с частными производными. Здесь приведены некоторые приложения развитой выше общей теории к исследованию задач устойчивости нулевого решения систем уравнений в частных производных. В §§ 2—3 этой главы приведены конкретные системы уравнений с частными производными, для которых выводятся критерии асимптотической устойчивости; в § 3 исследуется устойчивость решений задачи Коши для некоторых линейных систем при помощи однопараметрического семейства квадратичных функционалов, рассматриваемых в специально подобранном функциональном пространстве.

Примечание референта. Приведенная библиография не дает полного представления о современном состоянии литературы по теории устойчивости движения; обоснование некоторых утверждений изложено с недостаточной полнотой и убедительностью.

Н. Н. Красовский

1481 К. Курс дифференциальных уравнений. [Для унтов]. Изд 7-е, стереотипн. **Степанов В. В.** М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 468 стр., илл., 12 р. 10 к.

1482 Д. Некоторые задачи динамики твердого тела. Харламова Е. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1483. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений в частных производных. Лопатинский Я. Б., Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 4, 389—393 (рез. англ.)

Рассматривается ряд важных проблем, которые стоят на очереди в теории дифференциальных уравнений как по своему значению, так и по доступности для разработанной в настоящее время методики. Некоторые вопросы не затронуты, например проблематика, связанная с методами функционального анализа и с теорией квазианалитических функций, которые, по мнению автора, заслуживают отдельного изложения. Рассмотренные проблемы разбиты на три класса: приближенное решение уравнений, эффективное решение уравнений, исследование общих свойств уравнений.

Б. Р. Лаврук

1484. О задаче Коши для линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Сирота (On Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients. Shirota Taira), Ocaka Math. J., 1957, **9**, № 1, 43—59 (англ.)

Рассматривается задача Коши для общих систем, записанных в операторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} U - AU, \qquad (1)$$

где A есть (m, m)-матрица дифференциальных операторов произвольного порядка p_{ij}, не зависящая от $\partial/\partial t$

$$A = (a_{ij}),$$

$$a_{ij} = \sum_{\lambda_1 + \ldots + \lambda_N = 0}^{p_{ij}} a_{ij}^{(\lambda_1 \ldots \lambda_N)} \frac{\partial^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_N}}{\partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_N^{\lambda_N}} (i, j = 1, \ldots, m).$$

Коэффициенты $a_{ij}^{\lambda_1 \ldots \lambda_N}$ зависят от $t \in R'_t$ и от $x = (x_1 \ldots x_N) \in R^N_x$.

Доказывается, что задача имеет единственное решение в некотором гильбертовом пространстве при выполнении одного общего условия для A: эрмитова часть A должна быть полуограниченной в смысле нормы, индуцированной другой эрмитовой матрицей операторов B. Это условие есть обобщение соответствующего результата Лере. Ему удовлетворяют гиперболические системы по Лере и параболические системы в смысле боя лее общем, чем по И. Г. Петровскому. Доказывается

гипоэллиптичность параболических систем (свойство обладать гладкими решениями при гладких коэффициентах).

Пусть $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(b_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ $(i,j=1,\ldots,m)$ есть (m,m)-гладкая система комплексных линейных дифференциальных операторов в R^N_x. Обозначим через $O(B)$ ряд целых положительных чисел $s = \{s(i) | i = 1, \ldots, m\}$ таких, что порядок $O(b_{ij})$ не превосходит $s(i) + s(j)$. Пусть далее $h_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть члены порядка $s(i) + s(j)$ оператора $b_{ij}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Определение 1. Будем называть $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ равномерно сильно эллиптическим, если эрмитова часть оператора $H(x, i\xi) = (h_{ij}(x, i\xi))$ равномерно положительно определена для всех $x \in R^N_x$ и всех векторов $\xi : |\xi| = 1$, т. е. существует положительное число ρ такое, что

$$\Sigma_{ij}\left(h_{ij}(x, i\xi) + \overline{h_{ij}(x, i\xi)}\right) \cdot v_i v_j > \rho$$

для любого $v : |v| = 1$.

Определение 2. Будем говорить, что эрмитова часть оператора $A = A(t, x, \partial/\partial x)$ полуограничена в смысле нормы, индуцируемой симметрическим сильно эллиптическим оператором B, если для всех $t \in R^1_t$

$$B\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + A^*\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) B\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(t) B\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

для некоторой положительной непрерывной функции $\alpha(t)$ на R'_t.

Определение 3. Будем называть оператор $(\partial/\partial t - A)$ параболическим, если

1) $A = (a_{ij}) - (m, m)$-гладкая матрица на $R^1_t \times R^N$ такая, что $O\left(a_{ij}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \leqslant p(i) - p(i) + 2p$,

где p и $p(i)$ — положительные целые числа;

2) существуют (m, m)-гладкие матрицы B_{l_0} и B_{l_0+p}, симметрические и сильно эллиптические, такие, что $O(B_{l_0}) = \{l - p(i)\}$ для некоторого положительного целого $l_0 > \max_{i=1,\ldots,m} (p(i)) + p$

$$O(B_{l_0+p}) = \{l_0 + p - p(i)\}$$

и $$B_{l_0} A + A^* B_{l_0} \leqslant -\alpha B_{l_0+p} \qquad (\alpha > 0).$$

Основной результат работы состоит в следующем: Решение задачи Коши для системы (1) существует и единственно, если для матрицы $A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ можно найти такую симметрическую равномерно сильно эллиптическую матрицу $B\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, что эрмитова часть A полуограничена в смысле нормы, индуцируемой оператором B (в смысле определения 2).

В частности, это верно для систем, гиперболических по Лере и параболических в смысле определения 3.

А. Л. Крылов

1485. О локальном характере решений одного нетипичного линейного дифференциального уравнения 3 переменных и связанных с ним теоремах о регулярных функциях двух комплексных переменных. Леви (On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables. Lewy Hans), Ann. Math., 1956, **64**, № 3, 514—522 (англ.)

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial u}{\partial \bar{\alpha}_i} = 0, \qquad (1)$$

где A_i — комплекснозначные функции трех действительных переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Предполагается, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & \overline{A_1} & \sum_{i=1}^{3}\left(A_i \frac{\partial \overline{A_1}}{\partial \bar{\alpha}_i} - \overline{A_i} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_i}\right) \\ A_2 & \overline{A_2} & \sum_{i=1}^{3}\left(A_i \frac{\partial \overline{A_2}}{\partial \bar{\alpha}_i} - \overline{A_i} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_i}\right) \\ A_3 & \overline{A_3} & \sum_{i=1}^{3}\left(A_i \frac{\partial \overline{A_3}}{\partial \bar{\alpha}_i} - \overline{A_i} \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_i}\right) \end{vmatrix} \neq 0$$

в окрестности точки N пространства $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Пусть даны два дважды непрерывно дифференцируемые решения (1) $x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = x_1 + ix_2$, $y(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = y_1 + iy_2$, причем ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \end{vmatrix}$$

равен 2 и S есть гиперповерхность в четырехмерном пространстве x и y, задаваемая параметрическими уравнениями

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$
$$y = y(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Пусть U есть произвольное решение (1), имеющее непрерывные производные первого порядка. Если U рассматривать как функцию точки S, то U может быть продолжена по одну сторону S как аналитическая функция x и y. Обратно каждая аналитическая функция x и y, существующая на одной стороне S и имеющая непрерывные по нормали к S, удовлетворяет как функция $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ уравнению (1). Результат носит существенно локальный характер.

В. Н. Масленников

1486. Об интегрировании системы дифференциальных уравнений в частных производных. Гермэнеску (Asupra integrarii unui sistem de ecuatii cu derivate partiale. Ghermanescu M.), Comun. Acad. R. P. R. 1955, 5, № 12, 1703—1706 (рум.; рез. русск., франц.)

Элементарное рассмотрение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, идущее от статьи Врэнчану (РЖМат, 1955, 5279).

R. Blum

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 11, 1211

1487. О существовании гармонических дифференциальных форм. Фикера (Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche. Fichera Gaetano), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1955, **24**, № 2, 523—545 (итал.)

Новое, сравнительно простое доказательство известной теоремы Ходжа о существовании на компактном дифференцируемом многообразии гармонической формы, имеющей заданные периоды на системе гомологически независимых циклов. Это доказательство (которое, как указывает автор, докладывалось им еще в 1949 г.) связано с циклом работ автора по приложению линейного функционального анализа к задачам теории уравнений с частными производными. Искомая форма получается в результате проектирования произвольной формы с заданными периодами (ее существование гарантируется теоремой Картана-де Рама) на соответственно выбранное подпространство форм, после чего задача сводится к проверке гармоничности проекции, т. е. приобретает локальный характер. Здесь применяется решение первой однородной краевой задачи для уравнения $\varepsilon^{2m}(u)=\varphi$ в области n-мерного евклидова пространства, где ε — обобщенный оператор Лапласа (с весом в коэффициентах) для дифференциальных форм. Решение имеет вид $u=T^{2m}(\varphi)-T^mPT^m(\varphi)$, где T — интегральный оператор, ядром которого служит фундаментальное решение уравнения $\varepsilon(u)=0$, а P — оператор проектирования на пространство гармонических форм; при этом $u\in C^{(2)}$ для $m\geqslant n/4-2$ при любой $\varphi\in L^2$

А. Д. Мышкис

1488. Исследование и обобщения принципа Дирихле. **Брело** (Étude et extensions du principe de Dirichlet. Brelot M.), Ann. Inst. Fourier, 1953—1954 (1955), **5**, 371—419 (франц.)

Исследуется решение задачи Дирихле в так называемых пространствах Беппо-Леви (т. е. в пространствах $W_2^{(1)}$). Они получаются с помощью замыкания в метрике интеграла Дирихле многообразия гладких функций C^∞. Доказательство разрешимости задачи Дирихле сводится к установлению разложимости пространства всех функций с конечным интегралом Дирихле (т. е. с конечной формой) в ортогональную сумму подпространства гармонических функций и подпространства функций, обращающихся в определенном смысле в нуль на границе области и имеющих конечную норму. Подробно исследована эта задача в пространствах Грина (ε), в которых существует функция Грина G_p. Вводятся „линии Грина" — семейство ортогональных траекторий к поверхности $G_p=\text{const}$. С помощью этих линий определяется предельное значение „по радиусам" функций с конечным интегралом Дирихле.

М. И. Вишик

1489. Об устойчивости решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Рутман М. А., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 5, 770—773

Распространение предыдущих результатов автора (РЖМат, 1957, 2330) на уравнения с нестационарными операторами.

Теорема 1. Рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial^n y}{\partial t_1\partial t_2\ldots\partial t_n}-A(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n)y=x_0(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n),$$

$$y(0,\ t_2,\ldots,\ t_n)=x_1(t_2,\ldots,\ t_n);\ y_1(t_1,\ 0,\ldots,t_n)=x_2(t_1,t_3,\ \ldots,\ t_n);\ \ldots;\ y(t_1,\ t_2,\ldots,\ 0)=x_n(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_{n-1})$$

$(0\leqslant t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n<\infty)$. Пусть семейство операторов $A(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n)$ компактно и при достаточно малом положительном ε и достаточно больших значениях $\sum t'_j,\ \sum t''_j$ из $\sum|t'_j-t''_j|\leqslant 1$ следует: $\|A(t'_1,t'_2,\ldots\ldots,t'_n)-A(t_1'',\ t_2'',\ \ldots,\ t''_n)\|<\varepsilon$.

Положим: $\alpha_\omega=\overline{\lim_{\Sigma t_j\to\infty}}\left(\max_{\lambda\in S_{A(t,\ldots,t_n)}}\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\right)$ (S_A — спектр A).

Тогда для всякого $\alpha>\alpha_\omega$ можно утверждать, что из ограниченности $e^{-\alpha\Sigma t_j}\|x_0(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n)\|$; $e^{-\alpha\Sigma t_j}\|x_k(t_1,\ldots,\ t_{k-1},\ t_{k+1},\ldots,\ t_n)\|$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ следует ограниченность $e^{-\alpha\Sigma t_j}\|y(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n)\|$.

Теорема 2. Рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t_1\partial t_2}-A(t_1,\ t_2)\frac{\partial y}{\partial t_1}-B(t_1,\ t_2)\frac{\partial y}{\partial t_2}-C(t_1,\ t_2)y=$$

$$=x_0(t_1,t_2),\ y(0,\ t_2)=x_1(t_2);\ y(t_1,0)=x_2(t_1)\ (0\leqslant t_1,t_2<\infty).$$

Пусть семейства $A(t_1,\ t_2)$, $B(t_1,\ t_2)$, $C(t_1,\ t_2)$ удовлетворяют условию теоремы 1 и при достаточно больших значениях t_1+t_2 попарно коммутируют. Пусть далее $\|\partial A/\partial t_1\|$ и $\|\partial B/\partial t_2\|$ равномерно ограничены.

$$\text{Если }\overline{\lim_{t_1+t_2\to\infty}}\left\{\max_{\lambda\in S_A,\ \mu\in S_B,\ \nu\in S_C}\{Re(\lambda+\mu)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{[\operatorname{Re}(\lambda-\mu)]^2+2\operatorname{Re}(\nu+\lambda\mu)+2|\nu+\lambda\mu|}\}\right\}<0,$$

то всяким равномерно ограниченным по норме $x_0(t_1,\ t_2)$, $x_1(t_2)$, $x_2(t_1)$ отвечает равномерно ограниченное по норме решение $y(t_1,\ t_2)$.

Теорема 3. Рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial^n y}{\partial t_1\partial t_2\ldots\partial t_n}-\sum A_j\frac{\partial^{n-1}y}{\partial t_1\ldots\partial t_{j-1}\partial t_{j+1}\ldots\partial t_n}-$$

$$-\sum A_{jk}\frac{\partial^{n-2}y}{\partial t_1\ldots\partial t_{j-1}\partial t_{j+1}\ldots\partial t_{k-1}\partial t_{k+1}\ldots\partial t_n}-$$

$$-\ldots-A_{12\ldots n}y=(x\,t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n);$$

$$=y(0,t_2,\ldots,t_n)=x_1(t_2,\ldots,t_n);\ y(t_1,\ 0,\ldots,t_n)=x_2(t_1,t_3,\ldots,t_n);$$

$$\ldots;\ y(t_1,\ t_2,\ldots,\ 0)=x_n(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_{n-1})$$

$$(0\leqslant t_1<\infty;\ 0\leqslant t_j\leqslant b_j<\infty;\ j=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Пусть каждое из семейств A_j, $A_{jk},\ldots,A_{12\ldots n}$ вместе со всеми производными вплоть до $\partial^n A/\partial t_1\,\partial t_2\ldots\partial t_n$ равномерно ограничено по норме, семейство $A_1=A_1(t_1,\ t_2,\ldots\ldots,\ t_n)$ компактно и для некоторого достаточно малого положительного ε и достаточно больших t_1' и t_1'' из $|t'_1-t_1''|\leqslant 1$ следует $\|A_1(t'_1,t_2,\ldots,t_n)-A_1(t''_1,t_2,\ldots\ldots,t_n)\|<\varepsilon$.

Если $\overline{\lim_{t_1\to\infty}}\left\{\max_{\lambda\in SA_1}\operatorname{Re}\lambda\right\}<0$, то всяким равномерно ограниченным по норме $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ отвечает равномерно ограниченное по норме решение y.

Из теоремы 1 при $n=1$ следует один результат М. Г. Крейна (Успехи матем. наук, 1948, **3**, (25), 166.) При этом несколько ослаблены требования, наложенные на семейство $A(t)$.

И. С. Иохвидов

1490. Вычетной метод решения краевых и смешанных задач для диференциальных уравнений. § 1, 2. Ратулов М. Л., Азәрб.ССР Элмләр Акад. хәбәрләри, Изв. АН АзербССР, 1957, № 12, 3—16 (рез. азерб.)

Рассматривается задача нахождения решения системы

$$\frac{\partial^q u}{\partial t^q}=\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ mk+1<p}}A_{kl_1\ldots l_n}(x)\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t^k\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}+f(x,t)$$

в конечной области D, точки $x=(x_1,\ldots,\ x_n)$ с границей Γ, при граничном условии

$$\lim_{x\to y}\sum_{k=0}^{q}\frac{\partial^k}{\partial t^k}B_k\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t)=0,\quad y\in\Gamma,$$

и начальном условии

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\psi_i(x) \quad (i=0,\ldots,q-1),$$

где m, q, p — произвольные натуральные числа, удовлетворяющие равенству $p=qm$; $A_{kl_1}\ldots_{l_n}(x)$ суть N-мерные квадратные матрицы, $B_k\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — N-мерные квадратные матрицы линейных дифференциальных операторов по x, с коэффициентами, зависящими от $y\in\Gamma$, $f(x,t)$.

Применяя свой вычетный метод, разработанный ранее (Матем. сб., 1952, **30(72)**, № 3), автор решение задачи сводит к построению матрицы Грина $G(x,\xi,\lambda)$, соответствующей спектральной задаче, что строится без труда для одномерной задачи.

При $n>1$ разработана методика сведения области D к области меньшего измерения D_1 для некоторого класса смешанных и граничных задач, допускающих полное разделение пространственных переменных. Доказаны теоремы, утверждающие возможность представимости достаточно гладких решений рассматриваемых задач при помощи вычетных формул. Библ. 3 назв.

П. Ф. Фильчаков

1491. Вычетной метод решения краевых и смешанных задач для дифференциальных уравнений. § 3. Приложение. Расулов М. Л., АзәрбССР Элмләр Акад. Хәбәрләри. Изв. АН АзербССР, 1958, № 1, 3—12 (рез. азерб.)

Применяется вычетной метод (реф. 1490) к решению смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\nu^2 a(z)\frac{\partial u}{\partial t}=\nu^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\nu^2 b(z)\frac{\partial u}{\partial z}$$

при краевых условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}+\alpha(z)\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{r=a}=0;$$

$$u(b,\ z,\ t)=\beta(z);\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h}=0$$

и в начальных условиях

$$u(r,\ z,\ 0)=\varphi_0(r,\ z);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(r,\ z).$$

К рассматриваемому уравнению приводятся некоторые осесимметричные нестационарные задачи фильтрации в пласте, однородность которого изменяется только в направлении оси z.

Рассмотрены также частные случаи неоднородного осесимметричного пласта и, кроме того, задача о распространении тепла в трубе, в предположении, что однородность материала сохраняется в каждом сечении, перпендикулярном оси трубы и изменяется только вдоль этой оси. Библ. 3 назв.

П. Ф. Фильчаков

1492. Абстрактная формулировка метода разделения переменных. Фридман (An abstract formulation of the method of separation of variables. Friedman Bernard.), N. Y. Univ. Inst. Math. Sci. Div, Electromagn. Res. Res. Rept, 1955, № BR-12, 25 pp.) (англ.)

Общая схема метода разделения переменных Фурье формулируется в абстрактных терминах операторов в гильбертовых пространствах применительно к операторам вида

$$L=A_1\otimes B_1+\ldots+A_k\otimes B_k,$$

где A_j и B_j — самосопряженные операторы, действующие в сепарабельных гильбертовых пространствах H_1 и H_2, причем под прямым произведением $A\otimes B$ понимается оператор, определенный соотношением

$$A\otimes B\sum_1^m u_j\otimes v_j=\sum_1^m Au_j\otimes Bv_j$$

и действующий в прямом произведении пространств $H_1\otimes H_2$, где $u_j\in H_1$, $v_j\in H_2$. При этом требуется, чтобы операторы A_j имели общее спектральное представление, т. е. чтобы

$$A_j u=\int_{-\infty}^{\infty} a_j(\lambda)\,dE(\lambda)\,u \qquad (1\leqslant j\leqslant k)$$

для любого u из общей части областей определения $A_1,\ldots,A_k$, где $a_1(\lambda),\ldots,a_k(\lambda)$ — действительные функции. Доказывается, что для h из $H_1\otimes H_2$ уравнение $Lw=h$ имеет решение, если операторы

$$(a_1(\lambda)B_1+\ldots+a_k(\lambda)B_k)^{-1},$$

действующие в H_2, равномерно ограничены для всех λ, для которых $dE(\lambda)>0$; само решение тогда дается формулой

$$w=\int dE(\lambda)\otimes(a_1(\lambda)B_1+\ldots+ak(\lambda)Bk)^{-1}h.$$

Эта теорема иллюстрируется на известных примерах разделения переменных в уравнениях математической физики.

Вторая теорема работы относится к операторам вида

$$L=A\otimes I_2+I_1\otimes B,$$

где I_1 и I_2 — тождественные операторы в H_1 и H_2.

В. И. Левин

1493. Об одной смешанной задаче изгиба прямоугольной пластинки. Минасян Р. С., Докл. АН АрмССР, 1956, **22**, № 1, 3—12 (рез. арм.)

Изучается задача о равновесии прямоугольной пластинки, изгибаемой нормальными усилиями, когда одна часть ее края закреплена, а другая оперта. Автор пользуется рядами Фурье и приводит задачу к бесконечной системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Система эта, как показывает автор, оказывается вполне регулярной, а это дает возможность получить приближенное решение задачи с любой точностью. В частном случае свободного опирания пластинки всем краем получается известное решение Леви (C. r. Acad. sci., 1899, 129).

А. И. Калакдия

1494. Новые теоремы существования и единственности для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Чинкуини-Чибрарио (Nuovi teoremi di esestenza e di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali. Cinquini Cibrario Maria), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1955, **9**, № 1-2,) 65—113 (итал.)

В совместных работах автора с Чинкуини (S. Cinquini) были получены весьма общие теоремы существования и единственности для уравнения $z_x=f(x,y,z,z_y)$ при начальном условии $z(0,y)=\varphi(y)$ (Ann. mat. pura ed appl., 1951, **32**, 121—155; Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1952, **6**, 187—243).

В данной работе доказываются аналогичные теоремы для системы $p_i=f_i(x,y,z_k,q_i)$ $(i,k=1,\ldots,m;\ p_i\equiv z_{ix},\ q_i\equiv z_{iy})$, в полосе $D_a(-\infty<y<\infty,\ 0\leqslant x\leqslant a$, для различных $a>0)$ при начальных условиях $z_i(0,y)=\varphi_i(y)$.

Сначала рассматривается квазилинейная система

$$p_i+p_i(x,y,z_k)\,q_i=f_i(x,y,z_k), \qquad (Q):$$

где p_i и f_i — квазинепрерывные по x и непрерывные по y, z_k функции, а φ_i удовлетворяют условию Липшица. Доказательства основаны на теореме Асколи и на некоторых интегральных уравнениях, введенных при более сильных ограничениях Курантом (Courant) и Лаксом (Lax) (Communs Pure and Appl. Math., 1949, 2, 255—273) функции $z_i(x,y)$ оказываются абсолютно непрерывными по x, удовлетворяющими условию Липшица по y и уравнениям (Q) почти всюду в D_a. Далее показывается, что при некоторых условиях гладкости, наложенных на p_i, f_i и φ_i, функции q_i становятся абсолютно непрерывными по x и удовлетворяющими условию Липшица по y. Результаты распространяются на нелинейные системы вида $p_i = f_i(x,y,z_\kappa,q_i)$, для которых теоремы единственности уже были получены Чинкуини (РЖМат., 1956, 2215).

Указывается также на возможность обобщения для систем вида

$$F_h(x,y;z_i;p_j;q_\kappa)=0.$$

Наконец, показывается, что для всякой теоремы существования можно получить соответствующую теорему единственности; показывается также, что z_i непрерывно зависит от начальных данных φ_i. F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 620.

1495. Элементарные решения операторов Δ и $\Delta+\lambda$ (Solutions élémentaires des opérateurs Δ et $\Delta+\lambda$), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, **2**, № 8, 1—8 (франц.)

1496. Свойства максимума и минимума решений уравнений с частными производными второго порядка эллиптического и параболического типов. Пуччи (Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabólico. Pucci Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957 (1958), **23**, № 6, 370—375 (итал.)

После обзора результатов в этом направлении доказывается следующая общая теорема. Пусть в шаре S: $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 < r^2$ дана функция $u \in C^{(2)}(S)$, непрерывная в $\bar{S}$, для которой

$$\sum a_{ij}(x)\,u_{ij} + \sum b_i(x)\,u_i + c(x)\,u \leqslant 0 \quad (\text{в } S).$$

Пусть коэффициенты a_{ij} ограничены, $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$, $c \leqslant 0$ и для некоторой граничной точки x^0 шара S при

$$x \to x^0,\quad x \in S\quad (|x|^2 = \sum x_i^2)$$

$$\underline{\lim} \sum a_{ij}(x)\,x_i\,x_j > 0,\qquad \overline{\lim}\ \frac{b_i(x)}{B(r-|x|)}\,\frac{x_i}{r} < 1,$$

$$\underline{\lim}\ \frac{c(x)\,(r-|x|)}{B(r-|x|)} > -1$$

для некоторой положительной непрерывной суммируемой убывающей функции $B(\tau)\,(0<\tau<r)$. Пусть далее $u(x) > u(x^0) \leqslant 0$ в S и $\lambda \subset S$ — отрезок без концов, примыкающий к x^0. Тогда

$$\underline{\lim}_{x \to x_0,\ x \in \lambda} \frac{u(x)-u(x^0)}{|x-x^0|} > 0.$$

А. Д. Мышкис

1497. О функции Грина метагармонического оператора для задач Дирихле и Неймана в области, внешней к кругу и сфере. Тиссен (Sur la fonction de Green de l'opérateur métaharmonique pour les problèmes de Dirichlet ou de Neumann posés à l'extérieur d'un cercle ou d'une sphère. Thyssen M.), Bull. Soc. roy. sci. Liége. 1958, 27, № 3-4, 54—67 (франц.)

Методом разделения переменных построена функция Грина уравнения $\Delta u - k^2 u = 0$ в области, внешней к кругу радиуса a, в виде

$$G_D = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\mu_n(\pi - |\theta-\theta_0|)}{\operatorname{sh}\mu_n\pi} \times \times \frac{K_{i\mu_n}(kr_0)\cdot K_{i\mu_n}(kr)}{K_{i\mu_n}(ka)\left[\frac{\partial}{\partial\mu}K_{i\mu}(ka)\right]_{\mu=\mu_n}}$$

для задачи Дирихле и

$$G_N = -\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\nu_n(\pi - |\theta-\theta_0|)}{\operatorname{sh}\nu_n\pi} \times \times \frac{K_{i\nu_n}(kr_0)\cdot K_{i\nu_n}(kr)}{K_{i\nu_n}(ka)\left[\frac{\partial}{\partial\nu}K'_{i\nu}(ka)\right]_{\nu=\nu_n}}$$

для задачи Неймана. Здесь $K_{i\mu}(x)$ — модифицированные функции Бесселя чисто мнимого индекса; μ_n и ν_n — те значения, для которых выполняются граничные условия $K_{i\mu_n}(ka)=0$ в случае задачи Дирихле и $\frac{\partial}{\partial r}K_{i\nu_n}(ka)=0$ в случае задачи Неймана.

Доказано, что построенные таким путем функции удовлетворяют всем условиям, определяющим функции Грина. Аналогичные рассмотрения проводятся для внешних краевых задач в трехмерной области вне сферы. Соответствующие функции получены в виде

$$G_D = \frac{1}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|\theta-\theta_0|}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}\ \frac{\operatorname{ch}\mu_n(\pi-|\varphi|)}{\operatorname{ch}\mu_n\pi} \times \times \frac{K_{i\mu_n}(kr)\cdot K_{i\mu_n}(kr_0)}{\sqrt{rr_0}\cdot K'_{i\mu_n}(ka)\left[\frac{\partial}{\partial_\mu}K_{i\mu}(ka)\right]_{\mu=\mu_n}}$$

для задачи Дирихле и

$$G_N = -\frac{1}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|\theta-\theta_0|}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\nu_n(\pi-|\varphi|)}{\operatorname{ch}\nu_n\pi} \times \times \frac{K_{i\nu_n}(kr)\cdot K_{i\nu_n}(kr_0)}{\sqrt{rr_0}\cdot K_{i\nu_n}(ka)\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{K_{i\nu}(ka)}{2ka}\right)-K'_{i\nu}(ka)\right]_{\nu=\nu_n}}$$

для задачи Неймана.

В статье имеются опечатки. А. Г. Свешников

1498. Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов. Ладыжен-

ская О. А., Вестн., Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 60—69 (рез. англ.)

В заметке излагаются некоторые обобщения установленных автором оценок для линейных эллиптических операторов второго порядка и следствия из них. Именно, для любой функции $u(x)\in W_2^m(\Omega)$, равной нулю на границе S области Ω изменения x, и какого-либо эллиптического оператора $Lu = a_{ij}u_{ij} + a_iu_i + au$, справедливо неравенство

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^{m}\sum_{(\kappa)}\left(D^k u\right)^2 dx \equiv \| u \|^2_{W_2^m(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1\left[\| Lu \|^2_{W_2^{m-2}(\Omega)} + \| u \|^2_{L_2(\Omega)}\right] \qquad (1).$$

Неравенство (1) имеет место и для граничных условий вида $\frac{\partial u}{\partial l} - \delta u \mid_\zeta = 0$; в случае $m=2$ оно эквивалентно неравенству

$$c_2 \| u \|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \int_\Omega (Lu)^2 dx + \| u \|^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad c_2>0. \qquad (2)$$

В заметке оценка (1) устанавливается для неограниченных областей Ω; снимается ограничение, требовавшее при выводе оценки (1) выполнения граничного условия функциями $L^k u$ $(k=1,2,...,\left[\frac{m-1}{2}\right]$ для первого граничного условия и $k=1,2,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right]-1$ — для остальных); аналог неравенства (1) устанавливается для произведения эллиптических операторов, именно (при $m=2$),

$$c_3 \| u \|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \int_\Omega LuMu dx + \| u \|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

$$c_3>0. \qquad (3)$$

На основании указанных оценок доказывается сходимость в метрике W_2^m метода наименьших квадратов, метода Галеркина и метода Ритца для соответствующих краевых задач и разрешимость этих задач в смысле линейных функционалов в W_2^m. На основании оценок, установленных референтом для сильно эллиптических систем, результаты распространяются на эти системы. О. В. Гусева

1499. Функциональное рассмотрение краевых задач для линейных уравнений и систем уравнений в частных производных. Петтинео (Trattazione funzionale dei prodlemi al contorno relativi alle equazioni ed ai sistemi di equazioni lineari a derivate parziali. Pettineo Benedetto), Rend. Circolo mat. Palermo, 1956, 5, № 1, 101—116 (итал.)

Пиконе (Picone) нашел решение краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных, используя при этом систему интегральных уравнений Фишера—Рисса, полученную из тождества Грина (Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. sci., fis., math. e natur., 1947 2, 365—371, 485—492, 717—725). Настоящая работа посвящена доказательству следующего утверждения: при некоторых предположениях решение системы Фишера—Рисса в специальном смысле является „обобщенным" решением соответствующей краевой задачи.

Сначала рассматривается случай эллипических дифференциальных уравнений второго порядка. Результаты обобщаются на неэллиптические дифференциальные уравнения второго порядка. G. Fichera.

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 3, 216.

1500. О функции Грина для задачи Дирихле в случае линейных эллиптических дифференциальных уравнений. Петтинео (Sulla funzione di Green pel problema di Dirichlet relativo alle equazioni lineari ellittiche. Pettineo Benedetto), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 3, 306—311 (итал.)

Используя метод Пиконе (Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci fis., mat. e natur., 1947, 2, 365—371, 485—492, 717—725) для решения систем уравнений Фишера—Рисса в случае краевых задач для уравнений эллиптического типа, автор пытается найти путем формального разложения в ряд по функциям Грина решение задачи Дирихле в случае эллиптических уравнений с m переменными. Сходимость (в среднем) таких рядов доказывается только в случае двух или трех переменных. C. Miranda

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, №9, 741.

1501. Задача получения кривой для некоторых систем уравнений в частных производных эллиптического типа с двумя переменными Греко (Il problema di derivata obliqua per certi sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo ellittico in due variabili. Greco Donato), Ann. mat. pura ed appl., 1956, 42, 1—24 (итал.)

Пусть T—конечная область плоскости $x=(x_1, x_2)$, контур FT которой состоит из конечного числа достаточно гладких замкнутых кривых, а

$$\mathfrak{M}^{(j)}[u] = \sum_{h,k}^{1,2} a^{(j)}_{h,k}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{k=1}^{2} b^{(j)}_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c_j(x)u$$

$$\left(a^{(j)}_{1,2} = a^{(j)}_{2,1}\right)$$

$$(j=1,\ldots,m),$$

$$E_h[u_1,u_2,\ldots,u_m] = \sum_{k=1}^{m}\left\{p_{h,k}(x)\,a_k(x)\frac{du_k}{d\nu_k} + a_{kh}(x)\frac{du_k}{ds} + \beta_{h,k}(x)\,u_k(x)\right\}$$

$$(h=1,\ldots,m)$$

— операторы, коэффициенты которых в T и на FT обладают определенной гладкостью.

Здесь $\frac{du_k}{ds}$ — производная вдоль дуги, а $\frac{du_k}{d\nu_k}$ — конормальная производная, соответствующая оператору $\mathfrak{M}^{(k)}[u]$.

Кроме того, предполагается, что формы $\Phi^{(j)}(t_1,t_2) = \sum_{h,k}^{1,2} a^{(j)}_{h,k}\, t_1^h\, t_2^k$ определенно положительны.

Рассматривается вопрос о существовании и единственности вектора $u(x)=u_1(x),\ldots,u_m(x)$, удовлетворяющего системе

$$\mathfrak{M}^{(j)}[u_j(x)] = 0 \text{ для } x\in T-FT \ (j=1,\ldots,m) \qquad (1)$$

и граничным условиям

$$E_h[u_1,\ldots,u_m] = f_h(x) \text{ для } x\in FT \ (h=1,\ldots,m). \qquad (2)$$

Посредством функции Леви задача сводится к решению некоторой неоднородной системы (A) интеграль-

ных уравнений с правыми частями $f_h(x)$ $(h=1,...,m)$. Если (B)—система, союзная с однородной системой, полученной из (A) при $f_k(x)=0$ $(k=1,...,m)$, то условие, необходимое и достаточное для разрешимости задачи (1)—(2), обычным образом выражается через решение системы (B) и функции $f_h(x)$. Даны и другие виды этого условия.

Для случая $\det \| p_{hk}(x) \| \neq 0$ доказана теорема единственности:

$$\text{Пусть } C_h^* = C_h - \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial b_k}{\partial x_k} + \sum_{h,k}^{1,2} \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_k \partial x_h},$$

пусть для всякого h $C^*_h + C_h \leqslant 0$ при $x \in T$ и пусть $\| a_{kh}(x) \|$ — симметричная матрица. Тогда, если квадратичная форма

$$\chi(t_1, t_2, ..., t_m) = \sum_{h,k}^{1...m} \left[\beta_{hk}(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} a_{h,k}(x) \right] t_h t_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} b_k(x)$$

является положительно определенной, то задача (1)—(2) допускает единственное решение.

Г. Л. Мизернюк

1502. К задаче Лауричелла для уравнения четвертого порядка. Греко (Sul problema di Lauricella per una particolare equazione del quarto ordine. Greco Donato), Bol. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 3, 394—401 (итал.)

Результат, полученный в предыдущей работе, используется для решения следующей задачи: Пусть T—односвязная область плоскости $x=(x_1,x_2)$ с достаточно гладким контуром FT. Требуется определить функцию $u(x)$ класса $C^{(1)}$ в T и класса $C^{(4)}$ в $T-FT$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{h+k=4} A_{kh} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^h \partial x_2^k} = 0 \quad \text{при } x \in T-FT, \qquad (1')$$

где A_{kh} — постоянные, и граничным условиям

$$u = f_1(x), \quad \frac{du}{dn} = f_2(x) \quad \text{при } x \in FT \qquad (2')$$

($f_1(x)$, $f_2(x)$ — заданные функции, имеющие, скажем, непрерывную производную вдоль FT, а n—нормаль к FT).

При этом предполагается, что форма

$$\Phi[t_1,t_2] = \sum_{h+k=4} A_{hk} t_1^h t_2^k$$

определенно положительна.

Будучи приведенной к виду (1)—(2) указанного выше реферата, (1′) заменяется системой двух уравнений второго порядка

$$\mathfrak{M}^{(1)}[u_1] \equiv \Delta_2 u_1 = 0, \qquad \mathfrak{M}^{(2)}[u_2] \equiv a_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

где $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1$, а условия (2′)(—) заменяются условиями

$$\frac{du_1}{ds} + \frac{du_2}{ds} = \frac{df}{ds},$$

$$\frac{du_1}{dn} + \frac{1}{\cos(n,\nu)} \frac{du_2}{d\nu} + \operatorname{tg}(n,\nu) \frac{du_2}{ds} = f_2 \cdot (\nu_1 = n, \nu_2 = \nu).$$

Условие совместности принимает вид $\int_{FT} \frac{df_1}{ds} ds = 0$ и выполняется для любой функции $f_1(x)$. Этим обеспечивается существование решения поставленной задачи. На единственность последнего автор указывает, но не останавливается на доказательстве, ссылаясь на работу Леви.

Г. Л. Мизернюк

1503. Об изолированных особенностях решений уравнения $\Delta u = e^u$. Ниче (Über die isolierten Singularitäten der Lösungen von $\Delta u = e^u$. Nitsche Johannes), Math. Z., 1957, **68**, № 3, 316—324 (нем.)

Характер нелинейности эллиптического дифференциального уравнения в сильной степени влияет на характер поведения регулярного решения вблизи изолированной особой точки. Нелинейность уравнения, вообще говоря, существенно суживает классы допустимых регулярных решений вблизи изолированной особой точки. Ссылаясь на Йоргенса (РЖМат, 1956, 5247), автор приводит в качестве примера уравнение $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 1$, регулярные решения которого вблизи бесконечно удаленной точки имеют вид:

$$u(x,y) = \frac{1}{2} Q(x,y) + Ax + By + C \log | Q(x,y) |,$$

где $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ $(ac - b^2 = 1)$.

Автор изучает поведение регулярных решений уравнения $\Delta u = e^u$ вблизи изолированной особой точки. Замечая, что $g(z) = \frac{1}{2} u_{zz} - \frac{1}{4} u_z^2$ является аналитической функцией от z, автор устанавливает ряд вспомогательных предложений. Например доказано, что всякое регулярное в круге $| z - z_0 | \leqslant r$ решение $u(x,y)$ уравнения $\Delta u = e^u$ представляется в виде

$$u(z, \bar{z}) = \log \alpha - 2 \log \{ (\omega_1(z))^2 - (\omega_2(z))^2 \},$$

где ω_1 и ω_2 — линейно независимые решения уравнения

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + q(z)\omega = 0,$$

удовлетворяющие условиям:

$$\omega_1(z_0) = 1, \ \omega_1'(z_0) = -\frac{1}{2} u_{z_0}(z_0, \bar{z}_0),$$

$$\omega_2(z_0) = 0, \ \omega_2'(z_0) = \sqrt{\alpha/8}, \qquad \alpha = e^{u(z, \bar{z}_0)}.$$

С помощью упомянутых вспомогательных предложений автором доказаны следующие две теоремы:

1. Если $u(x,y)$ — регулярное решение уравнения $\Delta u = e^u$ в области $0 < x^2 + y^2 \leqslant r^2$, что либо u регулярна в точке $(0,0)$, либо же в окрестности последней имеет место одно из следующих асимптотических формул:

1) $u(x,y) = (K-1) \log (x^2 + y^2) + \Phi(x,y), \quad K > 0,$

2) $u(x,y) = -\log (x^2 + y^2) - 2 \log | \log (x^2 + y^2) | + \Psi(x,y),$

где Φ и Ψ — непрерывны в круге $x^2+y^2\leqslant r^2$ и аналитичны в области $0<x^2+y^2<r^2$, причем вблизи точки $(0,0)$

$$\Phi_x, \Phi_y = O(\rho^{2K-1}), \quad \Phi_{xx}, \Phi_{xy}, \Phi_{yy} = O(\rho^{2K-2}),$$
$$\Psi_x, \Psi_y = O(\rho^{-1} \mid \lg^{-2}\rho \mid), \quad \Psi_{xx}, \Psi_{xy}, \Psi_{yy} = O(\rho^{-2} \mid \log^{-2}\rho \mid),$$

где $\rho^2 = x^2+y^2$.

2. Если $u(x,y)$ — регулярное в круге $x^2+y^2\leqslant r^2$ решение уравнения $\Delta u = e^u$, то имеет место неравенство

$$r \leqslant \sqrt{8/\alpha}, \quad u(0,0) = \log\alpha. \tag{1}$$

Как указывает автор, этот результат иным путем был получен Осерманом (Osserman R., On a differential inequality and conformal mapping of surfaces. Techn. Rep., **3**, 1956, Stanford Univ.).

И. Н. Векуа

1504. О существовании нормальной производной решения задачи Дирихле. Эйдус Д. М., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 13, 147—150

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничном условии $u|_S = \psi$, имеющем конечную норму:

$$\|\psi\|^2 = \int_S (\psi^2 + \operatorname{grad}_S^2 \psi)\, dS,$$

где $\operatorname{grad}_S \psi$ — поверхностный градиент ψ. Доказано, что решение задачи $u(x)$ имеет нормальную производную $\partial u/\partial\nu$ на S, причем $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in L_2(S)$.

Основную роль в доказательстве играет неравенство

$$\int_\Omega \left[v^2 + \operatorname{grad}^2 v \right] d\Omega + \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dS \leqslant c \int_S \left(v^2 + \operatorname{grad}_S^2 v \right) dS,$$

где v — любая непрерывно дифференцируемая гармоническая функция в $\overline{\Omega}$, Ω — любая многосвязная область с достаточно гладкой границей. В случае односвязной области оно было доказано референтом. М. И. Вишик

1505 Теоремы существования для задач Дирихле и Нёймана в случае уравнения $\Delta_2 u - ku = 0$. Америо (Teoremi di esistenza par i problemi di Dirichet e di Neumann per l'equazione $\Delta_2 u - ku = 0$. Americo Luigi), Ricerche mat., 1956, **5**, № 1, 58—96 (итал.)

Пусть τ — конечная область на плоскости, граница σ которой состоит из конечного числа простых, замкнутых, не пересекающихся друг с другом кривых из класса C^2. Пусть ν_M — внутренняя нормаль к σ в точке M. Говорят, что решение уравнения $\Delta u - ku = 0$ (k — действительное или комплексное) принадлежит классу E, если при стремлении точки P к M вдоль ν_M функция $u(P)$ и производная $\partial u(P)/\partial\nu_M$ стремятся соответственно к пределам $A(M)$ и $B(M)$ почти всюду на σ и если

$$u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ A(M)\frac{\partial v(P,M)}{\partial \nu_M} - B(M) v(P,M) \right\} d\sigma_M,$$

если $P \in \tau$,

$$0 = \int_\sigma \left\{ A(M)\frac{\partial v(Q,M)}{\partial \nu_M} - B(M) v(Q,M) \right\} d\sigma_M,$$

если $Q \notin \tau + \sigma$,

где v является фундаментальным решением уравнения. Аналогично, класс E' определяется как класс решений уравнения в неограниченной области τ'.

В настоящей статье даются необходимые и достаточные условия существования решений задач Дирихле и Нёймана, принадлежащих классу E и E' соответственно в областях τ и τ'.

Задача Нёймана в τ: Если k не является собственным значением, то существует единственное решение из класса E, удовлетворяющее заданным граничным условиям и суммируемое к $B(M)$. Если k является собственным значением, то существует решение из класса E тогда и только тогда, когда $B(M)$ ортогональна на σ к собственным функциям задачи.

Задача Дирихле в τ: Чтобы существовало решение из класса E, принимающее заданное значение, необходимо, чтобы потенциал двойного слоя

$$\int_\sigma A(M)\, \partial v(P,M)/\partial \nu_M\, d\sigma_M$$

принадлежал классу E. Если k не является собственным значением, то это условие является также достаточным для существования решения из E (которое в этом случае должно быть единственным). Если k является собственным значением, то это условие и дополнительное условие о том, что $A(M)$ ортогонально к нормальной производной собственных функций задачи на σ, будут условиями необходимыми и достаточными. A. Douglis Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 11, 902.

1506. Возможности и границы применимости метода Винера-Хопфа. Хейнс (The scope and limitations of the method of Wiener and Hopf. Heins Albert E.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 447—466 (англ.)

Метод Винера-Хопфа применяется для решения краевой задачи:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - k^2\varphi = 0 \quad (0<k<1),$$
$$\varphi_y = \beta\varphi, \ y=0, \ x>0,$$
$$\varphi_y = 0, \ y=0, x<0,$$

а также некоторых задач дифракции, приводящих к скалярному уравнению типа Винера-Хопфа. Указывается, что более сложные задачи дифракции приводят к системам интегральных уравнений типа Винера-Хопфа и отмечается желательность изучения таких систем.

Примечание референта. Системы интегральных уравнений типа Винера-Хопфа, т. е. уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, рассматриваются в недавних работах И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна (РЖМат, 1957, 513; Успехи Матем. Наук, 1957, **12**, № 2, 43—118; реф. 1595).

Л. А. Чудов

1507. Об одной задаче для полигармонических операторов. Власова В. М., Уч. зап. Удмуртск. гос пед. ин-та, 1956, вып. 8, 91—105

Рассматривается задача о собственных значениях в некоторой открытой ограниченной области G для дифференциального уравнения

$$L(u) \equiv (-1)^k \Delta^k u + (-1)^{k-1} a_1 \Delta^{k-1} u + \ldots - a_{k-1}\Delta u - \lambda u = 0,$$

$$a_j = \text{const} > 0; \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Применением вариационного метода Куранта доказывается существование бесконечной последовательности собственных значений λ_n и собственных функций u_n оператора L (u_n обращается в нуль на границе G вмес-

те со своими частными производными порядка $\leqslant k-1$). Последовательность чисел λ_n возрастает, причем $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$. А. И. Каландия

1508. О поведении решений линейного гиперболического уравнения второго порядка в окрестности особой точки коэффициента. Блондель (Sur le comportement des solutions d'une équation linéaire hyperbolique du second ordre, au voisinage de la singularité d'un coefficient. Blondel Jean-Marie), C. r. Acad. sci,, 1958, **246**, № 1, 36—38 (франц.)

Рассматривается решение задачи Коши

$$(x-y)^n\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=A(x,y)\,z,\ z(x,\ x-h)=f(x),$$

$$z'_x(x,x-h)=g(x)$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых $x-y=0$, $x-y=h$, $x=x_1$, $y=x_2-h$, где $x_1<x_2$, $h>0$. При этом функция $A(x,y)$ предполагается непрерывно дифференцируемой в Ω и удовлетворяющей неравенству $0<\alpha<A<\beta$, где α,β — постоянные. Функция f имеет непрерывные производные второго, а g — первого порядка в $[x_1,x_2]$. Рассматривается вопрос о поведении решения и его производных вблизи прямой $x=y$. Если $0<n<1$, то z, z'_x и z'_y непрерывны в $\overline{\Omega}$. При $1\leqslant n<2$ z непрерывна в Ω, а z'_x и z'_y могут стремиться к бесконечности при $x-y\to+0$. Если $f(x)>0$, $g(x)<0$ в $[x_1,x_2]$ и h достаточно мало, то при $x-y\to+0$ z'_x и $z'_y=O((x-y)^{1-n})$, причем для достаточно малых $x-y$ имеют место $z'_x>0$, $z'_y<0$. В случае $n>2$ дается оценка $\int_{PQ}|z(x,y)|\,dx\leqslant c\,|PQ|^{1/4}t^{n/4}$, где PQ — отрезок прямой $x-y=t$, где $0<t<h$, лежащий в Ω. Далее рассматривается характеристическая задача Коши $x^n\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=A(x,y)\,z$, $z(x,0)=f(x)$ $z(h,y)=g(y)$ в области $0<x\leqslant h$, $0\leqslant y\leqslant Y$. Формулируются аналогичные результаты относительно поведения решения и его производных при $x\to+0$. С помощью замены переменной к этому случаю сводится вопрос о поведении решения задачи

$$\partial^2 z/\partial x\,dy=A(x,y)\,z,\ z(x,0)=\varphi(x),\ z(0,y)=\psi(y),$$

рассматриваемой в области $0\leqslant y\leqslant Y$, $x\geqslant 0$, при $x\to+\infty$. При некоторых предположениях имеет место

$$\int_0^y|z(x,\lambda)|\,d\lambda=O(y^{1/2}x^{-1/4}).$$

Доказательства не приведены. Д. М. Эйдус

1509. Теоретико-операторное интегрирование волнового уравнения С коэффициентами, зависящими от времени. Йосида (An operator-theoretical integration of the temporally inhomogeneous wave equation. Yosida Kôsaku), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec I, 1957, **7**, № 4, 463—466 (англ.)

Рассматривается задача Коши для волнового уравнения в связной области G m-мерного евклидова пространства E^m

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=A_t\,u(t,x);\quad u(0,x)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x),$$

$$A_t=a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(t,x)$$

$$(x=x_1,\ldots,x_m),$$

где a_{ij},b_i и c непрерывны при $x\in G$, $t\in(t_1,t_2)$, $-\infty\leqslant t_1<0<t_2\leqslant\infty$. Форма $a_{ij}(x,t)\,\xi_i\,\xi_j>0$ при

$$\sum_{i=1}^m\xi^2{}_i>0.$$

Задача записывается в матричной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u(x,t)\\ v(x,t)\end{pmatrix}=\mathfrak{A}_t\begin{pmatrix}u(x,t)\\ v(x,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ A_t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(x,t)\\ v(x,t)\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}u(0,x)\\ v(0,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x)\\ g(x)\end{pmatrix}\qquad(1)$$

Способ интеграции аналогичен данному автором для однородного уравнения диффузии (РЖМат., 1957, 7072, 7073). Рассматривается приближенное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u^n(x,t)\\ v^n(x,t)\end{pmatrix}=\mathfrak{A}_t\left(\mathfrak{I}-n^{-1}\mathfrak{A}_t\right)^{-1}\begin{pmatrix}u^n(x,t)\\ v^n(x,t)\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}u^n(x,0)\\ v^n(x,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x)\\ g(x)\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{I}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},$$

которое легко интегрируется, так как $\mathfrak{A}_t^{(n)}=\mathfrak{A}_t(\mathfrak{I}-n^{-1}\mathfrak{A}_t)^{-1}$ — ограниченный линейный оператор в соответствующем банаховом пространстве. При $n\to\infty$ приближенные решения сходятся к „настоящему“ (классическому) решению уравнения (1), если функции $f(x)$ и $g(x)$ достаточно гладкие. При доказательстве используются методы теории полугрупп и лемма Соболева (теорема вложения). А. Л. Крылов

1510. Об обобщении формулы Грина и его применении к задаче Коши для гиперболических уравнений. Арф (On a generalization of Green's formula and its application to the Cauchy problem for a hyperbolic equation. Arf C.), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 69—78 (англ.)

Автор обобщает формулу Грина для линейного оператора в частных производных второго порядка. Для этого он использует вместо функции R дифференциальный оператор $\mathfrak{R}$, который позволяет получить интегральную формулу

$$\int_D\Omega(\mathfrak{R}F\varphi-\varphi F^*R)=\int_B\sum_{i=1}^n\Omega_i(\mathfrak{R}_iF+L_i)\varphi,\qquad(1)$$

Автор ищет соотношения, которым должны удовлетворять операторы $\mathfrak{R}$, L_i и функция g для того, чтобы подынтегральное выражение в правой части формулы (1) обращалось в нуль на части границы B области D изображаемой уравнением $g=0$.

Применение к задаче Коши для волнового уравнения с четным числом переменных: в случае, когда $g=0$ является уравнением характеристического конуса, автор определяет операторы $\mathfrak{R}_i$ при помощи некотором системы дифференциальных уравнений. При некоторой простом выборе операторов L_i автор выводит из формулы (1) выражение, не содержащее особые интегралы и являющееся решением задачи Коши для уравнения $F\varphi=\Phi$, когда F есть оператор волнового уравнения. Y. Fourès-Bruhat.

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 364

1511. Абелевы интегралы и элементарные решения гиперболических уравнений. Лере (Intégrales abéliennes et solutions élémentaires des équations hyperboliques. Leray Jean), 2me colloq. équations aux dérivées partielles, CBRM. Bruxelles, 1954, Paris, 1955, 37—43 (франц.)

Доклад посвящен применению абелевых интегралов в теории элементарных решений гиперболических уравнений. Результаты, изложенные в докладе, получены в основном акад. И. Г. Петровским и автором. Они более подробно рассмотрены в книге автора (Hyperbolic Differential Equations (Princeton, 1954).

В докладе приводятся выражения элементарных решений гиперболических уравнений через абелевы интегралы.

Пусть ζ и x—векторы с комплексными компонентами, $a(\zeta)$ — однородный полином, $e(\zeta)$—линейная функция, такая, что $e(0) = -1$; Ω_a—алгебраическая поверхность $a(\zeta) = e(\zeta) = 0$; $\Omega_{a,x}$—алгебраическая поверхность $a(\zeta) = e(\zeta) = x\zeta = 0$.

Лере вводит внешнюю дифференциальную форму $\omega_a(\zeta, d\zeta)$, такую, что

$$da \wedge de \wedge \omega_a = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \ldots \wedge d\zeta_l.$$

Пусть уравнение $a(\partial/\partial x) = 0$ имеет гиперболический тип. Если степень (m) однородного полинома a не меньше числа измерений пространства (l), то элементарное решение уравнения $a(\partial/\partial x)$ представляется абелевым интегралом:

$$h = \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} \int_{\Gamma_a} \frac{(x \cdot \zeta)^{m-l}}{(m-l)!} \omega_a(\zeta, d\zeta).$$

Здесь Γ_a—цикл (в смысле алгебраической топологии) на Ω_a по модулю $\Omega_{a,x}$.

В случае $m<l$ эта формула заменяется на

$$h = \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{\Gamma_a} \frac{1}{b(\zeta)} \frac{(x \cdot \zeta)^{m-l+k}}{(m-l+k)!} d\omega(\zeta, d\zeta),$$

где $b(\zeta)$—любой полином степени k, отличный от нуля на Γ_a. Предполагается, что $m-l+k \geqslant 0$. Можно доказать, что h не зависит от выбора полинома b.

Подробные доказательства в докладе не приводятся.

В. М. Бабич

1512. Решение задачи Коши для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка. Фурес (Résolutions du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques du second ordre non linéaires. Fourès Y.), Colloq. Centre belge rech. math. **1**, 1953, Paris, 1954, 25—33 (франц.)

Большая часть работы посвящена построению элементарного решения волнового уравнения

$$Lu = \partial^2 u/(dx^n)^2 - \Delta u = f.$$

Элементарное решение ищется в виде

$$\sigma = \sum_{p=0}^{k} \frac{\partial^p}{(\partial x^n)^p} \sigma_p, \qquad (*)$$

где σ_p — обобщенные функции, несущее множество которых совпадает с „нижней" полостью характеристического конуса. Подставляя (*) в уравнение $Lu = \delta$, приравнивая порознь нулю члены левой части, содержащие одинаковое число дифференцирований по x_n, и приравнивая δ член, не содержащий дифференцирования по x_n, получим для определения σ_p рекуррентную систему дифференциальных уравнений, из которой σ_p последовательно определяются.

Тот же метод применяется для интегрирования линейного гиперболического уравнения 2-го порядка $Lu = f$ с переменными коэффициентами. В этом случае удается построить не элементарное решение, а „параметрикс" σ, т. е. такую обобщенную функцию σ, которая удовлетворяет уравнению

$$L\sigma = \delta + h\delta(\gamma),$$

где h функция, суммируемая на коноиде, $\gamma = 0$ уравнение коноида.

Вопрос о решении задачи Коши для нелинейных уравнений в статье только намечен. Говорится, что задачу Коши для квазилинейного гиперболического дифференциального уравнения с четным числом независимых переменных можно свести к интегрированию нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра.

Примечания референта 1. Метод решения задачи Коши, предложенный Фурес, представляет собой не что иное, как переложение метода С. Л. Соболева на язык обобщенных функций, так что отличие метода С. Л. Соболева от метода Фурес скорее формальное, чем по существу.

2. Задача Коши для линейных гиперболических уравнений второго порядка с помощью метода, обобщающего метод С. Л. Соболева, была исследована акад. С. А. Христиановичем (Матем. сб. 1939, 2(44)—путем сведения ее к интегральному уравнению типа Вольтерра.

В. М. Бабич

1513. О волновом уравнении. Моисил (Asupra ecuatiei undelor. Moisil Gr. C.) Comun. Acad. RPR, 1955, 5, № 10, 1421—1432 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор рассматривает задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

при начальных условиях, заданных α) на параллели цилиндра, β) на образующей цилиндра, γ) на параллели тора.

Резюме автора

1514. Краевая задача для литейного дифференциального уравнения параболического типа с n переменными. Гальярдо (Problema al contorno per equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in n variabili. Gagliardo Emilio), Ricerche mat., 1956, **5**, № 2, 169—205 (итал.)

Теоремы существования и единственности краевой задачи для линейного и квазилинейного параболического уравнения с n переменными. Гальярдо (Teoremi di esistenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in n variabili. Gagliardo Emilio), Ricerche mat., 1956, **5**, № 2, 239—257 (итал.)

Первая статья посвящена изучению первой краевой задачи для линейного параболического уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(y, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{i=1}^{m} a_i(y, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(y, x) u = f(y, x) \qquad (1)$$

в цилиндре $D\{y_0 \leqslant y < y,\ x \in E\}$, где E — ограниченная область пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Предполагается, что функции $a_{ij}(y, x)$ непрерывны, $a_i(y, x)$, $a(y, x)$ измеримы и ограничены в D, $f(y, x)$ квадратично суммируема в D, а граница области E FE может быть разбита на конечное число кусков, каждый из которых допускает гладкую параметризацию. Вначале устанавливаются априорные интегральные оценки для гладких решений уравнения (1), при этом систематически используется лемма Каччиопполи (см., например, Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа Изд-во ин. лит., 1957, стр. 179). Далее рассматривается класс функций $K^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, $u(y, x)$, определенных в D

абсолютно непрерывных по отношению к каждой переменной в отдельности, имеющих абсолютно непрерывные по каждому из $x_1, x_2, \ldots, x_m$ производные

$\frac{du}{dx_i}$ $(i = 1, 2 \ldots, m)$ и производные $\frac{du}{dx_i}, \frac{du}{dy}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_j}$,

суммируемые в D со степенью $1+\alpha$, и устанавливается следующая теорема: Если $\{u_n(y, x)\}$—последовательность функций класса $K^{1+\alpha}$, удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_D \left[|u_n|^{1+\alpha} + \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{du_n}{dx_i} \right|^{1+\alpha} + \left| \frac{du_n}{dy} \right|^{1+\alpha} + \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right|^{1+\alpha} \right] dy dx < A, \qquad (2)$$

то можно выделить из $\{u_n\}$ подпоследовательность $\{n_{n_k}\}$, μ_m-квазиравномерно сходящуюся в D с μ_m^y-квазиравномерно сходящимися производными $\frac{du_{n_k}}{dx_i}$.

Предельная функция принадлежит $K^{1+\alpha}$ и удовлетворяет неравенству (2) (Последовательность сходится в D μ_m-квазиравномерно (μ_m^y-квазиравномерно), если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое множество I_ε, проекции которого на координатные гиперплоскости (на координатные гиперплоскости, параллельные оси y) имеют меру меньшую ε, что рассматриваемая последовательность сходится в $D - I_\varepsilon$ равномерно).

Используя все вышесказанное и применяя метод плоскостей (метод Роте), автор устанавливает существование функции $u(y, x) \in K^2$, удовлетворяющей почти всюду в D уравнению (1) и принимающей в среднем граничные значения.

Вторая статья продолжает первую. Во-первых, устанавливается, что полученное решение первой краевой задачи для уравнений (1) единственно в классе K^2. Затем рассматривается краевая задача для квазилинейного параболического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(y, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_j} - \frac{du}{dy} = \sum_{i=1}^{m} a_i(y, x, u, p_1, \ldots, p_m) \times$$

$$\times \frac{du}{dx_i} + a(y, x, p_1, \ldots, p_m)\, u + f(y, x, u, p_1, \ldots, p_m);$$

$$p_s = \frac{du}{dx_s} \qquad (3)$$

в предположениях, что функции a_i, a, f определены при $(y, x) \in D$ и любых $u, p_1, p_2, \ldots, p_m$, измеримы по отношению к y, x и непрерывны по $u, p_1, p_2, \ldots, p_n$; a_i a — ограничены, а f удовлетворяет условию $|f(y, x, u, p_1, \ldots, p_m)| \leqslant g(y, x)$, где $g(y, x)$ — квадратично суммируемая в D функция. Устанавливается существование решения первой краевой задачи для уравнения (3) (решение с теми же свойствами, что и для линейного уравнения (1)). Для этого в функции a_i, a, f вместо u вставляется произвольная функция v из специальным образом подстроенного полного банахова пространства. Решая полученное таким образом линейное уравнение, приходят к соответствию $u = Av$; устанавливается полная непрерывность оператора A, из которой существование решения следует с помощью принципа неподвижной точки. В заключение приводится теорема единственности первой краевой задачи для уравнения (3) при некоторых дополнительных предположениях о гладкости функций a_i, a, f. А. Д. Эйдельман

1515. Фундаментальная краевая задача для одного класса линейных параболических уравнений. Пини (Sul problema fondamentale di valori al contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari. Pini Bruno), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 261—297 (итал.)

Рассматривается уравнение четвертого порядка

$$L(u) = \sum_{i=0}^{4} a_i(x, y) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} + \frac{du}{dy} = f(x, y)$$

в области D: $0 \leqslant y \leqslant 1$, $\chi_1(y) \leqslant x \leqslant \chi_2(y)$, где $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ — непрерывные функции, $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Изучается задача о нахождении функции $u(x, y)$, непрерывной в D, удовлетворяющей уравнению $L(u) = f$ в $D - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2$, начальному условию $u = \varphi_0$ на C_0 и краевым условиям $u = \varphi_{1i}$ $\partial u/\partial x = \varphi_{2i}$ на γ_i, $i = 1,2$. При этом C_0 — отрезок $\chi_1(0) \leqslant x \leqslant \chi_2(0)$, $y = 0$, а γ_i — кривая $x = \chi_i(y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $i = 1,2$. Начальные и краевые данные предполагаются непрерывными, причем $\varphi_{i1}(0) = \varphi_0(\chi_i(0))$, $i = 1,2$. Предполагается также непрерывность коэффициентов и свободного члена в уравнении $L(u) = f$ и, кроме того, выполнение неравенства $a_0(x, y) > 0$ в области D. Доказывается следующая теорема единственности:

Если коэффициенты a_i непрерывны в области D вместе с производными порядка i по x, то существует не более одного решения поставленной выше задачи, непрерывного в D, вместе с производными первых трех порядков по x.

Пусть $U(x, y, \xi, \eta)$ — фундаментальное решение уравнения $L_0(u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{du}{dy} = 0$:

$$U(x, y, \xi, \eta) = \begin{cases} \int_0^\infty \exp(-\lambda^4(y-\eta)) \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda & \text{при } y > \eta, \\ 0 & \text{при } y < \eta. \end{cases}$$

Автор доказывает следующую формулу скачка:

$$\lim_{(x,y)\to(\chi(z),z)} \int_0^y \frac{\partial^3 U(x, y, \chi(\eta), \eta)}{\partial x\, \partial \xi^2} \omega(\eta)\, d\eta =$$

$$= \pm \frac{\pi}{2} \omega(x) + \int_0^x \frac{\partial^3 U(\chi(z), z; \chi(\eta), \eta)}{\partial x\, \partial \xi^2} \omega(\eta)\, d\eta,$$

где $\omega(y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$,— непрерывная функция, $x = \chi(y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$,— функция, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $> \frac{1}{2}$; знак $+$ $(-)$ соответствует случаю $x > \chi(y)$ $(x < \chi(y))$.

Вводятся еще в рассмотрение ядра

$$V(x, y; \xi, \eta) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(y-\eta)^{1/4}} \int_0^\infty [\exp(-\lambda t) - \sin\lambda t] \exp(-\lambda^4) d\lambda & \text{при } y > \eta, \\ 0 & \text{при } y < \eta. \end{cases}$$

$$W(x, y; \xi, \eta) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(y-\eta)^{1/4}} \int_0^\infty [\exp(\lambda t) + \sin\lambda t] \exp(-\lambda^4) d\lambda & \text{при } y > \eta, \\ 0 & \text{при } y < \eta. \end{cases}$$

и доказываются соответствующие формулы для скачков потенциалов

$$\int \frac{\partial^3 V}{\partial x\,\partial \xi^2}\,\omega d\eta, \qquad \int \frac{\partial^3 W}{\partial x\,\partial \xi^2}\,\omega d\eta.$$

С помощью этих формул доказывается, что краевая задача для уравнения $L_0(u)=0$, соответствующая нулевому начальному условию, имеет одно единственное решение вида

$$u(x,\ y)=\sum_{i=1}^{2}\int_0^y \frac{\partial^2 U(x,\ y;\ \chi_i(\tau_i),\ \tau_i)}{\partial \xi^2}\,\alpha_i(\tau_i)\,d\tau_i + \int_0^y \frac{\partial^2 V(x,\ y;\ \chi_1(\tau_i),\ \eta)}{\partial \xi^2}\,\beta(\tau_i)\,d\eta + \int_0^y \frac{\partial^2 W(x,\ y;\ \chi_2(\tau_i),\ \tau_i)}{\partial \xi^2}\,\gamma(\eta)\,d\eta.$$

При этом вектор $a(z)$ с компонентами $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ определяется из интегрального уравнения вида $a(z)+\int_0^z K(z,\ \tau_i)\,a(\tau_i)\,d\eta = b(z)$, причем элементы ядра-матрицы $K(z,\ \tau_i)$ являются не более чем $O((z-\eta)^{-1/4})$. Функции φ_{1i}, φ_{2i}, χ_i, $i=1,2$, предполагаются здесь непрерывно дифференцируемыми.

Краевая задача для уравнения $L(u)=f$ также сводится к интегральным уравнениям в следующих предположениях: функции χ_i дважды непрерывно дифференцируемы; функции f удовлетворяют условию Гёльдера; функции φ_{i1}, φ_{i2} и φ_0 являются граничными значениями некоторой функции $\varphi(x,\ y)$, непрерывной в D вместе с производными, содержащимися в L и такой, что $L(\varphi(x,\ y))$ удовлетворяет условию Гёльдера.

В. Э. Лянце

1516. Граничная задача для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. **Итô** (A boundary value problem of partial differential equations of parabolic type. Itô Seizô), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 299—312 (англ.)

В работе автора (РЖМат, 1956, 2243) было показано существование и единственность решения однородного параболического уравнения второго порядка в компактной области, принимающего однородные граничные значения смешанного типа Дирихле-Неймана. В настоящей работе результат переносится на неоднородное уравнение и неоднородные граничные условия. Строится фундаментальное решение, а решение параболического уравнения выписывается в явном виде через фундаментальное решение, начальные и граничные значения.

Вводятся обозначения: $[s_0,\ t_0]$ — ограниченный замкнутый интервал, M — m-мерное ориентируемое многообразие класса C^∞, D — область в M с компактным замыканием $\bar{D}$, граница которой $B=\bar{D}-D$ состоит из конечного числа $m-1$-мерных гиперповерхностей класса C^3.

Рассмотрим параболический оператор в $[s_0\ t_0]\times\bar{D}$:

$$L=L_{t,\,x}=A_{t,\,x}-\frac{\partial}{\partial t}, \tag{L}$$

где

$$A=A_{t,\,x}=a^{ij}(t,\ x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}+b^i(t,\ x)\frac{\partial}{\partial x^i}+c(t,\ x), \tag{A}$$

и $\|a^{ij}\|$ — положительно определенная матрица для всех $(t,\ x)$; $a^{ij}(t,\ x)$ и $b^i(t,\ x)$ при переходе от координат (x^i) к координатам $(\bar{x}^i)$ изменяются по формулам

$$\begin{cases}\bar{a}^{ij}(t,\ \bar{x})=\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}\,a^{kl}(t,\ x),\\ \bar{b}^i(t,\ \bar{x})=\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\,b^k(t,\ x)+\dfrac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k\,\partial x^l}\,a^{kl}(t,\ k).\end{cases}$$

Предполагается также, что $\partial a^{ij}(x,t)/\partial t$, $\partial^2 a^{ij}(t,x)/\partial x^k\partial x^l$, $\partial b^i(t,\ x)/\partial x^k$ и $c(t,\ x)$ непрерывны по Гёльдеру в замкнутой области $[s_0\ t_0]\times\bar{D}$ и что $\partial a^{ij}(t,\ \xi)/\partial x^k$ и $b^i(t,\ \xi)$, рассматриваемые как функции $\xi\in B$, принадлежат классу C^2 при $\xi\in B$.

Рассматриваются граничные условия

$$(B_\varphi^t):\alpha(t,\ \xi)f(t,\ \xi)+\beta(t,\ \xi)\,[\partial f(t,\ \xi)/\partial n_{t,\xi}]=\varphi(t,\ \xi)\ (\xi\in B),$$

где $\alpha(t,\ \xi)$ и $\beta(t,\ \xi)\geqslant 0$, $\alpha(t,\ \xi)+\beta(t,\ \xi)\equiv 1$ и непрерывны с производными по Гёльдеру до второго порядка; через $\dfrac{\partial f(t,\ \xi)}{\partial n_{t,\xi}}$ обозначается нормальная производная относительно метрического тензора $a^{ij}(t,\ x)$. Если уравнение B в окрестности $U(\xi)$ точки ξ есть $\psi(x)=0$ и $\psi(x)>0$ в $U(\xi)\cap D$, тогда

$$\frac{\partial f(t,\ \xi)}{\partial n_{t,\xi}}=-a^{ij}(t,\ \xi)\frac{\partial f(t,\ \xi)}{\partial x^i}\frac{\partial \psi(\xi)}{\partial x^i}\Big/\bar{\psi}(t,\ \xi),$$

где $\bar{\psi}(t,\ \xi)=a^{ij}(t,\ \xi)\left\{\dfrac{\partial \psi(\xi)}{\partial x^i}\dfrac{\partial \psi(\xi)}{\partial x^j}\right\}^{1/2}$.

Пусть $\|a_{ij}(tx)\|$ — присоединенный ковариантный тензор к $\|a^{ij}(t,x)\|$ и пусть $a(t,\ x)=\det\|a_{ij}(t,\ x)\|$; $d_t x=\sqrt{a(t,\ x)}\,dx^1\ldots dx^m$; $d_t\xi=\sqrt{a(t,\ x)}\,d\xi^1\ldots d\xi^{m-1}$.

Определим, наконец, функцию

$$\psi(t,\ \xi)=\left\{\frac{1}{\sqrt{a(t,\ \xi)}}\frac{\partial}{\partial \xi^j}\sqrt{a(t,\ \xi)}\,a^{ij}(t,\ \xi)-b^i(t,\ \xi)\right\}\frac{\partial \psi(\xi)}{\partial x^i}\Big/\bar{\psi}(t,\ \xi)$$

для $(t,\ \xi)\in[S_0,\ t_0]\times B$.

Построим функцию $u(t,\ x;\ s,\ y)$, определенную в области: $s_0<s<t<t_0$, $x,\ y\in\bar{D}$ класса C^1 по t и s и класса C^2 по x и y, удовлетворяющую следующим условиям:

$$L_{t,\,x}\,u(t,\ x;\ s,\ y)=0, \tag{1}$$

$$\alpha(t,\ \xi)\,u(t,\ \xi;\ s,\ y)+\beta(t,\ \xi)\frac{\partial u(t,\ \xi;\ s,\ y)}{\partial n_{t,\,\xi}}=0, \tag{2}$$

$$\lim_{t\downarrow s}\int_D u(t,\ x;\ s,\ y)\,f(y)\,d_s y=f(x) \tag{3}$$

в D для любой непрерывной $f(x)$ в $\bar{D}$ и сходимость равномерна в $\bar{D}$, если $f(x)$ удовлетворяет граничному условию (B_0^s)

$$\begin{cases}\lim\limits_{\tau\downarrow s}\int\limits_D f(\tau,\ z)\,u(\tau,\ z;\ s,\ y)\,d_\tau z=f(s,\ y)\ \text{в}\ D,\\ \lim\limits_{\tau\uparrow t}\int\limits_D f(\tau,\ z)\,u(t,\ x;\ \tau,\ z)\,d_\tau z=f(t,\ x)\ \text{в}\ D\end{cases} \tag{4}$$

для любой непрерывной $f(\tau, z)$ в $[s, \bar{t}] \times \bar{D}$, где $[s, t]$ — произвольный замкнутый интервал из $[s_0, t_0]$.

$$u(t, x; s, y) \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\int_D u(t, x; s, y)\, d_s y \leqslant e^{c(t-s)}, \tag{6}$$

где $c = \max\{c(t, x);\ s_0 \leqslant t \leqslant t_0;\ x \in \bar{D}\}$ и

$$\int_D u(t, x; \tau, z)\, u(\tau, z; s, y)\, d_\tau z = u(t, x; s, y). \tag{7}$$

Такую функцию будем называть фундаментальным решением уравнения $L_{t,x} f = 0$ с граничным условием (B_0^t).

Основной результат настоящей работы:

Теорема. 1) Существует одна и только одна функция $u(t, x; s, y)$ $(s_0 < s < t < t_0,\ x, y \in \bar{D})$, удовлетворяющая условиям (1) — (7). 2) Для любой $s \in (s_0, t_0)$ и любых непрерывных функций $f(x)$ в $\bar{D}$, $h(t, x)$ в $[s, t_0] \times \bar{D}$ и $\varphi(t, \xi)$ класса C^1 по $t \in [s, t_0]$ и класса C^2 по $\xi \in B$ функция

$$f(t, x) = \int_D u(t, x; s, y) f(y)\, dy + \int_s^t d\tau \int_D u(t, x; \tau, y) h(\tau y) d_\tau y + \tag{8}$$
$$+ \int_s^t d\tau \int_B \left\{ u(t, x; \tau, \xi)\,[1 + \Psi(\tau, \xi)] - \frac{\partial u(t, x; \tau, \xi)}{\partial n_{\tau\xi}} \right\} \varphi(\tau, \xi) d'_\tau \xi$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L_{t,x} f(t, x) + h(t, x) = 0 \text{ на } [s, t_0] \times D \tag{9}$$

и начальному условию

$$\lim_{t \downarrow s} f(t, x) = f(x) \tag{10}$$

ограничено в D и граничному условию (B_φ^t); если $f(x)$ удовлетворяет граничному условию (B_φ^s), то сходимость в (10) равномерна в $\bar{D}$. Обратно, если $f(t, x)$ определена в $(s, t_0) \times \bar{D}$ $(s_0 < s < t_0)$ и удовлетворяет (9), (10) и (B_φ^t), тогда она представима в виде (8). А. Л. Крылов

1517. О нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных параболического типа. II. Мураками (On non-linear partial differential equations of parabolic types. II. Murakami Haruo), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 10, 616—621 (англ.)

Вторая часть работы (РЖМат, 1958, 8863). Сначала рассматривается смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых $y = a$ и $y = b$ и двумя кривыми $x = \lambda_1(y)$ и $x = \lambda_2(y)$, где $a < y < b$, $\lambda_1(y) < \lambda_2(y)$. При этом задаются значения функции $u(x, y)$ на C, где C — совокупность всех точек, принадлежащих кривым и отрезку прямой $y = a$. Для этой задачи доказывается теорема единственности, а также теорема существования для случая $u|_C = 0$. Эти теоремы являются обобщениями результатов Пини (РЖМат, 1958, 9879). Далее доказываются теоремы о последовательностях решений рассматриваемого уравнения, аналогичные теоремам Харнака о гармонических функциях. Затем для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u)$$

вводятся понятия суб- и суперфункций, а также нижних и верхних функций, аналогичные понятиям суб- и супергармонических функций и нижних и верхних функций Перрона. Доказывается ряд свойств этих функций. Д. М. Эйдус

1518. О нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных параболического типа. III. Мураками (On non-linear partial differential equations of parabolic types. III. Murakami Haruo), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 10, 622—627 (англ.)

Окончание работы (РЖМат, 1958, 8863; реф. 1517). Рассматривается смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u)$$

в Ω при условии $u|_C = \beta$, где $\beta = \beta(x, y)$ — ограниченная функция, заданная на C. Строится теория барьера и вводится понятие регулярной точки границы для данной β (в отличие от теории Перрона данная точка границы может быть регулярной для одной β и иррегулярной для другой). При некоторых условиях, налагаемых на f (эти условия наверняка выполняются, если f непрерывна, ограничена и монотонно возрастает относительно u), доказывается, что если для данной β на C существует хотя бы одна регулярная точка, то в Ω существует такое решение u данного уравнения, что во всех регулярных точках, принадлежащих C, имеет место $\underline{\beta} \leqslant \underline{u} \leqslant \bar{u} \leqslant \bar{\beta}$, где через $\underline{\beta}$, $\bar{\beta}$, $\underline{u}$, $\bar{u}$ обозначены нижний и верхний пределы функций β и u при условии, что точка (x, y) стремится к данной точке C.

Далее доказано, что если C составлена из достаточно гладких кривых, то все точки на C регулярны для любой β. Кроме того, доказано, что если все точки на C являются регулярными для уравнения теплопроводности, то все они являются регулярными для рассматриваемого уравнения. (Теория барьера для уравнения теплопроводности была построена Пини, — РЖМат, 1956, 444). В конце работы указано, что полученные результаты переносятся на многомерный случай. Д. М. Эйдус

1519. Теплопроводность в бесконечном брусе. I. Ципсер (Hővezetés végteleen rúdban. I. Czipszer János), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl 1954 (1955), **3**, № 3-4, 395—408 (венг.; рез. русск., франц.)

Пусть S — полоса $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$.

Автор показывает, что для решения $u_{xx} = u_t$, непрерывного в S

$$\sup_{0<t<h} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| \exp\left[-\frac{x^2}{4(h-t)}\right] dx < \infty$$

для каждого h, $0 < h < c$ тогда и только тогда, когда

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] d\alpha(y),$$

где $\alpha(y)$ — функция ограниченной вариации в каждом конечном интервале и интеграл абсолютно сходится в S.

Он также доказывает, что при этих обстоятельствах для каждого действительного a и b

$$2\lim_{t\to+0}\int_a^b u(x,t)\,dx=[\alpha(b+0)+\alpha(b-0)]-$$

$$-[\alpha(a+0)+\alpha(a-0)],$$

$$|u'(x,t)|\leqslant\frac{c(h)}{\sqrt{t}}\exp\left[\frac{x^2}{4(h-t)}\right]\text{ для }0<t<h<c.$$

Автор добавляет, что он не знает, характеризует ли указанное неравенство какой-нибудь класс решений рассматриваемого здесь уравнения теплопроводности.

A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 8, 858.

1520. Теорема существования для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. I, II. Продн (Teoremi di esistenza der equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico. I, II. Prodi Giovanni), Rend Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1953, **86**, № 1, 3—26; 27—47 (итал.)

Обозначим границу R $(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant\bar{t})$, исключая точки $t=\bar{t}$, $0<x<l$, через T и пусть $f(x,t)$ — определенная непрерывная функция, заданная на T. Краевая задача

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+F(x,t,u,u_x), & \text{точки } (x,t) \text{ внутри } R\\ u(x,t)=f(x,t) & \text{, } (x,t) \text{ на } T\end{cases}\qquad(1)$$

имеет решение, если существует функция $u=u(x,t)$ удовлетворяющая условию (1), непрерывная в R и имеющая производные u_x, непрерывные внутри R. Применяя метод Лере и Шаудера (Ann. scient. École norm. supér (3), 1934, **51**, 45—78), автор доказывает существование по крайней мере одного решения при достаточно очевидных условиях, наложенных ниже на функцию F. Пусть $\psi(x,t)=x^{-1}+(l-x)^{-1}+t^{-1/2}$ и говорим, что $h(x,t)$ принадлежит классу S, если $h(x,t)$ непрерывна внутри R и если отношение $h(x,t)/\psi(x,t)$ остается ограниченным. Через H_1, H_2, H_3 — обозначаются следующие условия, наложенные на функцию $F(x,t,u,u_x)$:

H_1. Функция непрерывна для $0<x<l, 0<t<\bar{t}, -\infty<u, u_x<\infty$ и в каждой точке интервала удовлетворяет условию Гёльдера.

H_2. Для каждого интервала $-v\leqslant u\leqslant v$ существует константа K_v такая, что $|F(x,t,u,u_x)|\leqslant K_v\{[\psi(x,y)]^2+|y|^\gamma\}$, где γ — положительная постоянная меньшая 2.

H_3. Существуют две функции $\bar{u}(x,t)$ и $\underline{u}(x,t)$, непрерывные в R, чьи производные по x принадлежат классу S и которые удовлетворяют условиям: $\bar{u}(x,t)>u(x,t)$, $\bar{u}_t>\bar{u}_{xx}+F(x,t,\bar{u},\bar{u}_x)$, $\underline{u}_t<\underline{u}_{xx}+F(x,t,\underline{u},\underline{u}_x)$.

Главный результат статьи состоит в том, что граничная задача (1) имеет решение, если функция $F(x,t,u,u_x)$ удовлетворяет условиям H_1, H_2, H_3 и если функция $f(x,y)$ удовлетворяет на T условию

$$\underline{u}(x,t)<f(x,t)<\bar{u}(x,t).$$

Условие H_3 можно заменить условием, что $\bar{t}$ достаточно мало. Примеры, данные в конце статьи, показывают, что ограничения, наложенные на F, необходимы.

F. G. Dressel

1521. Об особых точках решений линейных параболических уравнений. Пини (Sui punti singolari delle soluzioni delle equazioni paraboliche lineari. Pini Bruno), Ann. Univ. Ferrara, 1952(1953), Sez. VII, **2**, 1—12 (итал.)

Пусть $x=x_i(y)\ i=1,2$ — две функции с конечными производными на $a\leqslant y\leqslant b$ и такие, что $x_1(y)<x_2(y)$ для $a<y\leqslant b$. Символ D будет употребляться для обозначения области $a\leqslant y\leqslant b$, $x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)$. Символ S обозначает границу области D, из которой исключен линейный сегмент $x_1(b)<x<x_2(b)$.

Пусть $$U(x,y)=y^{-1/2}\exp(-x^2/4y),\ y<0$$

и пусть

$$\omega(x,y;\alpha,\mu)=\left[1+\sum_{k=1}^n U^\alpha(x-x_k,\ y-y_k)\right]\exp(\mu y),$$

где все точки (x_k, y_k) лежат на S. В дифференциальном уравнении $L(u)\equiv u_{xx}-u_y+c(x,y)u=0$ функция $c(x,y)$ предполагается непрерывной, а m, которое будет встречаться ниже, есть число, для которого $\max|c(x,y)|<m$.

Автор показывает, что решение $u=u(x,y)$ уравнения $L(u)=0$ в D обращается в нуль если в окрестности границы S области D отношение u/ω удовлетворяет некоторым условиям.

Точнее говоря, автор доказывает следующее утверждение:

1) если точка (x,y) лежит внутри D и если $\lim u(x,y)/\omega(x,y;l,m)=0$ для любой точки $(\bar{x},\bar{y})$, $(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})$ лежащей на S, то в D имеет место $u\equiv 0$.

2) Пусть $\gamma_i(y,t)=x_i(y)-(-1)^i t$, $\omega=\omega(x,y;\alpha,m)$, если $p>1$, $0<\alpha<(p-1)/p$ и если

$$\lim_{y\to\alpha+}\int_{\gamma_1(y,t)}^{\gamma_2(y,t)}\left|u/\omega\right|^p dx=\lim_{t\to0}\sum_{i=1}^{2}\int_{\alpha'}^{b'}\left|u/\omega\right|^p_{\gamma_1(y,t)}dy=0,$$

причем в этом равенстве предел в первом интеграле является равномерным для достаточно малых положительных t, а предел во втором интеграле справедлив для всех a' и b', $a<a'<b'<b$, то необходимо, чтобы в D имело место $u\equiv 0$. Результаты, аналогичные 1) и 2), получены для нескольких типов неограниченных областей на плоскости x, y, а также для решений уравнения

$$\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}-u_y+c(x_1,\ldots,x_n,y)u=0.$$

F. G. Dressel

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 532.

1522. Поведение решений уравнения теплопроводности в окрестности изолированной особой точки. Эйдельман С. Д., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 207—210

Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\qquad(1$$

с фундаментальным решением

$$U_0(t-\tau,\ x-\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\,e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} & \text{при } t>\tau\\ 0 & \text{при } t<\tau\end{cases}\qquad(2)$$

устанавливается, что при некоторых ограничениях любое решение его с точечной особенностью совпадает с некоторой линейной комбинацией производных $U_0(t-\tau, x-\xi)$ (с точностью до регулярного решения).

Определение (Лопатинский Я. Б.). Функция $\varphi(x)$, определенная в V, принадлежит функциональному множеству K_p, $K_{p-0} = \sum_{q<p} K_q$, если она непрерывна при $x=0$ и выражения

$$1)\ |\varphi(x)|\cdot|x|^p\ (p>0),\quad 2)\ \frac{|\varphi(x)|}{\ln|x|}\ (p=0),\quad 3)\ |\varphi(x)|\ (p<0)$$

ограничены.

Теорема 1. Если $u(x,t)$ является регулярным в $\overline{G}$ решением (1), за исключением начала координат, и удовлетворяет условиям

$$\int_{t_1}^{T} |t|^s |u(x,t)|\,dt \in K_{N+1-0-2s},$$
$$\int_{t_1}^{T} |t|^s \left|\frac{\partial u}{\partial R}\right| dt \in K_{N+2-0-2s}, \qquad (3)$$

где $s=0,1\ldots,r$, причем $r=N/2$ при N четном и $r=\left[\frac{N}{2}\right]+1$ при N нечетном, $R=(x_1,x_2,x_3)$, то $u(x,t)$ допускает в $\overline{G}$ представление

$$u(x_0,t_0)=\begin{cases}\sum_{m=0}^{N-1}\ \sum_{m_1+m_2+m_3=m} a_{m_1m_2m_3}\dfrac{\partial_m U_0(t_0x_0)}{\partial x_{10}^{m_1}\partial x_{10}^{m_2}\partial x_{30}^{m_3}}+\\ \qquad +u^*(x_0,t_0),\ t>0\\ u^*(x_0,t_0),\quad t\leqslant 0,\end{cases} \qquad (4)$$

где $u^*(x_0,t_0)$—регулярное в G решение (1).

Теорема 2 (следует из представления (4)). Если в окрестности начала координат $u(x,t)$ является регулярным решением (1) всюду, за исключением, может быть, точки 0, удовлетворяет условию (3) с $N=1$ и

$$|x|\int_0^T u\,dt \xrightarrow[|x|\to 0]{} 0,$$

то ее можно превратить в регулярное решение (1), выбрав соответственно ее значение в 0.

Доказательства носят элементарный характер. Результаты обобщаются на системы, параболические по И. Г. Петровскому. А. Л. Крылов

1523. Решение квазилинейного параболического дифференциального уравнения со свободным членом специального типа методом сеток. Каутский (Řešení quasilineární parabolické diferenciální rovnice s absolutním členem speciálního typu metodou sítí. Kautský Jaroslav), Aplikace mat., 1957, 2, № 5, 327—341 (чешск.; рез. русск., англ.)

Содержанием работы является доказательство существования и единственности классического решения первой краевой задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности со свободным членом специального типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x,t,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t,u,y(x,t)),$$

$$y(x,t)=\int_0^t (fx,\tau), u(x,\tau), y(x,\tau)\,d\tau$$

при определенных предположениях о гладкости коэффициентов и начальных и краевых условий. Свободный член, приведенный выше, выражает то обстоятельство что интенсивность источника тепла зависит, кроме места, времени и температуры, также от количества выделенного тепла. К такому виду уравнения теплопроводности приводит нас, например, анализ тепловых процессов в массивных бетонных блоках при экзотермии цемента. Доказательство проводится методом сеток. E. Vitásek

1524. Решение уравнения теплопроводности и диффузии. Аллан (The solution of a special heat and diffusion equation. Allan Douglas), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 5, 315—323 (англ.)

Решается задача нахождения распределения температуры и тепловых потоков, образующихся при радиоактивности в области сферы данного радиуса.

В заключение автор в качестве примера решает задачу диффузии газа аргона. В. С. Жгенти

1525. О некотором представлении решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. Кривенков Ю. П., Доклад. АН СССР, 1957, 116, № 3, 351—354

Пусть T — односвязная плоская область, примыкающая к интервалу L оси Ox, а $\overline{T}$ — область симметричная ей относительно этой оси. Область $TULU\overline{T}$ предполагается выпуклой. Доказывается, что любое непрерывное в TUL и обладающее непрерывными в T вторыми производными решение $w(x,y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{c}{y}=0,\quad c=\text{const} \qquad (1)$$

при $c\geqslant 1$ представляется в T в виде

$$\gamma\left(\frac{c}{2}\right)\int_0^1 \frac{\varphi[x+iy(1-2\sigma)]\,d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-c/2}},\qquad \gamma\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{\Gamma(c)}{1^2(c/2)}, \qquad (2)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в $TULU\overline{T}$ функция комплексного переменного $z=x+iy$, удовлетворяющая на L условию $w(x,0)=\varphi(x)$.

Если $0<c<1$ и решение $W(x,y)$ удовлетворяет дополнительно условию

$$\lim_{y\to 0} y^c \frac{\partial w}{\partial y}=0,$$

то w также представимо в виде (2).

Как следствие получается, что рассмотренные решения аналитичны по x и y в TUL и могут быть аналитически продолжены в T при помощи симметрии по y. В.-К. И. Карабегов

1526. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа. Смирнов М. М., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 80—96

В односвязной двумерной области D, ограниченной гладкой кривой σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, расположенной в верхней полуплоскости $y>0$ и отрезками AC и BC прямых $y=-x$ и $y=x-1$, рассматривается смешанного типа уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\operatorname{sgn} y\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0 \qquad (2)$$

Требуется определить функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u(x,y)$ является решением (1) в области D при $y\neq 0$; 2) функция $u(x,y)$ непрерывна вместе с первыми производными в замкнутой области D; 3) все частные производные от $u(x,y)$ первого и второго порядка непрерывны внутри D, причем вблизи точек A и B они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы и двух соответственно и 4) искомая функция и ее нормальная производная на линии σ и на характеристиках AC и BC принимают заданные значения.

Замкнутая кривая $\sigma+AB$, ограничивающая эллиптическую часть D_1 области D, предполагается в достаточной степени гладкой.

С помощью общего решения в гиперболической части D_2 уравнения (1), удовлетворяющего на характеристиках требуемым условиям, задача приводится к отысканию регулярной бигармонической функции в области D_1 при некоторых смешанного вида условиях на $\sigma+AB$. С точки зрения математической эта последняя задача весьма сходна с той, которая получается при

изучении равновесия тонкой упругой пластинки занимающей область D_1, когда на разных частях ее границы имеются разные условия закрепления.

Редуцированная задача решается методом теории функции комплексного переменного. Используется комплексное представление бигармонической функции (формула Гурса) и входящие туда искомые голоморфные функции заменяются специального вида комплексными потенциалами, какими пользовался Д. И. Шерман при решении плоских задач теории упругости (Докл. АН СССР, 1940, 27, № 9). После этого задача сводится к эквивалентной ей системе двух сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами относительно неизвестных плотностей потенциалов. Подробный анализ этих уравнений дает автору основание утверждать, что рассматриваемая им задача имеет решение, притом единственное, удовлетворяющее всем поставленным условиям. Система интегральных уравнений работы исследуется аналогично системам, которые получаются при решении двумерных смешанных задач теории упругости (Шерман Д. И., Докл. АН СССР, 1940, 28, № 1; Манджавидзе Г. Ф., Прикл. матем. и механ., 1951, 15, № 3; Каландия А. И., Прикл. матем. и механ., 1952, 16, № 5.) А. И. Каландия

1527. О замыкании относительно интеграла Дирихле. Хёрмандер, Лион (Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet. Hörmander L., Lions J. L.), Math. scand., 1956, 4, № 2, 259—270 (франц.)

Пусть $D(\Omega)$—пространство бесконечно дифференцируемых функций, финитных в области Ω, $D'(\Omega)$—сопряженное к $D(\Omega)$ пространство обобщенных функций в Ω; Ω—любая область в R^n. Исследуется разрешимость задачи Дирихле для $\Delta^m u=0$ в классе функций с конечной нормой $\| \ \|_m$:

$$\| u \|_m^2 = \sum \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \right)^2 dx.$$

Эта задача Дирихле может быть решенной в такой постановке лишь в таких областях Ω, для которых замыкание $\hat{D}^m(\Omega)$ многообразия $D(\Omega)$ в метрике $\| \ \|_m$ можно отождествить с некоторым подпространством $D'(\Omega)$, т. е. если $\hat{D}^m(\Omega) \subset D'(\Omega)$. В случае $m=1$, как показали Дени и Лион, для $n \geqslant 3$ всегда $\hat{D}^1(\Omega) \subset D'(\Omega)$, для $n=2$ $\hat{D}^1(\Omega) \subset D'(\Omega)$ тогда и только тогда, если дополнение $C\Omega$ не имеет емкости нуль. В настоящей статье доказано, что в случае $n=2m-2k-1$ необходимым и достаточным условием для $\hat{D}^m(\Omega) \subset D'(\Omega)$ является $C\Omega \neq \neq 0$. Вводится понятие p-полярных множеств, обобщающее понятие множеств емкости нуль для полигармонических операторов: замкнутое множество $E \subset R^n$ называется p-полярным ($p>0$), если любая обобщенная функция из $D^{-p}(R^n)$ с носителем в E совпадает с нулем; $D^{-p}(R^1)$ — пространство, сопряженное к $D^p(R^n)$. Для $n=2m$ необходимым и достаточным условием того, чтобы $\hat{D}^m(\Omega) \subset D'(\Omega)$, является условие: $C\Omega$ не является $n/2$-полярным; аналогичное условие приводится в случае $n=2m-2k$. В заключение формулируются теоремы вложения С. Л. Соболева для функциональных пространств $\hat{D}^m(\Omega)$, для которых $\hat{D}^m(\Omega) \subset D'(\Omega)$.

М. И. Вишик

1528. Об интеграле Дирихле. Мальгранж (Sur l'intégrale de Dirichlet. Malgrange B.), Math. scand., 1956, 4, № 2, 271—275 (франц.)

Работа тесно связана с работой Хермандера и Лионса (реф. 1527). Пусть P^k — пространство многочленов степени k. Для любой области $\Omega \subset R^n$ вводится подпространство $P \subset P^{m-1}$, обладающее следующим свойством: для любого $p \in P$ существует последовательность $\varphi_l \in D(\Omega)$, сходящаяся к нулю в метрике $D^m(\Omega)$ или в другой метрике $D_A^m(\Omega)$, связанной с эллиптическим оператором A порядка $2m$ с переменными коэффициентами, причем эта последовательность φ_l в метрике $L^m(\Omega)$ сходится к элементу p; норма в $L^m(\Omega)$ задается суммой норм пространств $D^k(\Omega)$, $k \leqslant m$. Доказано в случае A с постоянными коэффициентами, что при $n>2m$ $P=0$; для $n \leqslant 2m$ P совпадает со всем пространством P^k многочленов степени k, где $k=m-[(n+1)/2]$. Далее, считая P заданным, автор изучает вопрос о том, для каких компактов $K \subset \Omega$ имеет место соотношение $D_A^m(\Omega-K) \subset L^m(\Omega-K)$. В этом случае автор говорит, что „A имеет ядро Грина в $\Omega-K$".

М. И. Вишик

1529. Алгорифм Шварца для полигармонических функций. Прагер (Schwarzův algoritmus pro polyharmonické funkce. Prágr Milan), Aplikace mat., 1958, 2, № 3, 106—114 (чешск.; рез. русск., нем.)

Рассматривается алгорифм Шварца как для объединения, так и для пересечения двух областей применительно к задаче об интегрировании уравнения $\Delta^p u=0$ при заданных на границе значениях самой функции и ее производных порядка $\leqslant p-1$. Доказывается, что построенные по алгорифму Шварца последовательные приближения сходятся к искомому решению в норме $W_2^{(p)}$. Отсюда вытекает равномерная в любой внутренней подобласти сходимость как самих функций, так и их производных любого порядка. С. Г. Михлин

1530. Теорема единственности для задачи, обобщающей основные бигармонические задачи внутреннюю и внешнюю. Пини (Teoremi di unicità per problemi generalizzanti i problemi biarmonici fondamentali interno ed esterno. Pini Bruno), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 4, 465—473 (итал.)

Пусть D — плоская область, ограниченная конечным числом жордановых дуг с непрерывной кривизной $C_j: x=x(s_j)$, где s_j означает длину дуги на C_j $0 \leqslant s_i \leqslant l_i$, $i=1, 2, \dots, n$. Предположим, что на каждой C_i определены три произвольные функции класса L_2: $f_i(s_i)$, $g_i(s_i)$ и $h_i(s_i)$.

Теорема. Если D ограничена, то существует единственная функция $u(x)$, бигармоническая в D и такая, что

$$\lim_{t \to +0} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} \left\{ \left[u(x(t; s_i)) - f_i(s_i) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x(t; s_i)) - g_i(s_i) \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial y} x(t; s_i) - h_i(s_i) \right]^2 \right\} ds_i = 0.$$

При этом $x(t; s_i) = x(s_i) + tn(s_i)$, где n обозначает единичный вектор внутренней нормали. A. Huber

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 10, 1093.

1531. О задаче Коши для систем линейных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами. Мирер В. С., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 5, 873—875

Рассматривается сходимость простейшей разностной схемы (с постоянными шагами $t_{l+1}-t_l=h$; $x_{j+1}-x_j=\varepsilon$), аппроксимирующей систему уравнений

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta=1}^{N} F_{\alpha\beta}(t, x) \frac{\partial U_\beta}{\partial x} + B_\alpha(t, x) (\alpha = 1, \dots, N),$$

где функции $F_{\alpha,\beta}$; B_α аналитичны в некоторой замкнутой области G плоскости (t, x). Начальные условия $\varphi_\alpha(x)$ заданы на отрезке $G_0 \subset G$ прямой $t=t_0$, где $\varphi_\alpha(x)$ аналитичны на этом отрезке.

Из полученных результатов вытекают теоремы о применении метода последовательных приближений для решения поставленной задачи и о ее корректности, доказанные ранее Фетом другим способом.

В. Н. Масленникова

1532. О смешанной граничной и начальной проблеме в большом для определенной системы дифференциальных уравнений на дифференцируемых многообразиях (Обоснование метода Фурье). Морен (Über gemischte Rand- und Anfangswertprobleme in Grossen für gewisse Systeme von Differentialgleichungen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (Eine Begründung der Fourierschen Methode). Maurin K.), Studia math., 1956, 15, № 3, 314—327 (нем.)

Пусть Au (где $u=(u_1, \ldots, u_r)$ — самосопряженная эллиптическая дифференциальная система порядка σ,

$$Au=((A, u)_1, \ldots, (Au)_r),$$

где

$$(Au)_i=\sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_s=1\\ 0\leqslant s\leqslant\sigma}}^{n} a^{ij}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}(x)\frac{\partial^s u_j}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_s}} \qquad (i=1, \ldots, r).$$

Пусть функции $a^{ij}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}(x)$, где $i, j=1, \ldots, r$, $1\leqslant\alpha_l\leqslant n$, $s\leqslant\sigma$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывны вместе со своими производными достаточно высокого порядка на достаточно регулярном n-мерном многообразии Ω. Обозначим через A_0 оператор A ограниченной системы функций класса C^∞, определенный в Ω и стремящийся к нулю вне некоторого (определенного) компакта. Обозначим через A_1 самосопряженное расширение оператора A_0. Если $(-A_0\varphi, \varphi)\geqslant\alpha(\varphi, \varphi)$ для $\varphi\in D(A_0)$ (где α—константа, $(\varphi, \psi)=\int_\Omega \varphi\bar{\psi}\,dx_1, \ldots, dx_n$ и $D(B)$ обозначают систему операторов от B) и $f\in D(A_1)$, $g\in D(A_1^{1/2})$, то там существует функция $\Gamma(t)$, определенная для $t\geqslant 0$, принимающая значения из пространства вектор-функций от n переменных и удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

$$\frac{d^2\Gamma}{dt^2}=A_1\Gamma$$

с начальными условиями $\Gamma(0)=f$, $\left.\frac{d\Gamma(t)}{dt}\right|_{t=0}=g$.

Решение представляется в виде формулы

$$\Gamma(t)=\int_\alpha^\infty \cos(\lambda^{1/2}t)\,dE(\lambda)\,f+\int_\alpha^\infty \lambda^{-1/2}\sin(\lambda^{1/2}t)\,dE(\lambda)\,g,$$

где $\int_\alpha^\infty \lambda dE(\lambda)$ — спектральное представление оператора $-A_1$ (Ахиезер, Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.-Л., 1950, § 6, 66).

Решение зависит от вектор-функций f, g. Кроме того, если $f\in D(A_1^{m+1})$, $g\in D(A_1^m)$, $m>\frac{h}{2\sigma}+1$, то функция $u(x, y)$, $u(-, t)=\Gamma(t)$ (возможно видоизменение на пространстве $(h+1)$-мерной меры нуль) является классическим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}=Au(x, t)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0)=f(x), \quad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$$

и однородными граничными условиями $u(-, t)\in D(A_1)$. Если $f\in D(A_1^q)$, $g\in D(A_1^q)$ $(q=1, 2, \ldots)$ и функции $a^{ij}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}(x)$ класса C^∞, то $u(x, t)$ принадлежит классу C^∞. Метод доказательства, как говорит автор, подобен методу, предложенному Йосида для волнового уравнения.

Доказательство существования классического решения основано на более ранней работе Маурина (РЖМат., 1958, 338). Автор получает аналогичный результат для смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au, \quad (-1)^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial t}=Au.$$

A. Plis

1533. О некоторых свойствах решений параболических систем. Эйдельман С. Д., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 2, 191—207

Изучаются параболические и эллиптические системы уравнений. Используются методы и обозначения статьи автора (РЖМат, 1954, 2583). Работа состоит из двух частей. В первой части доказываются теоремы типа Лиувилля для систем параболического и эллиптического типов. Для системы

$$\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k_0 2b+\Sigma k_s=n_j 2b\\ i=1,2,\ldots N}} A_{ji}^{(k_0k_1,\ldots,k_n)}\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами имеет место

Теорема 1. Всякое регулярое в полупространстве $t\leqslant T$ решение $u_i(x, t)$ $(i=1, \ldots, N)$ параболической системы (1), удовлетворяющее вместе со своими производными до порядка n_i-1 по t условию

$$|U(x, t)|<M[|x|+1]^\beta[T+1'-t]^\alpha \qquad (2)$$

с некоторыми постоянными M, α, β, представляет собой систему полиномов степени $[\beta]$ по $x_1, \ldots, x_n$ и $\min\left\{[\alpha], \left[\frac{\beta}{2b}\right]+n_i-1\right\}$ по t.

Следствие 1. Если $\beta<1$, $n_i=1$ или $\beta<1$, $\alpha<1$, то $u_i(x, t)$ суть постоянные.

Следствие 2. Класс систем вида (1), для которых справедлива теорема Лиувилля в полупространстве $t\leqslant T$ или $t\geqslant T$, исчерпывается параболическими и „обратно-параболическими" системами.

Аналогичная теорема устанавливается для эллиптических систем.

Для некоторого класса параболических систем с коэффициентами, зависящими от t, устанавливается

Теорема 3. Регулярное в полупространстве $t<T$ решение, удовлетворяющее неравенству

$$|U(x, t_0)|<Me^{(\delta_0-\varepsilon)(t-t_0)},$$

где $t_0\leqslant T$, $\varepsilon>0$, а δ_0 определяется по коэффициентам уравнения, равно тождественно нулю.

Вторая часть работы относится к вопросу о единственности и аналитичности по пространственным координатам решений некоторых задач для бесконечных областей и задач без начальных значений. Пусть в системе (1) коэффициенты зависят от t и пусть $M=2b\max_{j=1,\ldots,N} n_j$. Тогда имеет место

Теорема 5. Любое M раз дифференцируемое в цилиндре $T\times V$ решение системы является аналитической вектор-функцией пространственных координат.

Теорема 6 устанавливает единственность решения некоторых смешанных задач.

Теоремы 7 и 8 обобщают результат А. Н. Тихонова о единственности решений уравнения теплопроводности на широкий класс параболических систем.

Доказательства проводятся с использованием свойств матрицы Грина и соответствующих оценок.

А. Л. Крылов

1534. Фундаментальные решения эллиптических систем уравнений с параметром для неограниченного пространства. Мельник (Фундаментальні розв'язки еліптичних систем рівнянь з параметром для необмеженого простору. Мельник Д. П.), Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1957, **44**, 204—209 (укр.)

В n-мерном пространстве точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ рассматривается эллиптическая система уравнений

$$A_0\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u+A_1\left(\lambda.\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \qquad (1)$$

где

$$A_0\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=$$

$$=\sum_{k_1+\ldots+k_{n+1}=s} A_{k_1\ldots k_{n+1}}(x)\,\lambda^{k_{n+1}}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{dx_1^{k_1},\ \ldots,\ dx_n^{k_n}},$$

$$A_1\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=$$

$$=\sum_{k_1+\ldots+k_{n+1}<s} A_{k_1\ldots k_{n+1}}(x)\,\lambda^{k_{n+1}}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1},\ \ldots,\ \partial x_n^{k_n}}.$$

λ — положительное число, $A_{k_1\ldots k_{n+1}}(x)$ — квадратные матричные функции, определенные во всем пространстве.

Доказана теорема: Пусть существует такая положительная во всем пространстве функция $A_0(x)$, что

$$\frac{\det A_0(\lambda,\ x,\ i\alpha)}{[A_0(x)]^p\ |\ \alpha'\ |^{sp}}\geqslant\mu>0$$

для любой точки x пространства и для любой ненулевой точки $\alpha'=(\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Если при этом коэффициенты оператора $A_0\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывно дифференцируемы $s+1$ раз, коэффициенты при производных порядка j ($j=0,\ 1,\ \ldots\ s-1$) в операторе $A_1\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывно дифференцируемы j раз во всем пространстве, причем коэффициенты оператора $A_0\left(\lambda,\ x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ являются порядка $O(A_0(x))$, а производные до s-го порядка этих коэффициентов, так же и коэффициенты оператора $A_1\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$, растут не быстрее, чем $A_0(x)$ при $|x|\to\infty$, то при достаточно большом λ существует фундаментальное решение системы (1) $\omega_\lambda(x, y)$ во всем пространстве и удовлетворяет следующим оценкам, справедливым как при $|x-y|\to\infty$, так и при $|x-y|\to 0$:

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}\omega_\lambda(x,\ y)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=$$

$$=O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)}\,\varphi_{n-s+k_1+\ldots+k_n}(|x-y|)\right)$$

$$k_1+\ldots+k_n=0,\ 1,\ \ldots,\ s;\quad \varepsilon>0,$$

где

$$\varphi_k(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x-y|^k} & (k>0),\\ |\lg|x-y||+1 & (k=0),\\ 1 & (k<0).\end{cases}$$

Б. Р. Лаврук

1535. Условие разрешимости одной граничной задачи для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Лаврук Б. Р., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 1, 23—25.

Об индексе одного оператора граничной задачи для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Лаврук Б. Р., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 2, 287—290

Для эллиптической системы уравнений (I)

$$A\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)=\sum_{i,\ j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Au=F,$$

A_{ij}, A_i и A—квадратные матрицы порядка p, определенные и непрерывно дифференцируемые соответственно $t+3$, $t+2$ и $t+1$, $t\geqslant 1$ раз в области D точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$, рассматривается граничная задача (II)

$$B\left(y,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)=\lim_{x\to y}\sum_{i=1}^{n}B_i(y)\frac{\partial u}{\partial x_i}+B(y)\,u=f(y)$$

в выпуклой области V, ограниченной $t+2$ — кратно гладкой границей S, $y\in S$. $B_i(y)$, $B(y)$, квадратные матрицы непрерывно дифференцируемые соответственно $t+1$ и t раз вдоль S. Предполагается, что

$\det\sum_{i=1}^{n}B_i(y)\nu_i(y)\neq 0$ на S, $\{\nu_i(y)\}$— вектор нормали к S. При $F\equiv 0$, $f\equiv 0$ задача (I, II) переходит в задачу (I_0, II_0). Вводится задача (I*, I*), сопряженная с (I, II). Предполагается, что задачи (I, II) и (I*, II*) приводимы к регулярным интегральным уравнениям в смысле Я. Б. Лопатинского. Установлено необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (I, II) в виде

$$\int_V v^*(z)\,F(z)\,dz+\int_S v^*(z)\,f(z)\,dS=0,$$

где V^* — любое решение однородной задачи (I^*_0, II^*_0). Устанавливается взаимно однозначное соответствие между решениями однородной задачи I^*_0, II^*_0 и решениями некоторого интегрального уравнения вида

$\lambda(y)+\int_S\lambda(z)\,B\left(z,\ \frac{\partial}{\partial z}\right)G(z,\ y)\,dS_z=0$, где G — матрица.

Доказано также существование нормальных фундаментальных матриц, и сформулирован ряд их свойств. Эти свойства используются как при решении самих задач I, II и I*, II*, так и для изучения дифференциальных свойств решений в зависимости от дифференциальных свойств коэффициентов и правых частей: если производные порядка $t-1$ столбца $f(y)$ непрерывны по Гельдеру на S и производные порядка $t-1$ столбца $F(x)$ непрерывны по Гельдеру внутри V, а производные порядка $t-2$ непрерывны вплоть до S и удовлетворяют там условию Гельдера, то любое решение задачи (I, II) $t+1$ кратно непрерывно дифференцируемо в V, t кратно непрерывно дифференцируемо вплоть до S и его производные порядка t удовлетворяют условию

Гёльдера на S. Утверждается также непрерывная зависимость решения задачи (I, II) от правых частей. При предположении однозначной разрешимости утверждается непрерывная зависимость решений при малых вариациях коэффициентов уравнения и области. Индексом задачи (I, II) называется разность между числом линейно независимых решений задач (I_0, II_0) и (I^*_0, II^*_0). Имеется теорема о независимости индекса от коэффициентов A_i, A и B операторов $A(x, \partial/\partial x)$ и $B(x, \partial/\partial y)$. Все результаты приведены без доказательств. Имеются опечатки. Б. Боярский

1536. О линейных гиперболических дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами в векторном пространстве. Лере (On linear hyperbolic differential equations with variable coefficients on a vector space. Leray J.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 201—210 (англ.)

Приводится схема нового доказательства теоремы И. Г. Петровского (Матем. сб., 1937, 2 (44), № 5, 815—870) существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем гиперболического типа; подробное изложение содержится в книге автора „Hyperbolic differential equations". При этом автор, введенный в заблуждение несущественной неточностью в работе И. Г. Петровского, полагает, что метод последнего применим только в случае не более девяти независимых переменных; однако, как указал И. Г. Петровский (РЖМат, 1958, 5749), это не так.

Заданное уравнение m-го порядка переводится в систему

$$p_1 U = A(x, p_2, \ldots, p_l)\, U + V(x);\ U = (u_1, \ldots, u_m);$$

$p_k = \partial/\partial x_k$; $x = (x_1, \ldots, x_l)$, причем элементы $a_{\lambda\mu}(x, p)$ имеют по p порядок $\leqslant \lambda - \mu + 1$; $a_{\lambda\mu}(x, p) = h_{\lambda\mu}(x, p) +$ + члены низшего порядка. Далее решается чисто алгебраическая задача о построении симметричной положительно определенной матрицы $B(x, p_2, \ldots, p_l)$, для которой BH симметрична, а $b_{\lambda\mu}(x, p)$ — однородный многочлен относительно p степени $2n - \lambda - \mu$ (при некотором n); для случая вещественных различных корней характеристического полинома заданного уравнения (что равносильно гиперболичности по И. Г. Петровскому) эта задача решается весьма просто и эффективно. С помощью матрицы B получается априорная оценка энергетического типа для решений

$$\frac{d}{dx_1}\left[e^{-\gamma x_1}\sqrt{\int\ldots\int_{(l-1)}(B\,U, U)\,dx_2\ldots dx_l}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, e^{-\gamma x_1}\sqrt{\int\ldots\int_{(l-1)}(BV, V)}\ (\gamma > 0),$$

после чего дальнейшее доказательство можно провести так же, как у Петровского. При этом коэффициенты уравнения считаются достаточно гладкими. В случае, когда коэффициенты уравнения удовлетворяют только условию Липшица, проводится априорная оценка решения (от которого тогда требуется существование во всем пространстве x), основанная на совсем иной идее, в которой для заданного характеристического полинома строится характеристический полином на единицу меньшей степени, причем так, чтобы полы второго характеристического конуса разделяли полы первого. В конце стр. 203 имеются опечатки. А. Д. Мышкис

1537. О существовании единственного решения некоторых задач для гиперболической системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Шмидт (Sur l'existence d'une solution unique de certains problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes. Szmydt Z.), Ann. polon. math., 1958, 4, № 2, 165—182 (франц.)

Рассматривается система уравнений в векторной записи

$$U_{xy} = F(x, y, U, U_x, U_y)\ (-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,\ -\beta \leqslant y \leqslant \beta),$$

где $U = (u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})$, $F = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$, $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta < \infty$,

при краевом условии

$$U_x(x, \gamma(x)) = G[x, U(x, \gamma(x)), U_y(x, \gamma(x))]\ (-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha),$$

$$U(\lambda(y), y) = U^* + \int_{y_0}^{y} B[t, U(\lambda(t), t), U_x(\lambda(t), t)]\,dt\ (-$$

$$-\beta \leqslant y \leqslant \beta), \qquad (1)$$

где функции G, B, γ, λ, F и постоянные U^*, y_0 заданы (все участвующие функции во всяком случае считаются непрерывными). Пусть $|\gamma(x)| \leqslant \beta$, $|\lambda(y)| \leqslant \alpha$, $|y_0| \leqslant \beta$, $\lambda \in C^1$, $w = \max|\lambda'|$, $h = 2\max(\alpha, \beta)$, а функции G, B, F удовлетворяют по U, U_x, U_y условию Липшица с константами K_1, K_2, L соответственно:

$$|G(x, U, Q) - G(x, \widetilde{U}, \widetilde{Q})| \leqslant K_1\{\max_i |u^{(i)} - \widetilde{u}^{(i)}| +$$

$$+ \max_i |q^{(i)} - \widetilde{q}^{(i)}|\}\ \text{и т. п.}$$

Тогда если

$$K_1(w + h + 1) + K_2(h + 1) + hL(w + h + 2) < 1, \qquad (2)$$

то к поставленной задаче применим принцип сжатых отображений и потому она имеет одно и только одно классическое решение. Эта задача содержит задачи Коши, Дарбу (Гурса) и Пикара как частные случаи и была в иных предположениях и иным методом исследована автором ранее (РЖМат, 1958, 351). Рассматривается также целый ряд вариантов приведенной теоремы: случай, когда функции G, B, F заданы лишь для ограниченных значений U, U_x, U_y; случай, когда $F \equiv 0$, $G \equiv -K_1 U_y$, $B \equiv K_2 U_x + B_1(t)$ (здесь взамен (2) требуется условие $|K_1[K_2 - \lambda'(\gamma(x))]| < 1$ ($|x| \leqslant \alpha$), существенность которого показана на примерах); случай, когда одна из функций $\lambda(y)$ или $\gamma(x)$ имеет малое колебание (тогда условие (2) можно ослабить); случай, когда взамен (1) поставлено условие $U(x_0, y_0) = U^*$, $U_y(\lambda(y), y) =$ $= H[y, U(\lambda(y), y), U_x(\lambda(y), y)]\ (-\beta \leqslant y \leqslant \beta)$.

А. Д. Мышкис

1538. О задаче Нёймана для уравнения $\Delta u(P) = F(P, u(P), \partial u(P))$. Сато (Sur le problème de Neumann pour l'équation $\Delta u(P) = F(P, u(P), \partial u(P))$. Sato Tokui), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 2, 107—109 (франц.)

В трехмерном пространстве рассматривается задача Нёймана для нелинейного уравнения

$$\Delta u(P) = F(P, u(P), \partial u(P)), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(P). \qquad (2)$$

Область определения T нашей задачи принадлежит классу B_h, S — граница области $f(x_1, x_2, x_3)$ — непрерывна на S, $F(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3)$ непрерывна, ког-

да $(x_1, x_2, x_3) \in SU'T$, $-\infty < u, p_1, p_2, p_3 < +\infty$. Оператор Δ понимается в обобщенном смысле

$$v(x_1, x_2, x_3) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \{v(x_1 + r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$x_2 + r\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 + r\cos\theta) - v(x_1, x_2, x_3)\}\sin\theta\, d\theta.$$

С помощью тождества Грина задача сводится к нелинейному интегральному уравнению для $u(P)$. Анонсируется следующая теорема: Полученное интегральное уравнение имеет решение с непрерывными производными первого порядка. Это решение удовлетворяет уравнению (1), а на границе условию $\frac{\partial u}{\partial n} = f(P) + C$, где

$$C = \frac{k}{4\pi}\left\{\int_S f(Q)\, d\sigma_Q - \int_T F(Q, u, \partial u)\, d\omega_Q\right\},\quad k \text{ — фикси-}$$

рованная константа. В. С. Виноградов

1539. Заметка о дифференциальных уравнениях. Андервуд (Notes on differential equations. Underwood F.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 325, 175—180 (англ.)

Автор указывает некоторые подстановки, которые позволяют проинтегрировать отдельные нелинейные уравнения в частных производных третьего порядка. В. В. Немыцкий

1540. О первой краевой задаче для уравнений одномерной нестационарной фильтрации. Калашников А. С., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 5, 858—861

Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где $\varphi(u) > 0$, $\varphi'(u) > 0$ для $u > 0$; $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, рассматриваются краевые задачи в прямоугольнике $R(t \in [0,T],\ x \in [0,X])$ и в полуполосе $D(t \in [0,T],\ x \in (0,\infty))$.

Определение 1. Функция $u(x,t) \geqslant 0$, непрерывная в R, удовлетворяющая условиям

$u(0,x) = f_0(x) \geqslant 0$; $u(t,0) = f_1(t) \geqslant 0$; $u(t,X) = f_2(t) \geqslant 0$, (2)

называется обобщенным решением задачи (1), (2), если существует обобщенная производная $\partial\varphi(u)/\partial x \in L_2(R)$ и для любой $F(t,x)$, непрерывно дифференцируемой в R и равной нулю при $t = T$, $x = 0$ и $x = X$, имеет место равенство

$$\iint_R \left[\frac{\partial F}{\partial t}\, u - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}\right] dt\, dx + \int_0^X F(0,x) f_0(x)\, dx = 0. \qquad (3)$$

Теорема 1. Обобщенное решение (1), (2) единственно.

Теорема 2. Пусть $\varphi(u)$ 6 раз непрерывно дифференцируема при $0 < u \leqslant M + \varepsilon = M_1$, где $M = \max f$, $\varepsilon > 0$; функции $\varphi(f_0(x))$, $\varphi(f_1(t))$, $\varphi(f_2(t))$ удовлетворяют условиям Липшица; $\varphi(u)$ удовлетворяет требованиям

$$\varphi''(u) > 0 \text{ при } u > 0;\ \varphi'(u) = O\left(\sqrt{\varphi''(u)}\right) \text{ при } u \to 0,$$

$$\int_0^a \frac{\varphi'(\alpha)}{\alpha} d\alpha < \infty.$$

Тогда существует обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (1), (2). В точках $R \setminus \Gamma$, где $u(t,x) > 0$, существуют и непрерывны все производные $u(t,x)$, входящие в уравнение (1), и $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1).

Доказательство теорем 1 и 2 проводится методами, аналогичными методам работ О. А. Олейник (РЖМат, 1957, 8665; 1958, 5752).

Аналогичные определение и теоремы даны для случая полуполосы D. А. Л. Крылов

1541 К. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гюнтер (Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathemathischen Physik. Günter N. M. Übers. aus dem Russ. Leipzig, Teubner, 1957, X, 341 S., ill., 18.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 49, 3375 (нем.)

См. РЖМат, 1956, 446 К.

1542 К. Лекции по уравнениям с частными производными. Трикоми (Lezioni sulle equazioni a derivate parziali. Corso di analisi superiore, anno, accad. 1953—1954. Tricomi Francesco G. Torino, Gheroni, 1954, 484 p.) (итал.)

Эта книга является превосходным введением в теорию дифференциальных уравнений с частными производными.

Первые сто страниц содержат основы классических аналитических методов, в том числе теорию интегральных уравнений специальных функций, которые нужны впоследствии. Гл. II содержит (75 стр.) теорию характеристик для уравнений первого и второго порядка. В гл. III (около 100 стр.) детально рассматриваются уравнения гиперболического типа. Уравнения эллиптического типа рассматриваются в гл. IV (около 100 стр.), в которую входит не только классическая трактовка, но также и более современные числовые методы. Последняя глава (около 100 стр.) посвящена уравнениям параболического и смешанного типов.

Книга особенно ценна вследствие полноты библиографических ссылок, а также из-за ряда интересных задач, помещенных в конце каждой главы. К сожалению, книга, должно быть, воспроизведена с рукописи, и это сделано неудовлетворительным образом. Она заслуживает более тщательной обработки. E. T. Copson

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 703.

1543 К. Прикладная математика. Грубан (Užitá matematika. Hruban Konrád. Praha, SNTL, 1955, [1], 70 s., il., 5,80 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 30, 755 (чешск.)

В первой части учебного пособия даются общие сведения о дифференциальных уравнениях в частных производных, вторая часть посвящена основам математической теории упругости, а третья — теории упругого полупространства. (К этим трем частям примыкает в качестве четвертой статья о краевых задачах теории упругих оболочек, вышедшая отдельно в Сборнике ВТЗ в Брно.)

Пособие предназначается студентам факультетов инженерного строительства с целью показать, каким способом применяется математика при решении более сложных задач в статике строительных конструкций, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных. Автор не занимается теорией дифференциальных уравнений в частных производных (дает ссылки на литературу), но приводит только главные результаты и на множестве подходящих примеров иллюстрирует их применение. Итак, автор не старается изложить систематически теорию дифференциальных уравнений в частных производных, но старается на практических примерах показать характерные приемы, применяемые в столь трудной для студентов математической дисциплине. K. Rektorys

1544 Д. Некоторые свойства решений эллиптических систем первого порядка и краевые задачи. Даниелюк И. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1958

1545 Д. Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Боровиков В. А. Автореф. дисс. канд. физ.-математ. н., МГУ, М., 1958

1546 Д. Исследование смешанных задач в классе обобщенных функций. Джавадов М. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1958

1547 Д. Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений первого порядка и уравнений второго порядка эллиптического типа. Виноградов В. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1958

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

1548. Интегралы задачи двух тел в сферических координатах и применение их для определения орбит. Имнадзе М. П., Абастуманис астропизикури обсерваториа. Биулетени, Бюл. Абастуманск. астрофиз. обсерв., 1958, № 22, 145—180 (груз.; рез. русск., англ.)

1549. Обмен и захват в задаче трех тел. Алексеев В. М., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 4, 599—602

Пусть имеется система трех тел r_0, p_1, p_2, движущаяся под действием сил взаимного тяготения по закону Ньютона; $\rho_{ij}(t)$ — расстояние между телами p_i и p_j, $i \neq j$. По определению в системе имеет место захват, если имеем $\rho_{ij} \to \infty$ при $t \to -\infty$ и, кроме того, при $t \to \infty$ расстояние ρ_{01} ограничено, а ρ_{02} и $\rho_{12} \to \infty$; в системе имеет место обмен, если при $t \to -\infty$ расстояние ρ_{01} ограничено, а ρ_{02} и $\rho_{12} \to \infty$ и, кроме того, при $t \to \infty$ расстояние ρ_{02} ограничено, а ρ_{01} и $\rho_{12} \to \infty$.

Возможность захвата при произвольных массах тел, но при достаточно большой общей энергии системы была доказана референтом. В реферируемой работе в предположении достаточно малых масс тел p_1 и p_2 доказаны возможность захвата при любой положительной энергии системы и возможность обмена при любой энергии. Эти результаты опровергают противоположные утверждения Шази (Chazy M. J., J. math. pures et appl., 1929, **8**; Bull Astr. Inst., Netherl. 1938, **8**, 403).

К. А. Ситников

1550. Термодинамика необратимых процессов. Попов (Sur la thermodynamique des processus irreversibles. Popoff Kyrille), Докл. Болг. АН, 1957, **10**, № 2, 97—100 (франц.; рез. русск.)

Автор устанавливает, что феноменологические соотношения Онзагера являются первыми интегралами дифференциальных уравнений ньютоновского типа, и показывает преимущество этих уравнений.

С. М. Ильяшенко

1551. О связи между радиусом действия ядерных сил и глубиною потенциальной ямы в теории дейтрона. Плювинаж, Прориоль (Sur la relation portée-profondeur dans le problème du deutéron. Pluvinage Philippe, Proriol Joseph), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 25, 2201—2203 (франц.)

Предполагается, что стационарное состояние дейтрона может быть описано уравнением

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + (-\gamma_1^2 + \lambda f(\rho))\, R = 0$$

с дополнительными условиями $\int_{\rho_0}^{\infty} R^2 d\rho < \infty$, $R(\rho_0) = 0$, где $R(\rho)$ — волновая функция дейтрона, ρ — расстояние протон-нейтрон в единицах радиуса действия ядерных сил α, $\eta = h^{-1}\alpha\sqrt{MB}$, $\lambda = h^{-2}MV_0\alpha^2$, B — энергия связи дейтрона, M — масса нуклона, V_0 — глубина потенциальной ямы. Относительно функции $f(\rho)$ предполагается только то, что она убывает экспоненциально на бесконечности. Показано, что путем разложения R в ряд по ортогональной системе функций, являющихся полиномами Якоби $J_\nu^{2\eta,1}(z)$, $(2e^{-(\rho-\rho_0)} = 1 - z)$

$$R = (1+z)(1-z)^\eta \sum\nolimits_\nu h_\nu A_\nu J_\nu^{2\eta,1}(z),$$

и использования вариационного принципа Хюльтена

$$\delta(J - \lambda N) = 0,\ J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (R'^2 + \gamma_1^2 R^2)d\rho,\ N = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(\rho)R^2\, d\rho$$

можно получить связь между V_0 и α в виде характеристического уравнения $\det(\lambda^{-1}I - \mathfrak{N}) = 0$, где I — единичная матрица,

$$\mathfrak{N}_{\mu\nu} = A_\mu A_\nu \int_{-1}^{1} (1-z)^{2\eta-1}(1+z)^2 g(z) J_\mu^{2\eta,1} J_\nu^{2\eta,1} dz,$$

A_ν^2 — норма функции $J_\nu^{2\eta,1}$, $g(z)$ — функция $f(\rho)$, в которой произведена замена переменной $2e^{-(\rho-\rho_0)} = 1 - z$.

Ю. С. Саясов

1552. Попытка связать уравнение Гейзенберга и u-уравнение волны в теории двойного решения. де Бройль (Tentative de raccord entre l'équation de Heisenberg et l'équation de l'onde u en théorie de la double solution. de Broglie Louis), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 14, 2077—2079 (франц.).

Автор устанавливает связь между нелинейным уравнением Гейзенберга

$$L(u) + l^2 u^* A u u = 0,$$

не содержащим массового члена, и уравнением теории двойного решения

$$L(u) + k^2 u + N(u) = 0, \qquad (1)$$

где $k = m_0 c/h$, а нелинейный член $N(u)$ берется также равным в $l^2 u^* A u u$.

Указывается, что если ввести в уравнение Гейзенберга вместо u новую волновую функцию $U = U_0 + u$, то оно распадается на систему уравнений для U_0 и U

$$L(U_0) + l^2 (U_0^* A U_0 + U_0^* A u + u^* A U_0 + u^* A u) U_0 = 0,$$

$$L(u) + l^2 (U_0^* A U_0 + U_0^* A u + u^* A U_0 + u^* A u)\, u = 0.$$

Предполагается, что u является волновой функцией в обычном, квантовом смысле, а U_0 описывает более тонкое, субквантовое движение микрообъекта, в духе представлений Бома и Вижье. Усреднение последнего уравнения по области субквантового движения, в предположении, что $\overline{U_0^* A u} = \overline{u^* A U_0} = 0$ (движения независимы) и $l^2 \overline{U_0^* A U_0} = k^2$ приводит к уравнению (1).

Примечание референта. Формальный переход от уравнения типа (1) к обычному уравнению с массовым членом путем усреднения по вакууму был получен Гейзенбергом (РЖФиз, 1954, 8391).

А. А. Боргардт

1553. Пример неголономной нелинейной системы: управляемое шасси. Мелис (Un esempio di sistema anolonomo non lineare' il pattino guidato. Melis Antonio), Rend. Semin. Fac. sci. Univ. Cagliari, 1955, **25**, № 3-4, 143—153 (итал.)

1554. О внутренней баллистике сверхдальнобойного орудия. Джейн, Содха (On the internal ballistics of a supergun (Hochdruckpumpe). Jain V. K., Sodha M. S.), Appl. Scient. Res., 1958, **A7**, № 5, 369—374 (англ.)

1555. Внутренняя баллистика легкого газа орудия при больших скоростях. Содха, Джейн (Internal ballistics of a high velocity light gas gun. Sodha M. S., Jain V. K.), Appl. Scient. Res., 1958, **A7**, № 5, 351—356 (англ.)

1556. Основы пространственной навигации. Лауден (Fundamentals of space navigation. Lawden Derek F.), J. Brit. Interplanet. Soc., 1954, **13**, № 2, 87—101 (англ.)

Определяются условия минимума расхода топлива реактивным мотором космической ракеты, пролетающей в гравитационном поле по плоской траектории, соединяющей две фиксированные точки. В ее плоскости в декартовой системе координат изучаются уравнения движения ракеты:

$$\ddot{x} + f = -\frac{lc}{M}\dot{M}, \qquad \ddot{y} + g = -\frac{mc}{M}\dot{M}, \tag{1}$$

где M — масса и c — скорость ракеты, (l, m) — направляющие косинусы вектора тяги мотора, $(-f, -g)$ — составляющие результирующего вектора силы гравитационного поля, действующего на единицу массы ракеты. Рассматривается непосредственно получающийся из (1) интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [(\ddot{x} + f)^2 + (\ddot{y} + g)^2]^{1/2}\, dt = c \ln \frac{M_0}{M_1},$$

минимум которого определяет условия минимизма расхода топлива при перелете из начальной точки пространства в конечную (где массы ракеты M_0 и M_1). В случае дискретных включений мотора траектория состоит из кусков компланарных орбит с нулевой тягой (сокращенно O-орбит), внутри которых $I = 0$. В точках их соединения ракета получает направленный импульс. С O-орбитой $x = X(t)$, $y = Y(t)$ связываются вспомогательные функции $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющие системе

$$\ddot{u} + u f_x + v g_x = 0, \quad v + u f_y + v g_y = 0, \tag{2}$$

где, например, $f_x = \partial f/\partial x$ при $x\,X(t)$, $y = Y(t)$. В точке соединения орбит (u, v) интерпретируются как направляющие косинусы вектора-импульса тяги. Для однородного гравитационного поля (когда f и g — явные функции только x и y), например, при перелете с Земли на Марс, (2) имеют 1-й интеграл

$$K = u\dot{X} + v\dot{Y} + uf + vg = \text{const}, \tag{3}$$

где K остается постоянной не только на каждой O-орбите, но и при переходе через точки соединения соседних O-орбит, т. е. на всей траектории перелета. Свойства (2) и (3) используются для исследования простейшего случая перелета по траектории с двумя компланарными O-орбитами и двумя импульсными включениями мотора, когда на единицу массы ракеты действует только гравитационное поле одного астрономического тела с вектором напряженности

$$r = -\frac{r}{|r|} \cdot \frac{\mu}{r^2}, \tag{4}$$

где μ — гравитационная постоянная, а r — радиус-вектор, определяющий положение ракеты в полярной системе координат (r, Θ) с полюсом в центре притяжения и базой — осью абсцисс $\overline{OX}$ $[\Theta = \angle(\overline{OX}, r)]$. При (4) каждая O-орбита есть часть эллипса (1-й закон Кеплера) с большой полуосью a, наклоненной к базе под углом γ, и эксцентристетом ε:

$$\frac{1}{r} = p\,[1 + e\cos(\Theta + \gamma)], \tag{5}$$

где $p = a:(a^2 + \varepsilon^2)$, $e = \varepsilon : a$. Используя (5) и 2-й закон Кеплера: площ. $(r, \dot{r}) = r^2\dot{\Theta} = \text{const}\,(= \sqrt{\mu : p})$, авторы разрешают уравнения траектории при двух включениях мотора и при (4) в двух вариантах: при определенном и неопределенном времени перелета. Оказывается, что в обоих случаях решения идентичны. В общих чертах приводится элементарный численный расчет серии минимальных траекторий. Б. В. Широкорад

1557. Формулы для момента времени квадратичных поверхностей регулирования. Эверлинг (Über Formeln für die zeitlichen Momente quadratischer Regelungsflächen. Everling W.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 7-8, 254—256 (нем.)

Приведен способ определения интегралов вида

$$\int_0^\infty \sum_{i,\,k=0}^{n-1} A_{ik}\, y_1^{(i)}(t)\, y_2^{(k)}(t)\, dt \quad (A_{ik} = A_{ki}) \tag{1}$$

и

$$\int_0^\infty t^k\, y_1(t)\, y_2(t)\, dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где y_1 и y_2 — два различных решения дифференциального уравнения

$$a_n\, y^{(n)} + \ldots + a_0\, y \leqslant 0. \tag{3}$$

Как известно, для вычисления интегралов (1) и (2) не требуется находить сами решения. Интеграл (2) сводится к (1), так как

$$\int_0^\infty t^k\, y_1\, y_2\, dt = k! \int_0^\infty \int_{\tau_k}^\infty \ldots \int_{\tau_1}^\infty y_1\, y_2\, dt\, d\tau_1 \ldots d\tau_k. \tag{4}$$

Известно, что для определения интеграла (1) нужно знать коэффициенты B_{ik} такой квадратичной формы, что

$$\sum_{i,k} A_{ik}\, y_1^{(i)}\, y_2^{(k)} = -\frac{d}{dt} \sum_{i,k} B_{ik}\, y_1^{(i)}\, y_2^{(k)}. \tag{5}$$

В литературе известен ряд методов определения коэффициентов (см., например, А. А. Фельдбаум, Электрические системы автоматического регулирования, 1-е изд., 1954 г.; 2-е изд., 1957). Для определения коэффициентов B_{ik} в статье приводится метод, основанный на разложении многочлена

$$Q(s^2) = \sum_{i,k=0}^{n-1} A_{ik}\, s^i (-s)^k \tag{6}$$

по определенным образом подобранным линейно независимым многочленам $\tilde{w}_{n-r-1}(s^2)$:

$$Q(s^2) = \sum_{r=0}^{n-1} q_r\, \tilde{w}_{n-r-1}(s^2). \tag{7}$$

Расчетные формулы не приведены; указано, что можно построить вычисления по схеме, аналогичной схеме Горнера. А. А. Фельдбаум

1558. Линейные и нелинейные вопросы теории регулирования. Беккер (Über lineare und nichtlineare Regelkreise und deren Behandlung. Becker H.), Regelungstechnik, 1958, **6**, № 6, 224—227 (нем.; рез. англ.)

Дается популярный обзор вопросов теории регулирования. Наибольшее внимание уделяется графическому методу для нелинейных задач, предложенному Ку.

В. В. Немыцкий

1559. Математическое продолжение механики. Аржаных И. С., УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 3, 5—11 (рез. узб.)

Автор строит математический алгорифм, позволяющий получить из уравнения Гамильтона—Якоби

$$F(w) = \frac{\partial w}{\partial t} + H\left(t, x_1 \dots x_n, \frac{\partial w}{\partial x_1} \dots \frac{\partial w}{\partial x_n}\right) = 0$$

уравнение Шредингера. Повторное применение алгорифма приводит автора к счетной последовательности уравнений, которые он называет уравнениями „заквантовых" механик различных рангов.

Алгорифм состоит в следующем: пусть на некотором этапе мы получили уравнение в частных производных

$$F_\rho(\Phi) = 0.$$

Заменим Φ на w_ρ и будем искать w_ρ в неявном виде $\Omega(t, w, w_1 \dots w_{\rho-1}, x_1 \dots x_n, w_\rho) = 0$. Вычислим частные производные, входящие в F_ρ, и составим оператор

$$K_\rho(\Omega) = -F_\rho(w_\rho)\,\Omega\,\frac{m_\rho}{w_\rho},$$

степень m_ρ определяется таким образом, чтобы оператор K_ρ был однородным полиномом порядка m_ρ от всех входящих в него производных. Составим функционал

$$I_\rho(\Phi) =$$

$$= \int_{t'}^{t''} dt \int_{w'}^{w''} dw \int_{w'}^{w''} dw_1 \dots \int_{w'_\rho}^{w''_\rho} dw_\rho \int_D \dots \int K_\rho(\Phi)\Delta dx_1 \dots$$

$$\dots dx_n,$$

где t', t'', w', w'', $\dots w'_\rho$, w''_ρ — фиксированные числа; D — фиксированная область конфигурационного пространства

$$(x_1, \dots, x_n); \quad \Delta\, dx_1 \dots dx_n = dD.$$

Условие экстремума этого функционала приводит нас к уравнению, которое кратко запишем в виде

$$F_{\rho+1}(\Phi) = 0.$$

Выполняя подстановку

$$\Phi = \Psi(t, x_1 \dots x_n)\, e^{-i\left(\frac{w}{h} + \sum_{r=1}^{\rho} \frac{w_r}{h_r}\right)},$$

где h, h_1, ..., h_ρ — постоянные, и сокращая на экспоненциальный множитель, получим уравнение „заквантовой" механики порядка ρ

$$G_\rho(\Psi) = 0.$$

Автор иллюстрирует эту схему примером. Физическая интерпретация „заквантовых" механик не обсуждается.

Д. П. Костомаров

1560. Новое решение уравнений гидродинамики. Овсянников Л. В., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 1, 47—49

1561. Некоторые осесимметрические потенциальные течения несжимаемой жидкости. Сидоров О. П., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 2, 37—42

Рассматривается обтекание пространственным потоком осесимметричного тела, образованного вращением: или плоского замкнутого контура или дуги плоской кривой, пересекающей ось вращения в двух точках; скорость набегающего потока параллельна оси тела. Построение всего потока, омывающего тело, достигается путем решения интегральных уравнений, аналогичных уравнениям теории ньютоновского потенциала и содержащих в качестве неизвестной функции величину скорости частиц жидкости на поверхности обтекаемого тела. Эти интегральные уравнения получаются путем предварительного установления некоторых интегральных соотношений типа Грина, которым удовлетворяет функция тока Стокса. Найденные интегральные уравнения подвергнуты анализу, устанавливающему существование у них единственных решений (при соблюдении постулата Чаплыгина, если тело образовано вращением замкнутого плоского контура).

Полученные интегральные уравнения обобщаются на случай обтекания нескольких тел вращения.

Л. Н. Сретенский

1562. Некоторые теоремы о разрывных плоских движениях жидкости. Финн (Some theorems on discontinuous plane fluid motions. Finn Robert), Итон леаналиса математит, J. analyse math., 1955—1956, **4**, № 2, 246—291,6 (англ.; рез. иврит)

Доказывается несколько теорем существования, единственности и устойчивости плоских течений идеальной несжимаемой жидкости, вытекающей из многоугольных сопел с прямолинейными границами или обтекающей с образованием бесконечной спутной зоны многоугольные препятствия.

При доказательстве этих теорем для выпуклых сопел не предполагается наличие симметрии.

Устойчивость указанных выше течений исследуется по отношению как к симметричным, так и несимметричным возмущениям. Теоремы существования для многоугольных границ, однако доказательство единственности на этот случай распространить не удается. Библ. 42 назв.

Э. Л. Блох

1563. О единственности решения граничной задачи вязкой сжимаемой жидкости. Долидзе Д. Е., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1955, **21**, 261—267

В статье Граффи (РЖМат, 1954, 2160) доказана теорема единственности решения уравнений для неустановившегося движения вязкой баротропной жидкости. В данной статье доказывается та же теорема единственности примерно тем же методом, но требование задания плотности в отдельных точках граничной поверхности, в которых проекция скорости на нормаль может стать отрицательной, заменяется чисто формальным требованием ограниченности отношения $\rho_0^{-1} \operatorname{div} \rho_1 \mathfrak{u}$, где ρ_0 — разность плотностей двух предполагаемых решений, $\mathfrak{v}$ — разность векторов скоростей двух решений и ρ_1 — плотность в первом решении. Для доказательства теорем в работе Граффи и в данной наиболее существенным предположением является предположение о нестационарном характере движения: поэтому из этих теорем предельным переходом нельзя получить теорему о единственности решений для стационарных течений вязкой несжимаемой и сжимаемой жидкости.

Н. А. Слезкин

1564. Дальнейшие статистические задачи, связанные с решением одного простого нелинейного уравнения в частных производных. Бюргерс (Further statistical problems connected with the solution of a simple non-linear partial differential equation. Bur-

gers I. M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, 578, № 2, 159—169

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

моделирующее в некотором смысле систему уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Излагается известный (Hopf E., Communs Pure and Appl. Math., 1950, 3, 201—230; Cole I. D., Quart. Appl. Math., p. III, 1951) способ сведения задачи Коши для этого уравнения к задаче Коши для классического линейного уравнения теплопроводности. Решение этой последней задачи представляется, как обычно, в виде интеграла в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, причем при малых ν оказывается существенной только часть интеграла, соответствующая области вблизи максимума подынтегрального выражения. Получающееся предельное представление решения уравнения (1) при $\nu \to 0$ представляет собой однозначным образом выделяемое одно из семейства решений уравнения первого порядка, соответствующего (1) при $\nu = 0$. Дается геометрическая интерпретация упомянутого выше максимума подынтегрального выражения, которая связывается с образованием областей быстрого изменения v по y — прообразов ударных волн. Полученные результаты применяются к построению статистического асимптотического при $t \to \infty$ представления решения рассмотренной автором ранее (Burgers I. M., Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1950, 53, 247—260) задачи, для которой начальное распределение представляет собой ломаную, состоящую из отрезков постоянного наклона, разделенных вертикальными отрезками, причем координаты точек пересечения вертикальных и наклонных отрезков с осью абсцисс являются случайными величинами. Эта задача связана с одномерной моделью турбулентности. Г. И. Баренблатт

1565. О некоторых частных решениях уравнения Буссинеска. Соколов Ю. Д., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 1, 54—58

См. РЖМех, 1957, 12924.

1566. Отражение и преломление упругой волны произвольной формы в случае криволинейной границы раздела. Гельчинский Б. Я., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 3, 458—460

Пусть на некоторую поверхность S раздела двух упругих однородных сред с различными характеристиками падает нестационарная волна с криволинейным фронтом и претерпевает отражение и преломление. Для нахождения интенсивности отраженной и преломленной волны необходимо знать в каждой точке важную геометрическую характеристику поля лучей — так называемую геометрическую расходимость.

Основной результат работы Гельчинского — вывод (в нулевом приближении лучевого метода) формулы, выражающей геометрическую расходимость через характеристики поверхности S и волнового фронта.

В. М. Бабич

1567. Затухание волн в упругой среде. Томас (The decay of waves in elastic colids. Thomas T. Y.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 6, 759—768 (англ.)

Изучается распространение разрывов в упругой среде и выводится уравнение, которому удовлетворяет абсолютная величина „вектора разрыва" вдоль луча. В отличие от ряда работ русских и зарубежных авторов, где изучались аналогичные вопросы (ссылки на эти работы в статье отсутствуют), в статье не предполагается непрерывности плотности на фронте волны.

В. М. Бабич

1568. Метод ортогональной проекции и первые две краевые задачи теории упругости. Телеман Сильвиу, Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, 1, 55—73

См. РЖМех, 1958, 6934.

1569. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. Абрамян Б. Л., Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1958, 26, № 2, 65—72 (рез. арм.)

Рассматривается упругое осесимметричное равновесие сплошного и полого кругового цилиндров. Для сплошного цилиндра бигармоническая функция напряжений задается в виде

$$\Phi(r,z) = z(Ar^2 + Bz^2 + Cz) + \sum_{k=1}^{\infty}[E_k I_0(\lambda_k r) + G_k\lambda_k r I_1(\lambda_k r)]\sin\lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{sh}\mu_k z + B_k \operatorname{ch}\mu_k z + C_k\mu_k z \operatorname{sh}\mu_k z + D_k\mu_k z \operatorname{ch}\mu_k z) J_0(\mu_k r), \qquad (1)$$

где μ_k — корни уравнения $J_1(xR) = 0$, $\lambda_k = k\pi/l$, l — длина, R — радиус цилиндра. Показано, что функция (1) дает решение задачи, если на боковой поверхности цилиндра заданы радиальные смещения и касательные напряжения, а на торцовых поверхностях — нормальные осевые напряжения и касательные напряжения.

Аналогично для полого цилиндра бигармоническая функция задается так:

$$\Phi(r,z) = z(Ar^2 + Bz^2 + Cz) + \ln r(Dr^2 + Ez^2) + \sum_{k=1}^{\infty}[E_k I_0(\lambda_k r) + F_k K_0(\lambda_k r) + G_k\lambda_k r I_1(\lambda_k r) + H_k\lambda_k r K_1(\lambda_k r)]\sin\lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{sh}\beta_k z + B_k \operatorname{ch}\beta_k z + C_k\beta_k z \operatorname{sh}\beta_k z + D_k\beta_k z \operatorname{ch}\beta_k z) W_0(\beta_k r), \qquad (2)$$

где

$$W_l(\beta_k r) = \frac{J_l(\beta_k r)}{J_1(\beta_k R)} - \frac{Y_l(\beta_k r)}{Y_1(\beta_k R)},$$

причем β_k — корни уравнения $W_1(\beta s) = 0$, s — радиус внутренней поверхности. Функция (2) дает решение задачи, если на внутренней и внешней поверхности цилиндра заданы нормальные и касательные напряжения, а на торцовых поверхностях — осевые смещения и касательные напряжения. Г. С. Шапиро

1570. Функция Грина для тонкой изотропной пластинки с отверстием. Бассали, Давуд (Green's functions for thin isotropic plates containing holes. Bassali W. A., Dawoud R. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 3, 755—763 (англ.)

Получено выражение функции Грина для задачи изгиба бесконечной пластинки с отверстием. Внешний (бесконечно удаленный) край пластинки считается свободным, внутренний — защемленным. Для случая, когда область, занятая пластинкой, конформно отображается на внешность окружности полиномиальной функцией, решение получено в замкнутой форме.

В. И. Моссаковский

1571. Вибрации балки на упругом основании. Матьюс (Vibrations of a beam on elastic foundation. Mathews P. M.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 3-4, 105—115 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Рассматриваются колебания бесконечно длинной однородной балки на упругом основании, вызываемые

силой, движущейся вдоль балки с постоянной скоростью. Задача сводится к отысканию решения уравнения

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \nu\frac{\partial y}{\partial t} + ky = F(x, t), \qquad (1)$$

где t — время; x — координата, отсчитываемая вдоль оси балки; y — прогибы; EI — жесткость балки при изгибе; ρ — масса на единицу длины; ν — характеристика амортизации; k — коэффициент постели винклеровского основания.

Детально исследуется решение уравнения (1) в случае, когда $\nu = 0$ и $F = F_0 \cos \omega t \cdot \delta(x - vt)$, где F_0 — амплитуда силы; $\frac{\omega}{2\pi}$ — частота; δ — дельта функции Дирака; v — скорость движения силы.

К. В. Соляник-Красса

1572. Поперечные колебания стержня двоякой жесткости в переходном режиме вращения под действием сил тяжести. Мосеенков (Поперечні коливання стержня двоякої жорстокості в перехідному режимі обертання під дією сил власної ваги. Мосеєнков Б. І.), Наук. щорічник. Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956, Київ, 1957, 507—580 (укр.)

Рассматриваются поперечные колебания вращающегося вала с неодинаковыми главными жесткостями при изгибе. Для решения основного уравнения задачи

$$\frac{E}{m}\left(\frac{I_1 + I_2}{2}\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{I_1 - I_2}{2}\frac{\partial^4 \bar{\psi}}{\partial x^4}e^{2i\theta}\right) + \frac{\varkappa}{m}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = g$$

при граничных условиях

$$\psi\left(\frac{l}{2}, t\right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\left(\frac{l}{2}, t\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi(0, t) = 0$$

применяется приближенный метод Крылова-Боголюбова.

Здесь t — время, x — координата, отсчитываемая вдоль оси стержня от середины его длины; I_1 и I_2 — главные моменты инерции площади поперечного сечения; $\varkappa$ — коэффициент внешнего трения; g — ускорение силы тяжести; $d\theta/dt$ — угловая скорость вращения; $\psi(x, t)$ — комплексная функция, характеризующая поперечные перемещения точек оси стержня.

К. В. Соляник-Красса

1573. Распространение модулированных колебаний. Булдырев В. С., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 4, 45—52 (рез. англ.)

Исследуются решения волнового уравнения в неоднородной среде

$$\Delta u = n^2(x, y, z)\, u_{tt},$$

при нулевых начальных условиях, допускающие асимптотическое разложение вида

$$u = e^{-i\omega(t - f(x, y, z))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k(x, y, z, t)}{(i\omega)^k}, \qquad (1)$$

где ω — частота (большой параметр), а функции A_k медленно меняющиеся со временем по сравнению с $e^{-i\omega t}$. При формальной подстановке этого разложения в уравнение получается рекуррентная система уравнений относительно A_k, допускающая сравнительно простую интеграцию. Рассмотрены также задачи отражения „волн" типа (1). Решения типа (1) возникают, когда нужно решить волновое уравнение при нулевых начальных данных с краевым условием

$$u|_S = e^{-i\omega(t - f(x, y, z))}F(t, x, y, z, \omega),$$

где S — заданная поверхность, F — медленно меняющаяся (со временем) функция.

В. М. Бабич

1574. Отражение звуковых волн от колеблющейся плоскости. Войт С. С., Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 81—88

1575. Теплоотдача в трубах при ламинарном режиме движения жидкости с учетом аксиальной теплопроводности. Лабунцов Д. А., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 6, 1118—1120

Исследуется влияние аксиальной теплопроводности на теплопередачу для случая ламинарного течения жидкости в круглой трубе. Предполагается, что поток жидкости гидродинамически стабилизирован. Задача состоит в решении дифференциального уравнения

$$(1 - \rho^2)\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{Pe^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right) \qquad (1)$$

при одном из двух граничных условий

$$\theta|_{\rho=1} = 0 \qquad \text{или} \qquad \left.\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 0,$$

соответствующих случаям постоянной температуры стенки и постоянной плотности теплового потока на стенке.

Решение задачи ищется в виде

$$\theta = cf(\rho)\, e^{-\mu z}. \qquad (2)$$

Функция $f(\rho)$, для которой получается обыкновенное дифференциальное уравнение, представляется в виде степенного ряда

$$f(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m,$$

для коэффициентов a_m которого получены рекуррентные соотношения.

Параметр μ определяется из граничного условия

$$f(1) = 0 \qquad \text{или} \qquad f'(1) = 0.$$

Общее решение является суперпозицией счетного множества частных решений (2). Приводятся результаты численных расчетов.

В. П. Костомаров

1576. О принципе инвариантности и распространении радиации в неоднородной среде. Белман, Калаба (On the principle of invariant imbedding and propagation through innomogeneous media. Bellman Richard, Kalaba Robert), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, **42**, № 9, 629—632 (англ.)

См. РЖГеофиз, 1957, 7431.

1577. Аналитическая теория электромагнитного поля. Цин (Teoria analitica del campo elettromagnetico. Zin Giovanni), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 215—259 (итал.)

Введение и первая часть работы по интегрированию уравнений электромагнитного поля. В отличие от метода электромагнитных потенциалов и метода непосредственного интегрирования уравнений Максвелла, основанного на векторном аналоге теоремы Грина, в основу своего метода автор кладет уравнение

$$\operatorname{rot} K + mK = \Phi \qquad (1)$$

для нестационарного случая и уравнения

$$\operatorname{rot} K = \Phi, \quad \operatorname{div} K = f \qquad (2)$$

для статического. Как следует из уравнения Максвелла, электромагнитное поле выражается через решения двух уравнений типа (1) следующим образом

$$E = \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2\right), \quad H = \frac{1}{2\lambda_1}\left(K_1 - K_2\right),$$

где $\lambda_{1,2} = \pm\left(-i\omega\mu/\sigma + i\omega\varepsilon\right)^{1/2}$. В случае произвольной зависимости поля от времени указанные соотношения справедливы не для самого поля, а для его преобразований по Лапласу или Фурье.

Для решения уравнения (1) доказывается следующая теорема: Пусть V — регулярная область пространства, ограниченная поверхностью S, K и Φ — векторные функции, определенные первая в области V, а вторая в области $V - S$ и обладающие следующими свойствами: 1) в области V вектор K непрерывен; 2) в области $V-S$ вектор K имеет непрерывные первые частные производные; 3) в области $V - S$ вектор Φ непрерывен вместе со своими первыми частными производными; 4) в области $V - S$ вектора K и Φ удовлетворяют уравнению $\operatorname{rot} K + mK = \Phi$, где m — отличная от нуля комплексная постоянная. Пусть также $\chi(x, y, z)$ есть функция, определенная в области V, непрерывная вместе со своими первыми и вторыми частными производными и удовлетворяющая уравнению $\Delta\chi + m^2\chi = 0$. Тогда имеет место соотношение

$$\int_S \{(n \cdot \operatorname{grad}\chi)\, K + [[n, \operatorname{grad}\chi], K] - m\chi\,[n, K]\}\, da + \int_v \left(\frac{\operatorname{div}\Phi}{m}\operatorname{grad}\chi + [\Phi, \operatorname{grad}\chi] - m\chi\,\Phi\right) dv = 0. \quad (3)$$

С помощью этой теоремы устанавливается основное соотношение

$$\int_S \{(n \cdot \operatorname{grad}\psi)\, K + [[n, \operatorname{grad}\psi], K] - m\psi\,[n, K]\}\, da + \int_v \left\{\frac{\operatorname{div}\Phi}{m}\operatorname{grad}\psi + [\Phi, \operatorname{grad}\psi] - m\psi\,\Phi\right\} dv = \begin{cases} 4\pi K(P_0), & (P_0 \subset V - S) \\ 0, & (P_0 \not\subset V), \end{cases} \quad (4)$$

где $\psi = \frac{1}{r}\left[a\exp(imr) + b\exp(-imr)\right]$.

Далее устанавливаются аналитические свойства интеграла по поверхности в формуле (4), аналогичные свойствам интеграла Коши в теории аналитических функций, а именно: 1) если вектор K в области $V - S$ удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему уравнению (1), и имеет в ней непрерывные первые частные производные, то он бесконечно дифференцируем в этой области; 2) если вектор $G(x, y, z)$ определен на границе S регулярной области V и там интегрируем, то векторная функция $K(x, y, z)$, определенная в области, являющейся дополнением к S, интегралом

$$K(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{[n \operatorname{grad}\psi]\, G + [[n \operatorname{grad}\psi]\, G] - m\psi\,[nG]\right\} da,$$

удовлетворяет в каждой точке этой области соотношениям

$$\Delta K + m^2 K = 0,$$

$$\operatorname{rot} K + mK = -\frac{1}{m}\operatorname{grad}\operatorname{div} K,$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} K + mK) = 0,$$

$$\operatorname{div} K = \frac{m}{4\pi}\int_S \left\{\operatorname{grad}\psi\,[n, G] + m\psi nG\right\} da,$$

где m — отличная от нуля комплексная постоянная.

Кроме этого, исследуются также аналитические свойства интеграла, когда точка P_0 приближается к границе S. Все перечисленные теоремы и предложения дублируются доказательством аналогичных теорем для решений уравнений (2).

В заключение метод интегрирования уравнений (1) и (2) распространяется на неограниченное пространство.

П. П. Бирюлин

1578. Применение теории Штурма—Лиувилля к одному классу смешанных краевых задач. Карп (An application of Sturm—Liouville theory to a class of two-part boundary-value problems. Karp Samuel N. N. Y. Univ. Inst. Math. Sci. Div. Electromagn. Res. Res. Rept, 1955, N BR—13, 23 pp., ill., maps) (англ.)

1579. Релятивистская задача о движении электрона в аксиально-симметричном магнитном поле, перемещающемся вдоль оси симметрии. Конюков М. В., Терлецкий Я. П., Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, **34**, № 4, 1003—1005

При помощи функции Лагранжа

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\,r\varphi A_\varphi,$$

где A_φ — соответствующая компонента векторного потенциала, определяются уравнения движения электрона в аксиально-симметричном магнитном поле. Рассматриваются частные решения уравнений движения, когда магнитное поле, убывающее в направлении оси симметрии, перемещается вдоль этой оси с переменной или постоянной скоростью.

Д. П. Костомаров

1580. Соображения о распространении ведомых и свободных электромагнитных волн в движущихся средах. Манарини (Considerazioni sulla propagazione guidata e libera delle onde eletromagnetiche nei mezzi in moto. Manarini Anna Marisa), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, **27**, 60—74 (итал.) См. РЖФиз, 1958, 16216.

1581. О решении уравнения для электрона в поле электромагнитного излучения. Сенгупта (On the solution of the equation of electron in the field of electromagnetic radiation. Sengupta N. D.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1952 (1953), **44**, № 3, 132—136 (англ.) См. РЖФиз, 1955, 6220.

1582. О нелинейной цилиндрической задаче распространения тепла. Баратта (Sopra un problema cilindrico non lineare di propagazione del calore. Baratta Maria Antonietta), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, **6**, № 3-5, 389—398 (итал.)

1583. Нестационарные процессы в волновой механике. Руссопулос (Sur les processus non stationnaires en mécanique ondulatoire. Roussopoulos P.), Sémin. théor. phys. L. Broglie. Fac. sci. 1956—1957, **26**, Paris, 1957, 10—1 — 10—11 (франц.)

Рассматривается задача Коши для нестационарного уравнения Шредингера. Решение ищется в виде контурного интеграла от функции, для которой составляется интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Рассматривая различные предельные переходы, автор получает известные результаты работ Швингера, Липмана (Schwinger I., Lippman B., Phys. Rev., 1950, **79**, 469) и Арноуса, Хайтлера (Arnous E., Heitler W., Proc. Roy. Soc., 1953, **220**, 290).

А. В. Тулуб

1584. Улучшение приближения Борна в задачах о рассеянии на сферически симметричной потенциальной яме. Фабр-де-ла-Рипелль (Amélioration de l'approximation de Born pour la diffusion par un puit de potentiel à symétrie sphérique. Fabre de la Ripelle Michel), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 10, 1511—1513 (франц.)

Задача рассеяния на сферически симметричной потенциальной яме сводится к решению уравнения

$$\frac{h^2}{2m}\left[\nabla^2 + k_0^2 - U(r)\right]\psi(r) = 0. \qquad (1)$$

Если искать решение в виде разложения по сферическим гармоникам

$$\psi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, i^l e^{i\eta_l} R_l(r) Y_l^0(\theta), \qquad (2)$$

то для радиальных функций R_l получим уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right) + \left[k_0^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l = 0 \qquad (3)$$

с заданной асимптотикой на бесконечности

$$R_l \simeq \frac{1}{k_0 r}\sin\left(k_0 r - l\frac{\pi}{2} + \eta_l\right). \qquad (4)$$

Предполагается, что потенциальную энергию $U(r)$ можно считать равной нулю за пределами некоторого шара радиуса r_0. Для приближенного определения фазы η_l и радиальной функции $R_l(r)$ автор заменяет функцию $U(r)$ в области $0 \leqslant r \leqslant r_0$ постоянной U_0, которая находится из соотношения

$$U_0 = \frac{\int_0^{r_0} U(r) j_l^2\left(\sqrt{k_0^2 - u_0}\, r\right) r^2 dr}{\int_0^{r_0} j_l^2\left(\sqrt{k_0^2 - u_0}\, r\right) r^2 dr}, \qquad (5)$$

где j_l — регулярное решение уравнения (3) при $U(r) \equiv 0$.

Величина U_0 зависит от l. Без строгого математического обоснования утверждается, что предложенная схема расчета позволяет улучшить приближение Борна.

Д. П. Костомаров

1585. Единственность осесимметричного дозвукового потока вокруг конечного тела. Гилбарг, Серрин (Uniqueness of axially symmetric subsonic flow past a finite body. Gilbarg David, Serrin James), Rational Mech. and Analysis, 1955, **4**, № 1, 169—175 (англ.)

См. РЖМех, 1958, 5105.

1586. Распространение разрывов при волновом движении. Курант, Лакс (The propagation of discontinuities in wave motion. Courant R., Lax P. D.), Proc. Nat. Acd. Sci. U.S.A., 1956, **42**, № 11, 872—876 (англ.)

См. РЖФиз, 1957, 26126.

1587. Новый метод вычисления рассеяния (волн) и применение его к случаю круглого диска. Джонс (A new method for calculating scattering with particular reference to the circular disc. Jones D. S.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 4, 713—746 (англ.)

См. РЖФиз, 1958, 6763

См также: 1349, 1606, 1662, 1670, 1682, 1716, 1869, 2000—2002, 2005, 2006

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

1588. О связи интегральных уравнений типа свертки с уравнениями с ядром Коши. Яновский С. В., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 3, 458—461

Исследуется вопрос о сводимости полного особого интегрального уравнения типа свертки

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} k_1(x-t) f(t)\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} k_2(x-t) f(t) dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} n(x; -t) f(t)\, dt = g(x), \quad -\infty < x < \infty \qquad (1)$$

к полному особому интегральному уравнению с ядром Коши

$$A(\zeta)\Phi(\zeta) + \frac{B(\zeta)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau + \int_\Gamma M(\zeta, \tau)\, d\tau = Q(\zeta), \zeta \in \Gamma. \qquad (2)$$

Для заданных и искомых функций допускается рост (или убывание) характера показательной функции на бесконечности.

Пусть

$$f = f_+ - f_-,\ f_+ = \begin{cases} f, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},\ f_- = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -f(x), & x < 0. \end{cases}$$

Если $f_+(x) e^{-yx} \in L_2$, $y \geqslant \alpha$, $f_-(x) e^{-yx} \in L_2$, $y \leqslant \beta$, то говорят, что $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$.

Доказывается, что уравнение (1) равносильно уравнению (2). При этом, если заданные функции таковы, что решение отыскивается в классе $\{\alpha, \alpha\}$ $(f(x) l^{-\alpha x} \in L_2)$, то контуром Γ служит прямая $\zeta = x + i\alpha$ и равносильность уравнений (1) и (2) безусловная. Если $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$, $\alpha \geqslant \beta$, то для равносильности (1) и (2) требуется выполнение некоторых условий, которые выписываются явно.

Ф. Д. Гахов

1589. Замечание к теории линейных интегральных уравнений с частными интегралами. Фенье (Beitrag zur Theorie der linearen partiellen Integralgleichungen. Fenyö Stefan), Publs. mat., 1955, **4**, № 1-2, 98—103 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x_1, x_2) - \lambda\int_0^1 A(x_1, x_2, y)\varphi(y, x_2)\, dy -$$

$$-\mu\int_0^1 B(x_1, x_2, y)\varphi(x_1, y)\, dy -$$

$$-\nu\int_0^1\int_0^1 C(x_1, x_2, y_1, y_2)\varphi(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 = f(x_1, x_2). \qquad (1)$$

Пусть $\mathfrak{A}(x_2)$ — множество характеристических чисел ядра $A(x_1, x_2, y)$, когда x_2 пробегает интервал $[0,1]$, и

$\mathfrak{B}(x_1)$— множество характеристических чисел $B(x_1, x_2, y)$, когда x_1 пробегает интервал [0,1].

Строится на основе резольвенты для ядер $A(x_1, x_2, y)$ и $B(x_1, x_2, y)$ некоторое специальное ядро $p(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda, \mu, \nu)$ и устанавливается теорема:

Если λ, μ и ν таковы, что $\lambda \notin \mathfrak{A}$, $\mu \notin \mathfrak{B}$ и 1 не есть собственное число ядра $p(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda, \mu, \nu)$, то уравнение (1) имеет единственное решение.

В. В. Немыцкий

1590. Об интегральном уравнении с ядром $K(x, y) \subset L^p (1<p\leqslant 2)$. Цудзи (On an integral equation with a kernel $K(x, y) \subset L^p (1<p<2)$. Tsuji Masatsugu), Нихон сугаку сюхо, Japan. J. Math., 1953, **23**, 1—14 (англ.)

Доказывается следующий результат: Пусть $1 < p \leqslant 2$ и пусть $q = p/(p-1)$. Допустим, что $K(x, y)$ измеримо в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, и предположим, что

$$\int_0^1\int_0^1 |K(x, y)|^p dx\, dy < \infty,$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^p dy\right)^{q/p} dx < \infty,$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^p dx\right)^{p/q} dy < \infty.$$

Тогда теоремы Фредгольма справедливы для интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\, dy = f(x),$$

его союзного однородного уравнения

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\, dy = 0$$

и транспонированного однородного уравнения

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(y, x)\varphi(y)\, dy = 0,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ принадлежат к $L^q(0,1)$ и равенство понимается как равенство почти всюду.

Подобный результат доказывается для пространства $L(0, 1)$, когда ядро $K(x, y)$ ограничено или имеет вид $|x-y|^{-\alpha} H(x, y)$, где $H(x, y)$ непрерывно и $0 < \alpha < 1$.

Примечание референта. Автор, по-видимому, не знаком с работой референта (Ann. Math., 1937, **38**, 628—630; см. также Zaanen, Linear analysis, Interscience, New York, 1953, § 11, 13). F. Smithies

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 11, 1215

1591. Исследование одного нового типа двумерных интегральных уравнений. Михайлов Л. Г., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 1, 27—30

Исследуется уравнение

$$f(z) + \frac{\lambda}{\pi z}\iint_D \frac{K(\zeta)}{\zeta - z} f(\zeta)\, ds = g(z); \qquad (1)$$

$z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $ds = d\xi d\eta$; D — конечная область, граница которой состоит из конечного числа простых замкнутых непересекающихся спрямляемых линий; начало координат лежит внутри D. Ядро и искомая функция подчинены условиям:

А. $K(z)f(z) \in L_p$, $p > 2$ при всяком $\varepsilon > 0$; В. $K(z)f(z) \in L^*(D)$; область D_ε получается выключением из D круга $|z| < \varepsilon$, символ $L^*(D)$ не пояснен. Доказывается, что для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция от z^{-1}, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z| = \varepsilon} [\Omega(z) + \Phi(z)] e^{\lambda\omega(z)} z^k dz = 0; \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{K(\zeta)}{\overline{\zeta(\zeta - z)}}\, ds,$$

$$\Omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{K(\zeta) e^{-\lambda\omega(\zeta)}}{\zeta - z}\, g(\zeta) ds.$$

Из других результатов статьи отметим следующие:

Теорема 4. Пусть $\omega(z)$ зависит только от $r = |z|$. Тогда если $\lim\limits_{r \to 0} e^{\lambda\omega(r)} \neq 0$ или не существует, то однородное уравнение имеет только тривиальное решение; если же $\lim\limits_{r \to 0} e^{\lambda\omega(r)} = 0$, то оно имеет бесконечное число линейно независимых решений вида $z^{-m} e^{\lambda\omega(z)}$, $m = 2, 3, \ldots$

Теорема 5. Если $K(z)$ непрерывна в точке $z = 0$, то неоднородное уравнение разрешимо при всяком λ.

Теорема 6. Если $K(z)$ ограничена в точке $z = 0$, то неоднородное уравнение разрешимо при $|\lambda| < (2M)^{-1}$, где $M = \overline{\lim\limits_{z \to 0}} |K(z)|$.

Примечание референта. В тексте в формулировке теоремы 6 опечатка: „непрерывна" вместо „ограничена". С. Г. Михлин

1592. Об интегральных уравнениях с аналитическими ядрами. Литвинчук Г. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 197—209

Исследуются решения интегрального уравнения

$$\varphi(z) = \lambda \int_C \frac{G(z,\tau)}{H(z,\tau)} \varphi(\tau)\, d\tau + f(z). \qquad (1)$$

C—кусочно-гладкая кривая; функции f, G, H аналитические по z, когда z меняется в области D, заключающей внутри себя контур C. По переменной τ G и H'_τ удовлетворяют условию Гёльдера. Для некоторой части исследования приходится требовать существования высших производных G, H по τ.

Для всех точек области D, где $H(z,\tau) \neq 0$, решение уравнения (1) есть функция аналитическая. Корни уравнения

$$H(z,\tau) = 0 \quad (\tau \in C) \qquad (2)$$

определяют некоторую совокупность кривых $E_i [z_i = z_i(\tau)]$, являющихся особыми линиями. Изучается поведение решения уравнения (1) в окрестности этих линий.

Доказывается, что те точки линий E_i, где уравнение (2) имеет один корень (некоторой кратности), являются точками разрыва первого рода решения. Точка пересечения нескольких особых линий E_i называется „звездой". Различаются „звезда обыкновенная", когда ей соответствуют различные точки контура интегрирования, и „звезда особая", когда соответствующие звезде точки контура кратные. Оказывается, что звезда обыкновенная является также точкой разрыва первого рода. В окрестности особой звезды решение неограниченно растет, причем порядок роста может быть различным в зависимости от того, из какого сектора приближаются к звезде.

Указывается величина скачка решения при переходе через особую линию и порядок его роста при приближении к особой звезде. Исследуются другие особые случаи расположения особых линий (пересечение, касание), а также случаи пересечения особых линий с контуром интегрирования. Ф. Д. Гахов

1593. Системы полных особых интегральных уравнений типа свертки. Зарипов Р. Х., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 3, 429—432

Рассматриваются системы интегральных уравнений вида

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty k_1(x-t)f(t)\,dt + \tag{A}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 k_2(x-t)f(t)\,dt + Tf = g(x), \quad -\infty<x<\infty$$

и

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t)f(t)\,dt + Tf = g(x), \quad x>0, \tag{Б}$$

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(x-t)f(t)\,dt + Tf = g(x), \quad x<0,$$

где $k_\alpha(x)$, $\alpha=1,2$ — квадратные матрицы с элементами из $L_1(-\infty,+\infty)$, $f(x)$ и $g(x)$ — вектор-функции из $L_2(-\infty,+\infty)$, T—матрица вполне непрерывных операторов, причем

$$\det[E-K_\alpha(x)]\neq 0, \quad \alpha=1,2;$$

через K_α обозначено преобразование Фурье матрицы k_α.

Устанавливается, что оператор, сопряженный с оператором (А), имеет вид (Б), и наоборот. Далее подробно рассматривается система (А). Утверждается, что для этой системы имеют место известные теоремы Нетера, причем индекс системы равен (пользуемся обычной терминологией)

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(E+K_2(x))}{\det(E+K_1(x))}\right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Доказывается, что система (А), если она разрешима, допускает эквивалентно регуляризующий оператор. Последний определяется так: оператор p называется эквивалентно регулязирующим для уравнения $lf=g$, если при данной функции $g(x)$ уравнения $lf=g$ и $plf=pg$ эквивалентны.

Автор утверждает, что аналогично исследуется и система вида (Б). С. Г. Михлин

1594. Системы обобых интегральных уравнений типа свертки. Зарипов Р. Х., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 93—105

Исследуются системы интегральных уравнений с разностным ядром

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty k_1(x-t)f(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 k_2(x-t)f(t)dt=g(x) \tag{A}$$

и системы парных уравнений этого класса

$$\left.\begin{aligned} f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)f(t)\,dt = g(x), \quad x>0 \\ f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)f(t)dt = g(x), \quad x<0 \end{aligned}\right\} \tag{Б}$$

k_1, k_2 — матрицы, а f, g — векторы порядка n.

Для k_1, k_2, f, $g\in L_2$ системы (А), (Б) преобразованием Фурье приводятся к краевой задаче Римана на вещественной оси:

$$\Phi^+(t)=A(t)\Phi^-(t)+B(t), \tag{1}$$

где матрица A и вектор B определенным образом выражаются через преобразования Фурье матриц k_1,k_2 и вектора g, а искомый кусочно-аналитический вектор выражается через преобразование Фурье искомых функций f. Указываются достаточные условия так называемой функциональной коммутативности матрицы $A(t)$ (Морозов В. В., Уч. Зап. Казанск. ун-та, 1952, 112, кн. 9), при выполнении которых решение краевой задачи (1) может быть дано в замкнутой форме в функциях от матриц.

В случае, когда k_1,k_2,f,g имеют на бесконечности некоторый рост показательного порядка, показывается, что системы (А), (Б) могут быть приведены к системе функциональных соотношений, заданных не более чем на $2n+2$ прямых, параллельных оси абсцисс. В некоторых случаях эти соотношения оказываются краевыми условиями задачи Римана на контуре, составленном из соответствующих прямых, в других же они являются соотношениями более общего типа и способ решения их неизвестен.

Исследуются частные случаи, когда элементы столбцов или строк или все элементы матриц k_1,k_2 имеют общую показательную оценку. Ф. Д. Гахов

1595. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 3—72

Рассматривается система интегральных уравнений типа свертки

$$\varphi(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)=f(t)\,(0<t<\infty), \tag{1}$$

где матрица $k(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, векторы $\varphi(t),f(t)\in L_p(0,\infty)$, $p\geqslant 1$.

Система (1) представляет собою обобщение на случай многих неизвестных функций уравнения, рассмотренного впервые Винером и Хопфом, а затем И. М. Рапопортом и многими другими авторами.

Аналогично тому, как это делается в случае одной искомой функции, преобразованием Фурье система (1) сводится к равносильной ей краевой задаче Римана

$$\Phi^+(t)=[I-K(t)]^{-1}\cdot\Phi^-(t)+F(t) \quad (-\infty<t<\infty), \tag{2}$$

где $K(t)$, $F(t)$—преобразования Фурье $k(t)$, $f(t)$, I—единичная матрица.

Решение исходной системы (1) может быть получено из решения краевой задачи (2) по формуле

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^+(s)e^{-ist}ds. \tag{3}$$

Рассматривается неособый случай $\det[I-K(t)]\neq 0$.

Производится анализ решения краевой задачи (2). Рассматриваемый случай характерен следующими особенностями. В общей теории задачи (2) предполагается, что контур конечен, а матрица коэффициентов удовлетворяет условию Гёльдера. Здесь контур бесконечен, а элементы матрицы $[I-K(t)]^{-1}$ — непрерывные функции. Первое обстоятельство влечет то изменение, что вместо многочленов $P(t)$ при линейных преобразованиях

приходится использовать многочлен $P\left(\frac{t-i}{t+i}\right)$, второе — не влияет ни на характер исследования, ни на формулировку окончательных результатов.

Исследование приводит к хорошо известному в теории краевой задачи Римана и особых интегральных уравнений с ядром Коши (см., например, Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения) результату:

Число линейно независимых решений задачи (2) и системы (1) равно сумме положительных частных индексов; число условий разрешимости равно взятой с обратным знаком сумме отрицательных частных индексов.

Рассматриваются векторы $f(t)$, $g(t)$ также и из некоторых других пространств, таких, что методы решения и результаты остаются неизменными. Получены некоторые новые результаты, относящиеся к решению краевой задачи Римана. Важнейшим является исследование устойчивости частных индексов.

Теорема. Система частных индексов краевой задачи Римана (2) устойчива тогда и только тогда, когда имеется всего два различных частных индекса, отличающихся друг от друга на единицу.

Доказательство необходимости условия проводится элементарно, а доказательство достаточности основано на длинной цепи вспомогательных результатов и трудно обозримо.

Имеются опечатки. В частности, в формулировках уравнения (1) пропущен множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; в обеих цитированных работах референта неправильно указан год издания: 1947 г. нужно исправить на 1937 г., а 1954 г. — на 1952 г.

Примечание референта. В работах Р. Х. Зарипова (РЖМат, 1958, 5898, реф. 1593, 1594) исследованы два типа систем уравнений, частным случаем которых являются системы (1). Накладывается ограничение, что $K(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, но у матриц $k(t)$ допускается на бесконечности рост или убывание показательного характера. Последнее приводит к краевым задачам на сложном контуре, состоящем из нескольких прямых, параллельных оси абсцисс.

Ф. Д. Гахов

1596. О спектре относительно параметра, от которого зависят некоторые линейные интегральные уравнения. Пиконе (Sullo spettro in un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari. Picone Mauro), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat e natur., 1957(1958), **23**, № 6, 347—354 (итал.)

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ — измеримые множества в евклидовых пространствах измерений $r_1, r_2, \ldots, r_n$ соответственно; x_i, y_i — точки множества A_i, $K(\lambda)$ — квадратная матрица, элементы которой $K_{ij}(x_i, y_j, \lambda)$ суть функции, вещественные или комплексные, определенные для любых, вещественных или комплексных, значений λ и для $x_i \in A_i$, $y_j \in A_j$; φ — вектор-функция, i-я компонента которой $\varphi_i(x_i)$ определена для $x_i \in A_i$. Функции K_{ij} и φ_i предполагаются квазинепрерывными (термин в статье не определен). Множества так определенных матриц K и вектор-функций φ обозначены через C и Γ соответственно.

Устанавливаются некоторые классы систем интегральных уравнений вида

$$\varphi_i(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} K_{ij}(x_i, y_j, \lambda)\, \varphi_j(y_j)\, dy_j, \qquad (1)$$

для которых можно указать в λ-плоскости круг с центром в начале, не содержащий собственных значений.

1. Квадратная матрица H с элементами $H_{ij}(x_i, x_j)$, $x_i \in A_i$, $x_j \in A_j$ по определению принадлежит классу $C_{p_1 p_2 \cdots p_n}$, если при почти всех x_i функция $H_{ij}(x_i, x_j)$ суммируема по A_j со степенью P_j, а функция

$$\left(\int_{A_j} |H_{ij}(x_i, x_j)|^{p_j}\, dx_j\right)^{1/p_j}$$

суммируема по A_i со степенью p_i. Пусть матрица $H \in C_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ эрмитова и положительно определенная в том смысле, что для любой вектор-функции $\varphi \in \Gamma$, $\varphi \not\equiv 0$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{A_i}\int_{A_j} H_{ij}(x_i, x_j)\, \overline{\varphi_i(x_i)}\, \varphi_j(x_j)\, dx_i dx_j > 0.$$

Если

$$K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) = \begin{cases} H_{ij}(x_i, y_j), & i \geqslant j, \\ \lambda H_{ij}(x_i, y_j), & i < j, \end{cases}$$

или же

$$K_{ij}(x_i\, y_j, \lambda) = \begin{cases} \lambda H_{ij}(x_i, y_j), & i > j, \\ H_{ij}(x_i, y_j), & i \leqslant j, \end{cases}$$

то спектр уравнения (1) существует, вещественен и расположен вне интервала (—1, 1).

II. Пусть $p < n$ — натуральное число и пусть

$$K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) = \begin{cases} H_{ij}(x_i, y_j);\ i \leqslant p,\ j \leqslant p \text{ и } i > p,\ j > p, \\ \lambda H_{ij}(x_i, y_j);\ i \leqslant p,\ j > p \text{ и } i > p,\ j \leqslant p, \end{cases}$$

где H_{ij} удовлетворяют перечисленным выше условиям. Тогда возможный спектр уравнения (1) вещественен, симметричен относительно начала и расположен вне интервала (—1, 1).

В статье приведены и некоторые другие примеры.

С. Г. Михлин

1597. Новые типы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Новые виды колебаний. Мараваль-Касесновес (Nuevos tipos de ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales. Nuevos fenómenos de oscilación. Maraval Casesnoves Darío), Rev. Univ. Madrid, 1957, 6, № 21, 89 (исп.)

Краткий реферат докторской диссертации, в которой рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения вида

$$\sum_{r=0}^{n} a_r y^r(t) + \sum_{s=0}^{m} \int_0^{\infty} K_s(r)\, y^s(t-r)\, dr = 0$$

и дифференциальные уравнения вида

$$d^n y = [\mu_1 {}^n dx^n + \sqrt{\mu_2}\, dx\eta]\, y,$$

где y — случайная переменная.

В. В. Немыцкий

1598. Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании. Дун Мин-дэ, Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 4, 726—729

В связи с задачей об устойчивости пластинки малой толщины, движущейся поступательно со сверхзвуковой скоростью, рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение относительно функции прогиба $\zeta(x)$ (x — безразмерная координата в направлении потока):

$$\frac{d^4\zeta}{dx^4} + n\frac{d^2\zeta}{dx^2} - k^2 v^2 \zeta(x) = \lambda P\{\zeta(x)\}, \qquad (1)$$

где

$$P\{\zeta(x)\} = \left(\frac{d}{dx} + iv\right)\int_0^x K(x-\xi)\left[\frac{d\zeta}{d\xi} + i\zeta(\xi)\right] d\xi -$$

аэродинамическое воздействие с ядром

$$K(x-\xi)=\exp\left[-\frac{i\nu M^2}{M^2-1}(x-\xi)\right]J_0\left[\frac{\nu M}{M^2-1}(x-\xi)\right]$$

и коэффициентами, выраженными через геометрические и физические параметры упругой пластинки и окружающей ее среды.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) приводится к четырем независимым интегральным уравнениям относительно $P\{\zeta(x)\}$ однотипной структуры с ядром в виде произведения исходного ядра $K(x-\xi)$ на агрегат экспоненциальных ядер, зависящих от корней уравнения $r^4+nr^2-k^2\nu^2r=0$ и отличающихся друг от друга лишь правыми частями, зависящими от ядра $K(x-\xi)$, корней указанного алгебраического уравнения и четырех произвольных постоянных.

Путем дальнейшего применения операционного метода, связанного с односторонним преобразованием Лапласа, получено общее решение исходного интегро-дифференциального уравнения (1) в замкнутой форме, связанной с необходимостью вычисления интеграла, зависящего от числа Маха M.

Для защемленной по двум краям пластинки построен определитель, позволяющий выразить четыре произвольные постоянные через параметры задачи.

Найдено биквадратурное выражение $\zeta(x)$, отвечающее случаю $M^2\gg1$. М. И. Розовский

1599. Об общей задаче теории замедления нейтронов. Масленников М. В., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 2, 259—262

Изучаются общие сведения решений интегро-дифференциального уравнения, описывающего замедление нейтронов в среде, где отсутствует их размножение. Доказана при весьма общих предположениях единственность и представимость рядом Неймана решения этого уравнения. Ю. С. Саясов

1600. Освещение и поляризация освещенного солнцем неба вследствие рассеяния Релея. Чандрасекхар, Элберт (The illumination and polarization of the sunlit sky on Rayleigh scattering. Chandrasekhar S., Elbert Donna D.), Trans. Amer. Philos. Soc., 1954, **44**, 643—728 (англ.)

Физическая задача, указанная в заглавии, и её математическое решение было дано в гл. X книги Чандрасекхара „Передачи излучения" (Radiative transfer, Oxford, 1950). Решение зависит от двух функций $X(\mu)$ и $Y(\mu)$, которые удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$X(\mu)=1+\int_0^1\frac{\mu}{\mu+\mu'}\Psi(\mu')[X(\mu)X(\mu')-Y(\mu)Y(\mu')]\,d\mu',$$

$$Y(\mu)=e^{-\tau/\mu}+\int_0^1\frac{\mu}{\mu-\mu'}\Psi(\mu')[Y(\mu)X(\mu')-X(\mu)Y(\mu')]\,d\mu'.$$

Рассматриваются четыре значения функции Ψ:

$$\Psi_1(\mu)=\frac{3}{4}(1-\mu^2),\quad \Psi_r(\mu)=\frac{3}{8}(1-\mu^2),$$

$$\Psi^{(1)}(\mu)=\frac{3}{8}(1-\mu^2)(1+2\mu^2),\ \Psi^{(2)}(\mu)=\frac{3}{16}(1+\mu^2)^2,$$

а соответствующие X и Y имеют те же самые индексы, что и Ψ. В случае Ψ_l решение интегральных уравнений не единственно и „стандартные решения" определяются условиями

$$\int_0^1 X_l(\mu)\Psi_l(\mu)\,d\mu=1,\qquad \int_0^1 Y_l(\mu)\Psi_l(\mu)\,d\mu=0.$$

Более ранние результаты см. Chandrasekhar, Elbert, Franklin, Astrophys. J., 1952, **115**, 244—268; Chandrasekhar, Elbert, Astrophys. J., 1952, **115**, 269—278, и таблицы, относящиеся к релееву рассеянию света в атмосфере, Univ. of California, Dept. of Meteorol., 1952).

Таблица 1 настоящего мемуара дает 5 D значений X_l, Y_l, X_r, Y_r, $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$ для $\mu=0$ (.01) 1, $\tau=$ $=$ .05 (.05) .5, 1. Начальные значения были подсчитаны вторым автором, исходя из корректирования второго приближения, данного в „Передаче излучения", § 60. Отправляясь отсюда, интегральные уравнения были решены итерациями при вычислительной научной лаборатории Уотсона.

Таблицы II—XII содержат числовой материал, представляющий интерес для решения физической задачи. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 628.

1601. Расчет внутримолекулярных сил в жидкости. Родригес, Санта-Мария (Cálculo de fuerzas intermoleculares en liquidos. Rodriguez Antonio E., Santa Maria Horacio A. Publs fac. cienc. fisicomat. Univ. nac. Eva Peron, 1954, № 205, p. 55—66) (исп.)

Производится расчет сил, соответствующих бимолекулярному потенциалу, зависящему только от расстояния.

Задача сводится к некоторому интегро-дифференциальному уравнению, которое в свою очередь сводится к уравнению типа Фредгольма относительно потенциала. Последнее уравнение решается численно. С. Г. Михлин

1602 К. Линейные интегральные уравнения. 2-е изд. Ловитт У. В. Перев. с англ. М., Гостехиздат, 1957, 266 стр., илл. Прилож.: О росте собственных значений однородных интегральных уравнений. Гельфонд А. О., 9 р. 85 к.

Дано изложение классической общей теории линейных интегральных уравнений и целого ряда ее приложений к дифференциальным уравнениям, вариационному исчислению и некоторым задачам математической физики, а именно: к задачам Неймана и Дирихле и к задачам о колебаниях, приводящим к дифференциальным уравнениям с краевыми условиями. В настоящем издании в книгу включено дополнение „О росте собственных значений однородных интегральных уравнений", написанное А. О. Гельфондом. Книга представляет интерес для студентов, аспирантов и преподавателей математики в вузах. Н. И. Мозжерова

1603 Д. Некоторые вопросы нелинейного анализа в пространствах Орлича. Шрагин И. В.—Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1958

1604 Д. Возмущенное линейное интегральное уравнение. Рыбин П. П.—Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Иркутск, 1958

См. также: 1445, 1506, 1515, 1526, 1538, 1583, 1662 1706, 2008, 2009

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

1605. Абсолютный минимум в двумерной параметрической задаче на многообразии. Фет А. И., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 6, 1224—1226

Пусть $\mathfrak{M}$ — дифференцируемое многообразие, локальные координаты которого связаны преобразованиями $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где y^i имеют первые производные, удовлетворяющие условию Липшица (многообразие гладкости C_1'). Пусть на $\mathfrak{M}$ определена функция

$$F(x^1, \ldots, x^n; A^{12}, \ldots, A^{n-1n}) = F(x, A).$$

Пусть F удовлетворяет условиям: 1) она непрерывна по всем аргументам; 2) при $k>0$ $F(x, kA) = kF(x, A)$; 3) $F(x, A_1 + A_2) \leqslant F(x, A_1) + F(x, A_2)$; 4) на $\mathfrak{M}$ можно ввести однородно регулярную метрику такую, что в каждой основной окрестности U выполнены неравенства

$$m \| A \| \leqslant F(x, A) \leqslant M \| A \|,$$

где $\| A \|^2 = \sum_{i \neq j} (A^{ij})^2$; $M > m > 0$ — числа, зависящие лишь от $\mathfrak{M}$, F и от метрического тензора g_{ij}, заданного на $\mathfrak{M}$. Обозначим через L_2^T класс вектор-функций $x(u, v) = (x^1(u, v), \ldots, x^n(u, v))$, удовлетворяющих условиям: 1) $x^i(u, v)$ непрерывны в квадрате $K[0 \leqslant u, v \leqslant 1]$; 2) $x^i(u, v)$ абсолютно непрерывны в смысле Тонелли; 3) производные x_u, $x_v{}^i$ суммируемы в квадрате K. Поверхность $p = p(u, v)$, $p \in \mathfrak{M}$, называется допустимой, если в локальных координатах $\mathfrak{M}$ она имеет представление $x = x(u, v)$, где $x(u, v) \in L_2^T$. Для допустимой поверхности $p(u, v)$ положим

$$(p, K, F) = \sum_{\varkappa_k} \iint_{\varkappa_k} F\left(x^i(u, v); \begin{vmatrix} x_u{}^i & x_u{}^j \\ x_v{}^i & x_v{}^j \end{vmatrix}\right) du\, dv,$$

где $\{\varkappa_k\}$ — разбиение K на многоугольники $\varkappa_k$ такие, что каждая поверхность $p(\varkappa_k)$ лежит в одной из локальных координатных окрестностей $\mathfrak{M}$. (p, K, F) не зависит ни от разбиения $\{\varkappa_k\}$, ни от параметризации p (в классе L_2^T).

Автор формулирует следующее основное утверждение: Пусть на $\mathfrak{M}$ задана функция F, удовлетворяющая условиям 1) — 4). Пусть Γ — простой замкнутый контур на $\mathfrak{M}$. Если существует хотя бы одна допустимая поверхность с границей Γ, для которой (p, K, F) конечно, то существует допустимая поверхность p_0 с границей Γ, дающая функционалу (p, K, F) наименьшее значение в классе всех допустимых поверхностей с границей Γ.

Формулируются несколько лемм, необходимых для доказательства приведенного утверждения. При доказательстве используются также результаты А. Г. Сигалова (Успехи матем. наук, 1951, 6, вып. 2, 16).

М. К. Керимов

1606. Проблема Дирихле для системы уравнений Якоби двумерных вариационных задач с n искомыми функциями в линейном и квазилинейном случаях. Беккерт (Das Dirichletsche Problem des Systems der Jacobischen Gleichungen eines zweidimensionalen Variationsproblems für n gesuchte Funktionen im linearen und quasilinearen Fall. Beckert Herbert), Math. Nachr., 1956, **15**, № 1, 7—29 (нем.)

Автор рассматривает регулярную вариационную задачу:

$$E(u_i, u_i) = \iint_{D+S} \sum_{i, k = 1} [a_{ik}(x, y) p_i p_k + 2b_{ik}(x, y) p_i q_k + c_{ik}(x, y) q_i q_k + l_{ik}(x, y) u_i u_k + \varkappa_i(x, y) u_i]\, dx\, dy \to \min \quad (1)$$

$$p_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad q_i = \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

с n неизвестными функциями $u_i(x, y)$, исчезающими на границе S соответствующей плоской области D. Уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие задаче (1), являются уравнениями Якоби (уравнениями в вариациях) вариационной задачи

$$J_\lambda = \iint_{D+S} \left\{ f(x, y, p_i, q_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \Phi_i u_i \right\} dx dy \to \min$$

с n функциями u_i, определенными в D и принимающими на S заданные значения, причем λ является параметром. Исследование основано на работах Морри (C. B. Morrey) и Ниренберга (Nirenberg); используются также некоторые оценки шаудеровского типа, относящиеся к решениям линейных эллиптических систем первого порядка, полученные ранее автором.

Вводится норма

$$N(u) = \max_{P \subset D+S} \sqrt{\left(\iint_{D+S} \frac{u_x{}^2 + u_y{}^2}{r^\alpha}\, dx dy \right)},$$

где r обозначает расстояние до точки P и $0 < \alpha < 1$.

Автор использует теорему о неподвижной точке Шаудера и доказывает, что если коэффициенты в (1) ограничены и измеримы, то существует единственное решение задачи (1), которое является абсолютно непрерывным в смысле Тонелли и имеет конечную норму. Указываются дальнейшие предположения о коэффициентах, которые позволяют получить соответствующие улучшения относительно регулярности решения.

Автор приводит некоторые результаты, распространяющие его результаты на квазилинейные системы первого порядка, являющиеся обобщением системы Хаара для (1).

R. Finn

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 1, 45—46

1607. О дифференцируемости решений вариационных задач в непараметрической форме. Плотников В. И., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 5, 746—749

Доказывается, что абсолютно непрерывное решение задачи на минимум функционала

$$\iint_G F(x, y, z, p, q)\, dx dy, \quad p = z_x, \quad q = z_y,$$

удовлетворяет условию Липшица при условии, что F, кроме обычного условия регулярности, подчинена требованиям:

1) $F = f(x, y, z)\,F^{(1)}(p, q) + F^{(2)}(x, y, z, p, q)$ при $p^2 + q^2 \geqslant \Delta > 0$, где $f > 0$; $F^{(1)}$, $F^{(2)} \in C^4$;

2) $F^{(1)}(p, q)$ положительно однородна относительно p, q степени $\alpha \geqslant 2$ и $F_{pp}^{(1)} \cdot F_{qq}^{(1)} - (F_{pq}^{(1)})^2 \geqslant L > 0$ при $p^2 + q^2 = 1$, где L не зависит от p и q;

$$3)\ \left|\frac{\partial^\beta F^{(2)}(x, y, z, p, q)}{\partial p^m \partial q^n \partial z^k \partial x \cdot \partial y^s}\right| \leqslant L_1 \cdot R^{\alpha-\gamma-m-n},$$

где $R = p^2 + q^2 \geqslant \Delta$; $m + n + k + l + s = 1, 2, 3, 4$; $(x, y) \in G$; $|z| \leqslant z_0$; $L_1 = L_1(z_0) > 0$; $\gamma > 0$. Кроме того, предполагается, что решение $z(x, y)$ обладает свойством единственности в малом. Этот результат обобщает теоремы Морри (Morrey C. B., Trans. Amer. Math. Soc., 1938, **43**, 126) и референта (РЖМат, 1954, 4059).

Доказательство опирается на обобщение леммы Лебега — Радо о седлообразных функциях и на априорные оценки решений уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа. А. Г. Сигалов

1608. О быстроте сходимости вариационного метода Треффтца для первой краевой задачи уравнений полигармонического типа. Клиот-Дашинский М. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 163—172

Для эллиптического уравнения

$$\sum_{k=0}^{2m} A_k \frac{\partial^{2m} u(x, y)}{\partial x^{2m-k} \partial y^k} = f(x, y)$$

с вещественными постоянными коэффициентами в области, ограниченной гладкой кривой Жордана, изучается сходимость вариационного метода Треффтца к решению первой однородной краевой задачи. Координатные функции строятся с помощью соответствующей системы полиномов. В предположении некоторой гладкости искомого решения оценены порядки убывания погрешности самого решения и всех его производных. При $m = 1$ сравнивается оценка погрешности метода Треффтца с оценкой погрешности метода Ритца, осуществляемого по системе многочленов. Делается вывод о преимуществе метода Треффтца при равном числе параметров. Приведен пример численного расчета.

М. Ш. Бирман

1609. Условия минимума в абстрактном пространстве. Голдстайн (Conditions for a minimum in abstract space. Goldstine H. H.), Illinois J. Math., 1958, 2, № 1, 111—123 (англ.)

Пусть G и F — функционал и оператор, определенные в банаховом пространстве U, причем F действует из U в другое банахово пространство V. Точка $u \in U$ называется допустимой, если $F(u) = 0$. Исследуются необходимые и достаточные условия минимума G в классе допустимых точек в окрестности u. С этой целью сначала устанавливаются некоторые линейные соотношения между линейными операторами. Пусть R, S, T — банаховы пространства, f (из R в S) и g (из R в T) — линейные непрерывные операторы, R_f и R_g — линейные замкнутые множества точек в R, для которых $f(r) = 0$, $g(r) = 0$, $r \in R$. Пусть $R_f \subset R_g$ и $P = R/R_f$ — фактор-пространство. Элементы $p \in P$ суть классы $r \subset R$, для которых $f(r)$ принимает постоянное значение. Тем самым определены операторы в P: $H(p) = f(r_p)$, $J(p) = g(r_p)$, где r_p — представитель элемента p, причем $p_1 + p_2$ и ap определяются соответственно как $r_{p_1} + r_{p_2}$ и ar_p. Оператор H определен всюду в P и $H(P) = S_0 = f(R)$, $H(p) = 0$ при $p = 0$. Этот оператор устанавливает взаимно однозначное соответствие между P и S_0. Доказывается, что H и J являются линейными и H имеет обратный на S_0. Пусть $L = JH^{-1}$. Имеет место равенство $g(r) = Lf(r)$. Далее, если $R_f \subset R_g$, то существует оператор L, действующий из $S_0 = f(R)$ в T такой, что $g(r) = Lf(r)$ выполняется тождественно в R. Этот оператор единственен. Если S_0 замкнуто, то L непрерывен, замкнут, ограничен и исчезает на множестве $f(R_g)$. Если $R_f = R_g$, то L исчезает только вначале. В этом случае существует линейный обратный оператор L^{-1}, для которого равенства $g(r) = Lf(r)$, $f(r) = L^{-1}g(r)$ выполнены тождественно в R. Если, далее, $S_0 = f(R)$ замкнуто, то L непрерывен и, если $T_0 = g(R)$ замкнуто, то L^{-1} непрерывен. Положим теперь $R_f \not\subset R_g$. Доказывается, что если даны линейное множество U_0 в U, другое банахово пространство V и точка u^*, не принадлежащая замыканию U_0, то существует линейный и непрерывный оператор h из U в V, обладающий свойством: h ортогонален U_0, но не ортогонален u^*. Если линейное замкнутое множество R_{fg}, представляющее соединение R_f и R_g, не есть все R, то существуют операторы L в S_0 и M в T_0 со значениями в T такие, что $Lf(r) = Mg(r)$ выполнено тождественно в R. Оказывается, $R_f \subset R_g$ тогда и только тогда, когда $R_{fg} \neq R$ или когда g — тождественный нуль.

Пусть в каждой допустимой точке $\bar{r}$: $f(r) = dF(\bar{r}; r)$, $g(r) = dG(\bar{r}; r)$. Говорят, что $\bar{r}$ удовлетворяет правилу множителей, если существуют постоянное l и линейный функционал L такие, что $0 = lg(\bar{r}) + Lf(r) = ldG(\bar{r}; r) + LdF(\bar{r}; r)$. Допустимая точка r есть нормальная, если $S_0 = f(R) = S$ и $R_f \subset R_g$. Устанавливается, что каждая нормальная точка удовлетворяет правилу множителей, для которой L — единственен, непрерывен, определен в S и $l = 1$. Всякая точка, которая не является нормальной, или удовлетворяет правилу множителей с $l = 0$ и L, или такова, что $S_0 = S$, $R_f \subset R_g$. Для минимизирующей точки выполнено правило множителей.

Исследуется следующее удобное достаточное условие существования точки минимума: Пусть $\bar{r}$ — допустимая точка, удовлетворяющая правилу множителей с $l = 1$ и с непрерывным L, существует положительная нижняя грань выражения

$$d^2H(\bar{r}; r, r) = d^2G(\bar{r}; r, r) + Ld^2F(\bar{r}; r, r)$$

для всех r, удовлетворяющих в единичном шаре уравнению $dF(\bar{r}; r) = 0$, где $H(r) = G(r) + LF(r)$. Тогда существует окрестность точки $\bar{r}$ такая, что для каждой допустимой точки этой окрестности $G(r) > G(\bar{r})$. Далее, при некоторых предположениях, доказывается, что каждая нормальная точка является предельной точкой допустимых точек.

В конце работы автор показывает, что если $\bar{r}$ — нормальная минимизирующая точка для G, то тогда существует единственный линейный и непрерывный функционал L, определенный в S и такой, что $dH(\bar{r}; r)$ исчезает и $d^2H(\bar{r}; r, r)$ неотрицателен для всех r единичного шара, удовлетворяющих уравнению $dF(\bar{r}; r) = 0$.

Э. С. Цитланадзе

См. также: 1412, 1413, 1969

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

1610. К введению в исчисление бесконечно малых. Либерт (Zur Einführung der Infinitesimalrechnung. Liebert Fritz), Math. und Phys. Schule, 1958, **5**, № 6, 326—329 (нем.)

1611. Функция sign в анализе. Ротселар (De signatuurfunctie in de analyse. Rootselaar B. van), Euclides (Nederl.), 1958, **33**, № 9, 257—260 (голл.)

1612. Почти геометрические прогрессии. Заблоцкая Н. И., Шмыгун А. Н., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 55—59

Для возрастающих последовательностей $\{u_n\}$ положительных чисел, обладающих пределом $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, доказано, что при $q>1$, $q=1$, $q>\infty$ предел $\lim_{n\to\infty}u_n\Big/\sum_{k=1}^{n}u_k$ существует и соответственно равняется $(q-1)/q$, 0, 1. И. П. Макаров

1613. Исправление и обобщение правила Нейштадта. Функенбуш (A correction and generalization of Neustadt's law. Funkenbusch W. W.), Math. Mag., 1958, **31**, № 3, 159—161 (англ.)

Если конечную последовательность

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \tag{1}$$

умножить почленно на последовательность

$$0{,}2;\ -1;\ 2;\ -2;\ 1;\ -0{,}2, \tag{2}$$

сложить полученные произведения, то в сумме окажется нуль. То же относится к последовательности

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ 1+4d,\ 1+5d. \tag{3}$$

Взяв в первом случае все знаки произведений положительными и повторив ту же операцию, вновь получают сумму произведений, равную нулю.

Нейштадт, по сообщению Шилло (РЖМат, 1958, 4422), называя последовательности (1), (3) арифметическими прогрессиями, последовательность (2) базисом, а последовательности, получаемые в результате описанного умножения данной последовательности на базис, производными данной последовательности, утверждал, что „для любой арифметической прогрессии все производные прогрессии любых порядков имеют при базисе (2) сумму, равную нулю." Автор приводит примеры, опровергающие утверждения Нейштадта, и, уточняя его, показывает числа производных с суммой, равной нулю, для конечных последовательностей различных видов. Примечание референта. В статье употребляется непринятая терминология, имеются неточности. И. П. Макаров

1614. О параболических областях сходимости для цепных дробей. Трон (On parabolic convergence regions for continued fractions. Thron W. J.), Math. Z., 1958, **69**, № 2, 173—182 (англ.)

Работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе приводится перечень различных „параболических теорем", т. е. признаков сходимости цепной дроби

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1}+\cdots, \tag{1}$$

основанных на предположении, что все a_n находятся в области, лежащей в плоскости комплексного переменного z и ограниченной некоторой параболой, имеющей фокус в нулевой точке и проходящей через точку $z=-1/4$. Автор пользуется записью $a_n\in P_\alpha$, которая обозначает, что

$$|a_n|-\mathrm{Re}\,(a_ne^{-2i\alpha})\leqslant\frac{1}{2}\cos^2\alpha,$$

или

$$a_n=e^{2i\alpha}k_ng_n(1-g_{n+1})\cos^2\alpha\,(u_n+iv_n), \tag{2}$$
$$v_n^2\leqslant 4u_n+4,\quad 0<k_n\leqslant 1.$$

Наиболее сильной из ранее доказанных „параболических теорем" автор считает следующую, полученную им же (Thron W. J., Duke Math. J., 1943, **10**, 677—685). Если $a_n\in P_\alpha$ для всех $n\geqslant 1$ и по крайней мере один из рядов

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_2a_4\ldots a_{2\nu}}{a_3a_5\ldots a_{2\nu+1}},\qquad \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{a_3a_5\ldots a_{2\nu-1}}{a_4a_6\ldots a_{2\nu}}$$

расходится, то дробь (1) сходится. Второй параграф посвящен доказательству трех лемм, необходимых для доказательства главной теоремы. Эта теорема доказывается в третьем параграфе и состоит в получении неравенства

$$R_n\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|a_1|}{2(1-g_2)\cos\alpha\prod_{\nu=2}^{n}\left[1+\dfrac{(1-k_\nu+d_{\nu-1})\cos^2\alpha g_\nu(1-g_{\nu+1})}{|a_\nu|}\right]},$$

где R_n — половина абсолютного значения разности между n-й подходящей дробью цепной дроби (1) и значением последней, а

$$d_{\nu-1}=\frac{\sum_{k=0}^{\nu-1}\prod_{\mu=1}^{k}\left(\dfrac{1}{g_{\mu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{\nu-2}\prod_{\mu=1}^{k}\left(\dfrac{1}{g_{\mu+1}}-1\right)}-1.$$

Придавая различное значение параметрам, входящим в соотношение (2), автор получает четыре теоремы (A, B, C, D), являющиеся частными случаями главной теоремы. Приведем для примера теорему A. Пусть $-\pi/2<\alpha<\pi/2$, M и ε — положительные постоянные, $\varepsilon<1/2$. Цепная дробь (1), все члены звеньев которой удовлетворяют соотношению (2), сходится, если выполняется совокупность трех условий: 1) $|a_\nu|<M$; 2) $\varepsilon<g_n<1-\varepsilon$; 3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\dfrac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)$ расходится. А. Н. Хованский

1615. Заметка об одном q-тождестве. Аль-Салам (Note on a q-identity. Al-Salam W. A.), Math. scand., 1957, **5**, № 2, 202—204 (англ.)

Если ввести обозначения

$$(a)_s=(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{s-1}),\quad (a)_0=1,$$
$$\begin{bmatrix}n\\ s\end{bmatrix}=\frac{(q)_n}{(q)_s(q)_{n-s}},\quad [n]!=(q)_n,$$

то имеют место тождества

$$\sum_{s=0}^{2m}(-1)^s\binom{2m}{s}\binom{2n}{n-m+s}\binom{2p}{p-m+s}=$$
$$=(-1)^m\frac{(m+n+p)!\,(2m)!\,(2n)!\,(2p)!}{(m+n)!\,(m+p)!\,(n+p)!\,m!\,n!\,p!};$$

$$\sum_{s=0}^{2m}(-1)^s\begin{bmatrix}2m\\ s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2n\\ n-m+s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2p\\ p-m+s\end{bmatrix}\times$$
$$\times q^{\frac{1}{2}\left\{3(s-m)^2+(s-m)\right\}}=$$
$$=(-1)^m\frac{[m+n+p]!\,[2m]!\,[2n]!\,[2p]!}{[m+n]!\,[m+p]!\,[n+p]!\,[m]!\,[n]!\,[p]!};$$

а также более общая формула

$$\sum_{=0}^{2m}(-1)^s\begin{bmatrix}2m\\ s\end{bmatrix}(a)_s(b)_s(c)_s(d)_s(a)_{2m-s}(b)_{2m-s}(c)_{2m-s}\times$$
$$\times(d)_{2m-s}\,q^{3/2s(6m-3s+1)}=(-1)^m(a)_m(b)_m(c)_m(d)_m\times$$
$$\times(q^{m+1})_m(abq^m)_m(bcq^m)_m(acq^m)_m d^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)},\qquad(1)$$

где $abcd=q^{1-3n}$.

Доказывается, что из формулы (1) следует:

$$\sum_{s=0}^{2m}(-1)^s\begin{bmatrix}2m\\ s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2p_1\\ p_1-m+s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2p_2\\ p_2-m+s\end{bmatrix}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}2p_3\\ p_3-m+s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p+s\\ s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p+2m\\ s\end{bmatrix}^{-1}q^{\frac{1}{2}s(3s-6m+1)}=$$
$$=(-1)^m\frac{[2p_1]!\,[2p_2]!\,[2p_3]!\,[m+p]!\,(q^{m+1})_m\,(q^{p+1})^m}{[m+p_1]!\,[m+p_2]!\,[m+p_3]!\,[p+2m]!\,[p_1]!\,[p_2]!\,[p_3]!}\times$$
$$\times\frac{[m+p_1+p_2]!\,[m+p_1+p_3]!\,[m+p_2+p_3]!}{[p_1+p_2]!\,[p_1+p_3]!\,[p_2+p_3]!}\times$$
$$\times q^{-\frac{1}{2}m(2p+3m+1)},$$

где $p=p_1+p_2+p_3$.

При $p_1=p_2=p_3=m$ получаем

$$\sum_{s=0}^{2m}(-1)^s\begin{bmatrix}2m\\ s\end{bmatrix}^4\begin{bmatrix}3m+s\\ s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5m\\ s\end{bmatrix}^{-1}q^{\frac{1}{2}s(3s-6m+1)}=$$
$$=(-1)^m\begin{bmatrix}3m\\ m\end{bmatrix}^3\frac{[4m]!\,(q^{m+1})_m\,(q^{p+1})^m}{[5m]!}q^{-\frac{1}{2}m(9m+1)}$$

Переходя к пределу при $q\to 1$, находим

$$\sum_{s=0}^{2m}(-1)^s\binom{2m}{s}^4\binom{3m+s}{s}\binom{5m}{s}^{-1}=$$
$$=(-1)^m\binom{3m}{m}^3\frac{(4m)!\,(2m)!}{(5m)!\,m!}.$$

Ю. Л. Рабинович

1616. Элементарные замечания. Миранда-Серрано (Notas elementales. Miranda Serràno Rafael), Gac. mat., 1958, **10**, № 1-2, 26—29 (исп.)

Получение общего члена в разложении в ряд Фибоначчи; вычисление интеграла

$$f(x)=\frac{2b}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega\,a\cos\omega\,x}{\omega}\,d\omega$$

при некоторых значениях x; о парадоксе Ричарда; о функции $\delta(x)$ Дирака. В. В. Немыцкий

1617. Производная отношения двух функций. Хут (Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen. Huth Erwin), Math. und Phys. Schule, 1958, **5**, № 5, 283—284 (нем.)

1618. Правило Лопиталя для комплекснозначных функций. Картер (L'Hospital's rule for complex-valued functions. Carter D. S.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 264—266 (англ.)

1619. Методологическое замечание о второй теореме о среднем. Белецкий (Remarque méthodologique sur le second théoreme de la moyenne. Bielecki Adam, Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, 1956 (1958), **A10**, 77—80 (франц.; рез. русск., польск.)

1620. Интегрирование с помощью обратной матрицы. Суорц (Integration by matrix inversion. Swartz William), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 282—283 (англ.)

1621. Неравенства для выпуклых функций. Андерсон (An inequality for convex functions. Andersson Bengt Joel), Nord. mat. tidskr., 1958, **6**, № 1, 25—26 (англ.)

Теорема. Если $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ — выпуклые функции, определенные при $0\leqslant x\leqslant 1$, для которых $F_p(x)\geqslant 0$, $F_p(0)=0$, $p=1,2,\ldots,n$, $\int_0^1 F_p(x)dx=a_p$, то тогда

$$\int_0^1 F_1(x)F_2(x)\ldots F_n(x)\,dx\geqslant\frac{2^n}{n+1}a_1a_2\ldots a_n.$$

И. И. Огиевецкий

1622. Приложение гауссовой мультипликативной теоремы. Кламкин (An application of the Gauss multiplication theorem. Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 9, 661—663 (англ.)

Применяя формулу утроения

$$\Gamma(s)\Gamma(s+1/3)\Gamma(s+2/3)=(2\pi)3^{1/2-3s}\Gamma(3s)$$

и используя то, что преобразования Меллина функций $F_1(x)=e^{-x}$, $F_2(x)=x^{1/3}e^{-x}$, $F_3(x)=x^{2/3}e^{-x}$ соответственно равны $\Gamma(s)$, $\Gamma(s+1/3)$, $\Gamma(s+2/3)$, последовательным свертыванием указанных функций автор получает формулы

$$\int_0^\infty e^{-x/u}K_{1/3}(2\sqrt{u})\,u^{-3/2}\,du=(\pi/\sqrt{3})x^{-2/3}e^{-3x^{1/3}},$$
$$\int_0^\infty e^{-x/u}K_{2/3}(2\sqrt{u})u^{-1}\,du=(\pi/\sqrt{3})x^{-1/3}e^{-3x^{1/3}},$$
$$\int_0^\infty e^{-x/u}K_{1/3}(2\sqrt{u})u^{-1/2}\,du=(\pi/\sqrt{3})\,e^{-3x^{1/3}}.$$

Применяя мультипликативную теорему Гаусса

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(s+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-ns}\Gamma(ns)$$

для $n=4$, дается вывод формул

$$\int_0^\infty K_{1/4}(2\sqrt{x/u})K_{1/4}(2\sqrt{u})\,u^{-1/2}\,du=\frac{1}{8}x^{-1/3}(2\pi)^{3/2}e^{-4x^{1/4}},$$
$$\int_0^\infty K_{3/4}(2\sqrt{x/u})K_{1/4}(2\sqrt{u})\,u^{-1}\,du=\frac{1}{8}x^{-3/3}(2\pi)^{3/2}e^{-4x^{1/4}},$$

$$\int_0^\infty K_{1/3}(2\sqrt{x/u})K_{1/2}(2\sqrt{u})\,u^{-3/4}\,du = \frac{1}{8}\,x^{-1/4}(2\pi)^{3/2}e^{-4x^{1/4}}.$$

Л. Я. Цлаф

1623. Об одном сингулярном интеграле, встречающемся в теории суммирования кратного интеграла Фурье. Смолицкий Х. Л., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 125—130 (рез. англ.)

Положим $H(R, t) = R(Rt)^{-1/2}J_{N-1/2}(Rt)$; $J_{N-1/2}(z)$ — функция Бесселя порядка $N-1/2$. В заметке показывается, что существуют непрерывные $f(t)$ такие, что $\int_0^\infty f(t)H(R, t)\,dt$ неограниченно возрастает при $R\to\infty$.

И. И. Огиевецкий

1624. Поведение волнового пакета во времени. Хопф (The temporal behaviour of a wave packet. Hopf Eberhard), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 477—480 (англ.)

Рассматриваются интегралы вида

$$F(x, t) = \int f(\alpha)\exp\left\{i\left[\alpha x + tg(\alpha)\right]\right\}d\alpha,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, причем t, α_k, x_k и $g(\alpha)$ вещественны, $\alpha x = \Sigma\alpha_k x_k$, $d\alpha = d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$ и интегрирование распространяется на все α-пространство S.

Теорема. Пусть $f(\alpha)$ суммируема на S и $S = A + B + C$, причем всюду на A будет $f(\alpha) = 0$, $mB = 0$, C есть открытое множество, на котором $g(\alpha)\in C''$ и

$$\sum_{\nu,\mu}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha_\nu\,\partial\alpha_\mu}\right| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_x |F(x, t)|\right] = 0. \qquad (1)$$

Следствие. Пусть $f(\alpha)$ суммируема, а $g(\alpha)$ — аналитическая на S. Тогда либо имеет место (1), либо же

$$F = F(x - ct)\exp(iat),$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n)$, c_k и a вещественны.

Заглавие работы объясняется некоторой физической интерпретацией результатов. И. П. Натансон

1625. Некоторые соотношения, включающие в себя коэффициенты, используемые в некоторых типах линейных сумм. Тримбл (Some relations involving coefficients used in certain types of linear sums. Trimble George R., Jr. Ballistic Res. Lab., Aberdeen Proving Ground, Md., Techn., Note, 1954, № 899, 13 pp.) (англ.)

Рассматривается линейная комбинация $N = 2n + p + 1$ наблюденных величин

$$U = \sum_{i=-n}^{n+p} c_i u_i,$$

где $p = 0$ или 2 для нечетного N и $p = 1$ для четного N, а c_i симметричны. Рассматриваются четыре случая: 1) N четно и $c_{i+1} = c_{-i}$; 2) N нечетно ($p = 0$) и $c_i = c_{-i}$ (c_0 не имеет пары); 3) N четно и $c_{i+1} = -c_{-i}$; 4) N нечетно ($p = 2$) и $c_{i+2} = -c_{-i}$ (c_1 не имеет пары). U может быть также записано в терминах центральных разностей

$$U = \sum_{j=0}^{n} d_j\,(\Delta^{2j}u_{-j} + \Delta^{2j}u_{-j+1}).$$

Выводятся формулы для отыскания d через c и наоборот для каждого из четырех случаев. R. L. Anderson

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 629.

1626. К. Таблицы интегралов. 1-я часть. Неопределенные интегралы. 2-я часть. Определенные интегралы. 2-е испр. изд. Грёбнер, Хофрейтер (Integraltafel. 1. Teil. Unbestimmte Integrale. 2. Teil. Bestimmte Integrale. 2. verb. Aufl. Hrsg. Gröbner Wolfgang, Hofreiter Nikolaus. Wien—Innsbruck, Springer, 1957, VIII, 166 S.; 1958, VI, 204 S.) (нем.)

Приведены значения неопределенных (часть 1) и определенных (часть 2) интегралов от рациональных функций, ортогональных полиномов (Лежандра, Якоби, Чебышова, присоединенных функций Лежандра, Лагерра, Эрмита), алгебраических иррациональностей, трансцендентных функций (например, вида $R(x, e^{\lambda x})$, $R(x, e^{f(x)})$, $f(x, \sin ax, \cos bx)$, $F\left(x, e^{f(x)}, \sin g(x), \cos h(x)\right)$, $F(x,$ $\operatorname{Arc}\sin x, \operatorname{Arc}\cos x)$. Даются формулы для ортогональных полиномов (перечисленных выше), эйлеровых интегралов и цилиндрических функций, а также значения определенных интегралов от этих функций и их комбинаций и от произведения двучленных степенных выражений с произвольными показателями. В. К. Захаров

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1627. Моменты неотрицательной массы. Рогозинский (Moments of non-negative mass. Rogosinski W. W.), Proc. Roy. Soc., 1958, **A245**, № 1240, 1—27 (англ.)

Последовательность $\{a_k(t)\}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) действительных функций действительного переменного t определена в интервале I (возможно, неограниченном), который может быть закрытым, открытым или полуоткрытым. Соответствующая проблема моментов заключается в определении E-множества действительных последовательностей $\{c_k\}$, для которых уравнения $\int_I a_k(t)\,d\mu(t) = c_k$ имеют в качестве решения неубывающую функцию $\mu(t)$. Ассоциированная „приведенная" проблема моментов ($1 \leqslant k \leqslant n$) полностью решается без каких-либо ограничений для $a_k(t)$. Полная проблема решается при соответствующих ограничениях на $a_k(t)$ и „геометрическая" теория, развитая в этой статье, содержит и обобщает классическую теорию моментов. В частности, она дает возможность рассмотреть, как частный случай, систему линейных уравнений с бесконечным числом неотрицательных неизвестных.

Резюме автора

1628. Об одном классе последовательностей. Кравцовская Е. С., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 79—85

Для неубывающих последовательностей $\{u_n\}$ положительных чисел, обладающих пределом $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{2n}}{u_n} = c$, доказано, что при $c > 1$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{c^2} \leqslant \underline{\lim}\left\{nu_n/\sum_{k=1}^{n}u_k\right\} \leqslant \overline{\lim}\left\{nu_n/\sum_{k=1}^{n}u_k\right\} \leqslant c^2\left[1+2\left(c-\frac{1}{c}\right)\right],$$

а при $c = 1$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\left\{nu_n/\sum_{k=1}^{n}u_k\right\}$, равный единице.

Примечание референта. Доказательство леммы 2 проведено не строго, например: не сделано пред-

положения $2^k \leqslant n-1$, не дано обоснования неравенства

$$\frac{1}{c} - \varepsilon \leqslant \frac{f(2^k)}{f(n)}.$$

И. П. Макаров

1629. Об одной проблеме из теории рядов. Сюс (Über ein Problem der Reihenlehre. Szüsz P.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1958, 3, № 1, 35—41 (нем.; рез. болг., русск.)

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Автор решает следующий вопрос: при каких дополнительных предположениях, касающихся a_n, из каждой перестановки $a_1', a_2', \ldots$ чисел $a_1, a_2, \ldots$ можно извлечь последовательность $a'_{\varphi(1)}, a'_{\varphi(2)}, \ldots$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(a'_{\varphi(n)}, a'_{\varphi(n+1)}\right) = \infty.$$

Он устанавливает, что это дополнительное условие состоит в неравенстве $\overline{\lim}_{n\to\infty} n a_n > 0$. Резюме автора

1630. О некоторых вопросах теории сходимости знакоположительных рядов. Зморович В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 60—79

Доказывается необходимость известного (достаточного) признака В. П. Ермакова для сходимости и расходимости несобственных интегралов первого рода от знакоположительной функции, и как следствие, необходимость его в качестве аналогичного признака для всех знакоположительных рядов при условии интерполирования их функциями некоторого определенного класса.

Доказывается, что ни один конкретный вариант этого признака не является „универсальным". Доказывается несостоятельность „начала сопряженных рядов" Н.В. Бугаева в его общей форме. Высказываются, без доказательства, некоторые соображения об отсутствии свойства необходимости признаков Б. Я. Букреева и А. Прингсгейма. И. П. Макаров

1631. Представление некоторых тригонометрических рядов, имеющих приложение в теории длинных линий, в замкнутом виде. Заездный А. М., Изв. высш. учебн. заведений. Радиотехника, 1958, № 2, 236—258

Исходя из известных формул для сумм рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-rn}\cos nx}{n} \quad \text{и т. п.},$$

автор находит суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha \frac{\cos nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha \frac{e^{-rn}\cos nx}{n} \quad \text{и т. п.}$$

Вся работа в основном состоит из списка приводимых формул, которые, как утверждает автор, часто встречаются при некоторых практических расчетах.

Примечание референта. Что касается предложенного автором метода получения новых сумм рядов, то он является элементарным. См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3, Гостехиздат, 1949, стр. 621—624. П. Л. Ульянов

1632. Замечание о знакопеременном ряде Таннери. Лейпник (Note on alternating Tannery series. Leipnik R. B.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 3, 197—198 (англ.)

Рассматривая $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q_n} a_{k,n}$ (ряд Таннери), автор доказывает теорему: Если $\{q_n\}$ есть последовательность целых чисел и $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$; $\{f_{k,n}\}$ есть неотрицательная двойная последовательность такая, что для некоторого n_0 $f_{k,n} \geqslant f_{k,n+1}$, где $1 \leqslant k \leqslant q_n$ и $n > n_0$; $\lim_{n\to\infty} f_{k,n} = f_k$ конечен для всех k; $\lim_{k\to\infty} f_k = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q_n} (-1)^{k-1} f_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} f_k \quad \text{И. П. Макаров}$$

1633. Замечание об одном старом неравенстве. Тидеман (Kommentar till en gammal olikhet. Tideman M.), Nord. mat. tidskr., 1958, 6, № 1, 27—28, 56 (шведск.; рез. англ.)

Показывается, что $\sum_{n=1}^{\infty} ktn^{2k-1}(n^2+t)^{-k-1} < \frac{1}{2}$ для $t \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$. При $k = 1$, $t = x^2$ получается неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+x^2)^{-2} < 1/2x^2$, данное Матьё для $x \neq 0$. Резюме автора

1634. О парах методов суммирования. Лоренц Целлер (Über Paare von Limitierungsverfahren. Lorentz G. G., Zeller K.), Math. Z., 1958, 68, № 5, 428—438 (нем.)

Если каждая последовательность (ограниченная последовательность), суммируемая матрицей A, суммируется матрицей B, то будем писать $B \supset A$ ($B_0 \supset A_0$). Если ни одна последовательность (ограниченная последовательность) не суммируется матрицами A и B к неравным пределам, то будем писать $A \sim B$ ($A_0 \sim B_0$). А. Л. Брудно показал, что существуют матрицы Тёплица A и B, $A_0 \sim B_0$, для которых нет матрицы Тёплица C, удовлетворяющей условию: $C_0 \supset A_0$, $C_0 \supset B_0$ (реф. 1638; работа поступила в редакцию 22. XI. 1956 г.). Такой же результат, но для положительных матриц Тёплица A, B, C был установлен Питерсеном (РЖМат, 1957, 6448). Данная работа расширяет указанные результаты. В ней, в частности, установлено следующее (теоремы 1 и 4): Существуют матрицы Тёплица A и B, $A \sim B$, для которых нет матрицы Тёплица C, удовлетворяющей условию: $C \supset A$, $C \supset B$. Но, если матрицы Тёплица A и B такие, что $A \sim B$, то существует такая матрица Тёплица C, что $C_0 \sim A_0$, $C_0 \sim B_0$ и $C_0 \supset A_0$, $C_0 \supset B_0$. В. М. Даревский

1635. О некоторых методах суммирования типа Бореля. Влодарский (Sur les méthodes continues de limitation du type de Borel. Wlodarski L.), Ann. polon. math., 1958, 4, № 2, 137—164 (франц.)

Основные результаты работы формулированы без доказательств в другой заметке (РЖМат, 1957, 2454). Настоящая работа содержит доказательства упомянутых выше результатов, а также некоторые другие результаты того же рода. И. И. Огиевецкий

1636. О некоторых классах методов суммирования расходящихся рядов. Соколин А. С., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 1, 193—200

Изучаются специальные методы суммирования числовых рядов. Для методов суммирования IV (n, q) и III $n, q)$ (получены, например, следующие результаты: Если

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{IV}(n, q) = s, \quad \mathrm{IV}(n, q) = \sum_{\nu=0}^{qn} \frac{C^{n+\nu}_{(q+1)n}}{C^{n}_{(q+1)n}} \frac{1}{q^{\nu}} a_{\nu},$$

то ряд $\sum a_{\nu}$ суммируется методом (IV, q) к s.

Если

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{III}(n, q) = s,\ \mathrm{III}(n, q) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{C^{n-\nu}_{(q+1)n}}{C^{n}_{(q+1)n}}\, q^{\nu} a_{\nu},$$

то ряд Σa_ν суммируется методом (III, q) к s.

Показывается, что:

1) методы (III, q) и (IV, q) регулярны;

2) ряд, суммируемый (E, q), [(E, $1/q$)], суммируем (IV, q) [(III, q)] к тому же значению;

3) метод (IV, q) [(III, q)] сильнее метода (E, q) [(E, $1/q$)]; (E, q) — метод суммирования Эйлера q-го порядка;

4) методы суммирования Валле — Пуссена и (E, 1) совместны. И. И. Огиевецкий

1637. Заметка о теоремах включения для бесконечных матриц. Расселл (Note on inclusion theorems for infinite matrices. Russell D. C.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 50—62 (англ.)

Для матричных методов суммирования A и B, при различного рода ограничениях, устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы из суммируемости какой-либо последовательности методом A следовала бы ее суммируемость методом B. В качестве приложения общих результатов рассматриваются два частных случая (теоремы 3 и 4):

1) $A = (W, r_n)$ — метод Вороного (автор называет его методом Нёрлунда), у которого $r_n > 0$, $r_n/r_{n-1} \leqslant r_{n+1}/r_n \leqslant 1$; B—произвольный матричный метод, суммирующий все сходящиеся последовательности;

2) A — произвольный метод Вороного, B — метод, определяемый произвольной конечностроч ной матрицей. В. М. Даревский

1638. Пример двух матриц Тёплица, ограниченно не противоречивых и ограниченно не покрываемых. Брудно А. Л., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, **22**, № 2, 309—320

Пусть A и B — ограниченно не противоречивые матрицы Тёплица, т. е. такие регулярные матрицы, что ни одна ограниченная последовательность не суммируема матрицами A и B к неравным пределам. Возникает вопрос: существует ли матрица Тёплица C, которая суммирует все последовательности, суммируемые матрицей A или B? Изучая некоторые линейные многообразия конечномерного линейного пространства, автор строит такие матрицы Тёплица A и B, при которых ответ на поставленный вопрос будет отрицательным. Случай, когда A, B, C — положительные матрицы Тёплица, рассматривал Питерсен (РЖМат, 1957, 6448).

Г. Ф. Кангро

1639. Упрощенные доказательства «Некоторых тауберовых теорем» Якимовского. Добавления и исправления. Раджагопал (Simplified proofs of «Some Tauberian theorems» of Jakimovski: Addendum and corrigendum. Rajagopal C. T.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 4, 1727 (англ.)

Даются исправления и добавления к статье автора (РЖМат, 1958, 4804), о которых было указано в примечании к упомянутому выше реферату.

В. К. Захаров

1640. Обобщение тауберовой теоремы. Кью, Питерсен (A generalized Tauberian theorem. Keogh F. R., Petersen G. M.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 111—114 (англ.)

Пусть $\{s(n)\}$ — последовательность действительных чисел и $\{s(n,x)\}$ — ее подпоследовательность, определяемая двоичным разложением числа x, $0 < x \leqslant 1$. Рассматривается матричное регулярное преобразование

$$t(m, x) = \sum a_{mn}\, s(n,x).$$

Доказывается теорема: Если

$$\limsup t(m, x) - \liminf t(m, x) < \varepsilon$$

на множестве второй категории, тогда

$$\limsup s(n) - \liminf s(n) < \varepsilon.$$

Заметка является развитием идеи, которая была формулирована Баком (Buck R. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, 898—899). М. П. Щеглов

1641. Некоторые тауберовы теоремы винеровского типа для функции двух переменных. Огиевецкий И. И., Чехосл. матем. ж., 1958, **8**, № 1, 76—85 (рез. англ.)

Винер доказал следующую теорему: Если 1) $g(x) \in L(-\infty, \infty)$ и ее преобразование Фурье

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{itu}\, du$$

не обращается в нуль ни для какого t, 2) $h(x) \in L(-\infty, \infty)$, 3) $f(x)$ ограничена на $(-\infty, \infty)$, то из того, что

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t) f(t)\, dt = l \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt,$$

следует

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) f(t)\, dt = l \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt.$$

Эта теорема и примыкающие к ней теоремы 220 и 232 (Харди Г., Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951) обобщаются на случай функций двух переменных. В качестве ядер h и g рассматриваются функции $h(x,y) = h_1(x) \cdot h_2(y)$, $g(x,y) = g_1(x) \cdot g_2(y)$, где h_1, h_2, g_1, g_2 удовлетворяют условиям 1) и 2). М. Ф. Тиман

1642. Риманово-чезаровские методы суммирования. II. Хирокава (Riemann—Cesaro methods of summability. II. Hirokawa Hiroshi), Tôhoku Math. J., 1957, **9**, № 1, 13—26 (англ.)

Доказывается ряд теорем тауберова типа для римано-во-чезаровских методов суммирования. Работа является продолжением исследований автора (РЖМат, 1957, 4120).

Характерный результат:

Теорема 3. Пусть p — положительное целое число и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

— ряд, для которого

$$S_n^{p-1} = o(n^{p-1} \log^{-1-\delta} n). \qquad (2)$$

Тогда ряд (1) суммируем методом (R, p, α) при $-1 \leqslant \alpha < p-1$ или $\alpha = 0$, $p = 1$, где $\delta > 0$ и

$$S_n^{\beta} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta} a_k \quad \text{с} \quad A_m^{\beta} = \frac{(\beta+1)\ldots(\beta+m)}{m!}$$

Автор отмечает, что условие (2) можно несколько ослабить. Именно, заменить условием: $S_n^{p-1} = o(n^{p-1}\lambda_n)$, $\lambda_n > 0$ и $\sum \lambda_n/n$ сходится. П. Л. Ульянов

1643. Об одном обобщении теоремы Кноппа. Топурия С. Б., Сакартвелос ССР, Мецниереба Академиис моамбе, 1957, **19**, № 4, 385—392 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **19**, № 4, 385—392

Доказывается несколько теорем тауберова характера, обобщающих некоторые из результатов работы Кноппа (Knopp K., Math Z., 1939, **45**, 573—589).

Приведем следующий результат: Если

$$\sup_{\substack{1\leqslant m<\infty\\ 1\leqslant r<m}}\sum_{i=r}^{m} a_{i,n}<c/n,\qquad \sup_{\substack{1\leqslant n<\infty\\ 1\leqslant k\leqslant n}}\sum_{k=s}^{n} a_{m,k}<c/m,$$

$$s_{mn}=\sum_{i=1,\,j=1}^{m,n} a_{ij},\quad \sigma_{mn}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1,\,j=1}^{m,n} s_{ij},\quad \sum a_{ij}$$

— двойной ряд, то из

$$\lim_{(m,n)\to\infty}\sigma_{mn}=s \text{ следует } \lim_{(m,n)\to\infty} s_{mn}=s.$$

И. И. Огиевецкий

1644 Д. Чезаровское суммирование ортогональных полиномиальных рядов. Тандори (Ortogonális polinomsorok Cesáro-szummációja. Kand. diss. téz. Tándori Károly. Akad. ny., 1953, 10 l.) (венг.)

1645 Д. Тауберовы теоремы с остаточным членом. Фрейд (Tauber—típusú tételek maradéktaggal. Kand. diss. téz. Freud Géza. Akad. ny., 1953, 8 l.) (венг.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1646. Выражение гамма-функции, данное Ван-дер-Полем. Нанджундиа (Van der Pol's expressions for the gamma function. Nanjundiah T. S.), Proc. Amer. Math., Soc., 1958, **9**, № 2, 305—307 (англ.)

1647. Об интегральных соотношениях, содержащих произведения сфероидальных функций. Чако (On integral relations involving products of spheroidal functions. Chako Nicholas), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 1, 62—73 (англ.)

В основу работы положена следующая теорема, доказанная в книге Мейкснера и Шефке (РЖМат, 1956, 2321, § 1. 133).

Разделим в трехмерном волновом уравнении

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+k^2u+0\quad (k=\text{const}) \tag{1}$$

переменные в сфероидальных координатах (ξ, η, φ), полагая $x=c\rho\cos\varphi$, $y=c\rho\sin\varphi$, $z=c\xi\eta$, $\rho=\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$, $u(x,y,z)=U(\xi)V(\eta)W(\varphi)$.

Тогда получим

$$[(1-\xi^2)U_\xi]_\xi+\left[\lambda-\frac{\mu^2}{1-\xi^2}+\gamma^2(1-\xi^2)\right]U=0, \tag{2}$$

$$[(1-\eta^2)V_\eta]_\eta+\left[\lambda-\frac{\mu^2}{1-\eta^2}+\gamma^2(1-\eta^2)\right]V=0 \tag{3}$$

$$W_{\varphi\varphi}+\mu^2W=0. \tag{4}$$

Здесь $\gamma^2=c^2k^2$, а λ и μ — произвольные параметры. Пусть далее Γ — некоторый путь в комплексной η-плоскости, D — область в ξ-плоскости, а $u_2(\eta)$ и $u_3(\varphi)$ — интегралы уравнений (2) и (3) соответственно. Обозначим через $u(\xi,\eta,\varphi)=G(\xi,\eta)\,u_3(\varphi)$ решение уравнения (1), регулярное относительно $\xi\in D$ и $\eta\in\Gamma$, полагая при этом, что выражение

$$(1-\eta^2)\left[\frac{\partial G(\xi,\eta)}{\partial\eta}u_2(\eta)-G(\xi,\eta)\frac{\partial u_2(\eta)}{\partial\eta}\right]$$

принимает одинаковые значения на обоих концах пути интегрирования Γ. При этих условиях функция

$$u_1(\xi)=\int_\Gamma G(\xi,\eta)\,u_2(\eta)\,d\eta \tag{5}$$

будет решением уравнения (2) в области D.

Следуя Мейкснеру и Шефке, которые применяли подобный метод к функциям Матье, автор использует в формуле (5) ядра вида

$$G_r(\xi,\eta)=e^{-i\mu_r\varphi}\,F_r[u(\xi,\eta,\varphi)]\ (r=1,2,3).$$

Здесь $\mu_1=\mu$, $\mu_2=\mu_3=\mu\pm1$,

$$u(\xi,\eta,\varphi)=S_\nu^{\mu(j)}(\xi)\sum\nolimits_\nu^\mu(\eta)e^{i\mu\varphi}\quad (j=1,2,3,4),$$

$S_\nu^{\mu(j)}(\eta)$ и $\sum_\nu^\mu(\eta)$ = решения уравнений (2) и (3), а

F_r — операторы, определенные формулами

$$F_1=\frac{\partial}{\partial z},\ F_2=\frac{\partial}{\partial x}\pm i\frac{\partial}{\partial y},$$

$$F_3=\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\pm i\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Таким путем получается ряд общих интегральных соотношений, содержащих произведения сфероидальных функций.

Эти соотношения изучаются подробно в частных случаях, когда параметры μ, ν или их разность $\nu-\mu=p$ принимают целые значения и $\sum_\nu^\mu(\eta)=ps_\nu^\mu(\eta;\gamma^2)$, а также в случаях замены решений $\sum_\nu^\mu(\eta)$ функциями $S_\nu^{\mu(j)}(\eta,\gamma)$. (Об определении сфероидальных функций $pS_\nu^\mu(\eta;\gamma^2)$ и $S_\nu^{\mu(j)}(\eta,\gamma)$ см. РЖМат, 1956, 2321, § 3. 61. стр. 283 и § 3. 64, стр. 289). Отдельно рассматривается предельный случай $\gamma=0$, в котором сфероидальные функции вырождаются в функции Лежандра и Бесселя.

М. Б. Капилевич

1648. Сингулярные интегральные операторы и дифференциальные уравнения. Кальдерон, Зигмунд (Singular integral operators and differential equations. Calderón A. P., Zygmund A.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 4, 901—921 (англ.)

Для нормированных по позерхности единичной сферы k-мерных сферических функций $Y_n(x')$ порядка n устанавливаются оценки

$$|Y_n(x')|\leqslant Cn^{\frac{1}{2}(k-2)}, \tag{1}$$

$$|D_rY_n(x')|\leqslant Cn^{\frac{1}{2}(k-2)+r} \tag{2}$$

Здесь x' — точка единичной сферы, D_r — любая производная порядка r по декартовым координатам точки x, C — постоянная.

Вводятся операторы

$$R_m(f) = -i\pi^{-\frac{1}{2}(k+1)}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\int_{E_k}\frac{x_m - y_m}{|x-y|^{k+1}}f(y)\,dy,$$

где E_k — евклидово пространство k измерений и интеграл понимается в смысле его главного значения; доказывается, что эти операторы ограничены в $L^p(E_k)$, если p — любое число из интервала $1 < p < \infty$; они удовлетворяют соотношению $\sum_1^k R_m^2 = I$ и самосопряжены в том смысле, что если $f \in L^p$, $g \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$, то $(R_m f, g) = (f, R_m g)$.

Для всякой функции $f(x) \in L_r^p(E_k)$, $r \geqslant 2$, справедлива формула $\Delta f = -\Lambda^2 f$, где

$$\Lambda f = i\sum_1^k R_m\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) = i\sum_1^k \frac{\partial}{\partial x_m}R_m(f).$$

Вводится класс C_β^∞ функций $F(x, z)$ двух точек x и z пространства E_k: $F(x, z) \in C_\beta^\infty$, если при $|z| > 0$ функция F бесконечно дифференцируема по координатам точки z и $[\beta]$ раз дифференцируема по координатам точки x, причем производные, содержащие $[\beta]$-кратное дифференцирование по координатам x, удовлетворяют относительно этой точки условию Гёльдера с показателем $\beta - [\beta]$. Основной результат статьи: Если характеристика сингулярного интегрального оператора принадлежит классу C_β^∞, то этому же классу принадлежит и символ оператора; наоборот, всякую функцию из класса C_β^∞ можно рассматривать как символ сингулярного интеграла, характеристика которого принадлежит тому же классу.

Примечание референта. Авторы отмечают, что некоторые результаты реферируемой статьи сходны с соответствующими результатами Трикоми, Жиро и референта. Уточним несколько это утверждение. Референту принадлежит оценка (1) для сферических функций, а также утверждение теоремы 4 реферируемой статьи о символах сопряженных сингулярных операторов. Утверждение той же теоремы 4 о символе композиции сингулярных операторов было получено референтом для 2 и Жиро для 2. По поводу сказанного см. С. Г. Михлин. Успехи матем. наук, 1948, 3, № 3. С. Г. Михлин

1649. Некоторые свойства класса обобщенных присоединенных функций Лежандра. Кёйперс, Мёленбелд (Some properties of a class of generalized Legendre's associated functions. Kuipers L., Meulenbeld B.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 2, 186—196; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 186—196 (англ.)

Исследуются, главным образом, различные формы второго частного решения $Q_k^{m,n}(z)$ дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right\}w = 0 \qquad (1)$$

в виде интегралов или рядов.

Так, в н. 3 дается интегральное представление функции $Q_k^{m,n}(z)$ в случае, когда вещественная часть одного из чисел $k - \frac{m-n}{2} + 1$ или $k + \frac{m-n}{2} + 1$ оказывается положительной. В этом случае дается решение в форме интеграла

$$Q_k^{m,n}(z) = \frac{e^{\pi i m}}{2^{k+(m-n)/2+1}}\,\frac{\Gamma\left(k + \frac{m+n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)} \times$$

$$\times\,(z-1)^{m/2}(z+1)^{n/2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t)^{k-(m-n)/2}(1+t)^{k+\frac{m-n}{2}}}{(z-t)^{k+(m+n)/2+1}}\,dt$$

при условии, что аргументы чисел $1-t$ и $1+t$ равны нулю, а аргумент числа $z-t$ лежит между $-\pi$ и π.

Затем в н. 4 дается новая форма решения уравнения (1), для чего исследуется интеграл Похгамера

$$I = (z-1)^{m/2}(z+1)^{n/2}\int^{(z+,\,-1+,\,z-,\,-1-)}\psi(t)\,dt,$$

где

$$\psi(t) = \frac{(t-1)^{k-(m-n)/2}(t+1)^{k+(m-n)/2}}{(t-z)^{k+(m+n)/2+1}} \quad (|z+1| < 2).$$

Отсюда получают

$$I = e^{\pi i(m-n)}\,\pi\cdot 2^{k-(m-n)/2+2}\,(z-1)^{m/2}(z+1)^{-n/2} \times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(k + \frac{m-n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(k + \frac{m+n}{2} + 1\right)\Gamma(1-n)} \times$$

$$\times\sin\left(k + \frac{m-n}{2}\right)\pi F\left\{-k + \frac{m-n}{2}, k + \frac{m-n}{2} + 1;\ 1-n;\ \frac{z+1}{2}\right\}.$$

Из этого интеграла вытекают различные формы для решений $P_k^{m,n}(z)$ и $Q_k^{m,n}(z)$ в виде гипергеометрических рядов, годных для тех или иных значений чисел k, m и n.

Н. С. Кошляков

1650. Ультрасферическая производящая функция. Брафман (An ultraspherical generating function. Brafman Fred), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 3, 1319—1323 (англ.)

Для обобщенных гипергеометрических функций ${}_pF_q$ и ультрасферических полиномов $P_n^{(\alpha,\alpha)}(v)$ доказывается тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2\alpha)_n}{(1+\alpha)_n}\,{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, c_1, \ldots, c_p;\\ d_1, \ldots, d_q;\end{matrix}\ u\right]P_n^{(\alpha,\alpha)}(v)\,t^n =$$

$$= g^{-\alpha-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c_1)_n\ldots(c_p)_n}{(d_1)_n\ldots(d_q)_n}\,y^n\,\frac{(1+2\alpha)_n}{(1+\alpha)_n}\,P_n^{(\alpha,\alpha)}(w). \qquad (1)$$

Здесь $g = 1 - 2vt + t^2$, $y = -tug^{-1/2}$, $w = 2(v-t)g^{-1/2}$, $(c)_0 = 1$, $(c)_n = c(c+1)\ldots(c+n-1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

При частном выборе параметров формула (1) приводит к ряду новых и известных ранее результатов.

Так, значениям $p=2$, $q=2$, $d_1=1+\alpha$, $d_2=1+2\alpha$, $c_1=c$, $c_2=1+2\alpha-c$ отвечает равенство

$$g^{-\alpha-1/2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}c,\ 1+2\alpha-c;\\ 1+\alpha;\end{matrix}\ \frac{1+y-r}{2}\right]\times$$

$$\times\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}c,\ 1+2\alpha-c;\\ 1+\alpha;\end{matrix}\ \frac{1+y-r}{2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2\alpha)_n}{(1+\alpha)_n}\times$$

$$\times\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,\ c,\ 1+2\alpha-c;\\ 1+\alpha;\ 1+2\alpha;\end{matrix}\ u\right]P_n^{(\alpha,\alpha)}(v)\,t^n, \qquad (2)$$

($r=\sqrt{1-2yw+y^2}$), которое обобщает аналогичную формулу, полученную ранее в случае $\alpha=0$ в работе Райса (Rice S. O., Duke Math. J.), 1940, 6, 108—119).

При $c=-k$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), когда левая часть (2) вырождается в произведение ультрасферических полиномов, автор находит

$$g^{-\alpha-1/2}\frac{(k!)^2}{[(1+\alpha)_k]^2}\ P_k^{(\alpha,\alpha)}(r+y)\,P_k^{(\alpha,\alpha)}(r-y)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2\alpha)_n}{(1+\alpha)_n}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,\ -k,\ 1+2\alpha+k;\\ (1+\alpha),\ 1+2\alpha;\end{matrix}\ u\right]P_n^{(\alpha,\alpha)}(v)\,t^n.$$

Аналогичные разложения получены и для произведения обобщенных гипергеометрических функций ${}_0F_1$.

В заключение работы автор с помощью (1) указывает новый метод доказательства формул Уэйснера (РЖМат, 1957, 4949). М. Б. Капилевич

1651. Континуальный аналог теоремы сложения для многочленов Якоби. Виленкин Н. Я., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 157—161

Выводится формула

$$\frac{(-1)^{m-l}\sin\pi(n-l)}{\sin\pi(n-m)}\int_{-\infty}^{+\infty}P^l_{m,-s}(\cos\theta')\,P^l_{-n,s}\quad(\cos\theta'')\times$$

$$\times\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta''}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}}e^{i\varphi}\right)^s ds=\begin{cases}e^{-i[m\varphi_1+n\varphi_2]}\,P^l_{mn}(\cos\theta), & \text{при } |\varphi|<\pi,\\ 0, & \text{при } |\varphi|>\pi\end{cases} \qquad (1)$$

где θ', φ, θ'' — вещественные числа и

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\left(\cos^2\frac{\theta''}{2}\,e^{-i\varphi/2}-\sin^2\frac{\theta'}{2}\,e^{i\varphi/2}\right)\times$$

$$\times\left(\cos^2\frac{\theta'}{2}\,e^{i\varphi/2}-\sin^2\frac{\theta'}{2}\,e^{-i\varphi/2}\right),$$

$$e^{i\varphi_1}=\frac{\sin\theta}{2\sin\theta'\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos^2\frac{\theta''}{2}\,e^{-i\varphi/2}-\sin^2\frac{\theta''}{2}\,e^{i\varphi/2}\right)},$$

$$e^{i\varphi_2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\theta''\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\theta''}{2}\,e^{-i\varphi/2}-\sin^2\frac{\theta''}{2}\,e^{i\varphi/2}},$$

а $P^l_{mn}(\mu)$ при целых l, m, n есть полином, определяемый равенством

$$P^l_{mn}(\mu)=\frac{(-1)^{l-m}\,i^{n-m}}{2^l(l-m)!}\sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+n)!}{(l+m)!\,(l-n)!}}(1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}}\times$$

$$\times(1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}}\frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}}[(1-\mu)^{l-m}(1+\mu)^{l+m}]$$

и является матричным элементом неприводимого унитарного представления группы вращения трехмерного пространства.

Функция $P^l_{mn}(\cos\theta)$ может быть выражена через гипергеометрическую функцию F посредством равенства

$$P^l_{mn}(\cos\theta)=$$

$$=\frac{(-1)^{l-m}\,i^{n-m}}{\Gamma(m+n+1)}\sqrt{\frac{\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(l-n+1)\,\Gamma(l-m+1)}}\times$$

$$\times\sin^{m-n}\frac{\theta}{2}\cos^{m+n}\frac{\theta}{2}\,F\left(l+m+1,\ m-l,m+n+1,\right.$$

$$\left.\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (2)$$

и оказывается справедливой для любых l, m, n (за исключением лишь значений, при которых одно из чисел $l+m$, $l+n$, $l-m$, $l-n$ целое и отрицательное).

Формула (1) (континуальный аналог для функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$) получается из соотношения (2) с последующим применением формулы Рамануджана

$$\int_{-\infty}^{+\infty}J_{m+s}(x)\,J_{n-s}(y)\left[\frac{y}{x}e^{i\varphi s}\right]^s ds=$$

$$=\begin{cases}\left(\dfrac{2xy\cos\frac{\varphi}{2}}{x^2e^{-i\varphi/2}+y^2e^{i\varphi/2}}\right)^{\frac{m+n}{2}}\left[\dfrac{y}{x}\,e^{i\varphi}\right]^{\frac{n-m}{2}}\times\\ \times J_{m+n}\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}(x^2e^{-i\varphi/2}+y^2e^{i\varphi/2})}, & \text{при } |\varphi|<\pi\\ 0 & \text{при } |\varphi|>\pi.\end{cases}$$

Преобразовав формулу (1) к гипергеометрическим функциям и перейдя затем к пределу при $l\to\infty$, $\theta'\to 0$, $\theta''\to 0$, так что $\lim l\theta'=x$, $\lim l\theta''=y$, получим формулу Рамануджана. Н. С. Кошляков

1652. О некоторых преобразованиях почти уравновешенных базисных двусторонних гипергеометрических рядов типа ${}_M\Psi_M$. Шукла (On certain transformations of nearly-poised basic bilateral hypergeometric series of the type ${}_M\Psi_M$. Shukla Hari Shanker), Math. Z., 1958, **69**, № 2, 195—201 (англ.)

Пользуясь соотношением Слейтера (Slater L. J., Qu art. J. Math., 1952, **3**, 73 — 80), связывающим $M+1$ базисных гипергеометрических двусторонних рядов типа ${}_M\Psi_M$, автор, надлежащей спецификацией параметров и аргумента в ${}_M\Psi_M$, получает некоторые соотношения между так называемыми почти уравновешенными (nearly-poised) рядами типа ${}_M\Psi_M$ и ${}_M\Phi_{M-1}$, а также соотношения, связывающие вполне уравновешенные и почти уравновешенные ряды типа ${}_M\Psi_M$. М. Н. Олевский

1653. Интегралы, содержащие произведение E функций, бесселевых функций и обобщенных гипергеометрических функций. Рагаб (Integrals involving pro-

ducts of E-functions, Bessel-functions and generalized hypergeometric functions. Ragab F. M.), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 4, 535—551 (англ.; рез. итал.)

Вычислены следующие 3 интеграла (во всех случаях, когда они сходятся):

$$I_1 = \int_0^\infty \lambda^{k-1} E(p; \alpha_r : q; \rho_s : \lambda)\, E(l; \beta_t : m; \sigma_u : z/\lambda^2)\, d\lambda,$$

$$I_l = \int_0^\infty \lambda^{k-l+1} \psi(\lambda)\, \varphi_l(z/\lambda^2) d\lambda \quad (l = 2, 3),$$

где $\psi(\lambda) = E(p; \alpha_r : q+1; \rho_s : \lambda)$, $\rho_{q+1} = k+1$; $\varphi_l(x) = E(2q+1; \beta_r : 2p; \quad \gamma_s : x)$, $2\beta_r = \rho_r + k - l + 2$ $(r = 1, \ldots, q)$, $2\beta_r = \rho_{r-q} + k - l + 3$ $(r = q+1, \ldots, 2q)$, $\beta_{2q+1} = 1/2 + k$; $2\gamma_s = \alpha_r + k - l + 2$ $(s = 1, \ldots, p)$, $2\gamma_s = \alpha_{s-p} + k - l + 3$ $(s = p+1, \ldots, 2p)$.

I_1 выражен в виде трехчленной суммы произведений степенных функций от z на E-функции от $4^{1+q-p}z$; $I_l = cz^{r-2}J_r(u)K_r(u)$, где $u = \sqrt[4]{4^{1+p-q}/z}$; $r = k - l + 2$ $(l = 2,3)$, $c = 2^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_p - \rho_1 - \ldots - \rho_{q+q-p-k+1}\pi}$ $^{(q-p+1)/2}$.

Отмечено большое число частных случаев.

М. Н. Олевский

1654. Некоторые разложения E-функций. Сингх (Certain expansions involving E-functions. Singh V. N.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 3, 119—122 (англ.)

Ряды

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha_1+n)\ldots\Gamma(\alpha_p+n)}{n!\,\Gamma(\rho_1+n)\ldots\Gamma(\rho_q+n)} z^{-n} =$$

$$= E\left(\begin{matrix}\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_p : z \\ \rho_1; \rho_2; \ldots; \rho_q\end{matrix}\right) = E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1)\ldots\Gamma(\rho_q)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (\alpha_1; n)\ldots(\alpha_p; n)}{n!\,(\rho_1; n)\ldots(\rho_q; n)} z^{-n},$$

где $(\alpha; \beta) = \Gamma(\alpha+\beta)/\Gamma(\alpha)$, определяют на плоскости z соответствующие E-функции. В частности

$$E(\alpha, \beta :: z) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (\alpha; n)(\beta; n)}{n!} z^{-n}, \quad (1)$$

причем ряд (1) — расходящийся асимтотический ряд.

E — функции обладают следующими основными свойствами:

$$\alpha_1 E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z) = E(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p : q; \rho_s : z) + z^{-1} E(p; \alpha_r + 1 : q; \rho_s + 1 : z);$$

$$(\rho_1 - 1) E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z) = E(p; \alpha_r : \rho_1 - 1, \rho_2, \ldots, \rho_q : z) + z^{-1} E(p; \alpha_r + 1 : q; \rho_s + 1 : z);$$

$$\frac{d^m}{dz^m}[z^{-\alpha_1} E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z)] = (-1)^m z^{-\alpha_1 - m} E(\alpha_1 + m, \alpha_2, \ldots, \alpha_p : q; \rho_s : z);$$

$$(\alpha_2; n) E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (\alpha_1 - n + r; n - r)(\alpha_1 - \alpha_2 \quad n; r)\, z^{-r} E\left(\begin{matrix}\alpha_1 - n + r; \\ \rho_1 + r;\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_2 + n; \alpha_3 + r; \ldots; \alpha_p + r : z \\ \rho_2 + r; \ldots; \rho_q + r\end{matrix}\right). \quad (2)$$

$$F[\alpha + m; 2m+1; a]\, E(\alpha + m, \alpha - m :: b) =$$

$$= \left(\frac{b}{a+b}\right)^{\alpha+m} \sum_{r=0}^\infty \frac{(1-\alpha+m; r)}{(2m+1; r)\, r!} \left(-\frac{ab}{a+b}\right)^r E(\alpha + m + r, \alpha - m - r :: a + b), \quad (3)$$

где $F[\alpha; \beta; x] = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (\alpha; n) x^n}{n!\,(\beta; n)}$.

Обобщая формулы (2) и(3), автор получает следующие соотношения:

$$(\alpha_1; n) E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (\rho_1 + r; n-r)(\rho_1 - \alpha_1; r) \times$$

$$\times z^{-r} E\left(\begin{matrix}\alpha_1 + n, \alpha_2 + r, \ldots, \alpha_p + r : z \\ \rho_1 + n + r, \rho_2 + r, \ldots, \rho_q + r\end{matrix}\right).$$

$${}_qF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1; 1 + \alpha_1 - \rho_1; 1 + \alpha_1 - \rho_2; \ldots; 1 + \alpha_1 - \rho_{q-1} : x \\ 1 + \alpha_1 - \alpha_2; 1 + \alpha_1 - \alpha_3; \ldots; 1 + \alpha_1 - \alpha_{q+1}\end{matrix}\right] \times$$

$$\times E(q+1; \alpha_r : q-1; \rho_s : y) = \left(\frac{y}{x+y}\right)^{\alpha_1} \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_q = 0}^\infty A_{r_1, r_2, \ldots, r_q} (x+y)^{r_1} \left\{\frac{xy}{(x+y)^2}\right\}^{s_q} E\left(\begin{matrix}\alpha_1 + r_1 + 2\sigma_q, \alpha_2 - r_1, \alpha_3, \\ \rho_1 + \sigma_2, \\ \alpha_4 + \sigma_2 + \sigma_3, \ldots, \alpha_{q+1} + \sigma_{q-1} : x + y \\ \rho_2 + \sigma_3, \ldots, \rho_{k-1} + \sigma_q\end{matrix}\right),$$

где ${}_qF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_q : x \\ \beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_q\end{matrix}\right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (\alpha_1; n)(\alpha_2; n)\ldots(\alpha_q; n)}{(\beta_1; n)(\beta_2; n)\ldots(\beta_q; n)} \frac{x^n}{n!}$

$$A_{r_1, r_2, \ldots, r_q} = \frac{(-1)^{r_1} (1 - \alpha_2; r_1)}{(1 + \alpha_1 - \alpha_{q+1}; s_q) r_q!} \times \prod_{n=1}^{q-1} \frac{(1 + \alpha_1 - \rho_n; s_n)(\rho_n - \alpha_{n+2}; r_{n+1})}{(1 + \alpha_1 - \alpha_{n+1}; s_n)\, r_n!},$$

$s_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$; $\sigma_n = s_n - r_1$ $(n = 1, 2, \ldots, q)$.

Ю. Л. Рабинович

1655. Об одном обобщении полиномов Ломмеля. Чак (A generalization of Lommel polynomials. Chak A. M.), Duke Math. J., 1958, 25, № 1, 73—82 (англ.)

Обычные полиномы Ломмеля $R_{m,\nu}(x)$ порядка m относительно $\frac{1}{x}$ тесно связаны с функциями Бесселя. причем отправной точкой служит рекуррентная формула

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x).$$

С помощью обобщенных функций Хумберта, определяемых разложением

$$J_{m,n}(x) = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r (x/3)^{3r+m+n}}{r!\,\Gamma(m+r+1)\,\Gamma(n+r+1)},$$

вводятся полиномы $R_{p,\,m,\,n}(x)$, причем и здесь отправной точкой может служить рекуррентное соотношение

$$\frac{x}{3}\left[J_{m-1,\,n}(x)+J_{m+1,\,n+1}(x)\right]=mJ_{m,\,n}(x).$$

Автор на основании формул операционного исчисления выводит еще одно рекуррентное соотношение для функций Хумберта

$$J_{m+3,\,n+3}(x)-\frac{3(m+n+3)}{x}J_{m+2,\,n+2}(x)+\frac{9(m+1)(n+1)}{x^2}\times$$
$$\times J_{m+1,\,n+1}(x)-J_{m,\,n}(x)=0,$$

откуда получается формула

$$J_{m+p+3,\,n+p+3}(x)-J_{m+2,\,n+2}(x)\,R_{p+1,\,m,\,n}(x)+J_{m,\,n}(x)\times$$
$$\times R_{p,\,m+1,\,n+1}(x)-J_{m+1,\,n+1}(x)\left\{\frac{9(m+1)(n+1)}{x^2}\times\right.$$
$$\left.\times R_{p,\,m+1,\,n+1}(x)-R_{p-1,\,m+2,\,n+2}(x)\right\}=0,$$

где функции $R_{p+1,\,m,\,n}(x)$ являются полиномами порядка $p+1$ относительно $\frac{1}{x}$.

В дальнейшем автор устанавливает ряд формул, относящихся к этим полиномам. Н. С. Кошляков

1656. Исследование полиномов $S_n(x)$ проф. Р. Сан-Хуана и оценка величин $|D^n e^{-e^\lambda}|^{1/n}$ на интервале $(0, +\infty)$. Ибаньесс-Гарсия (Estudio de los polinomios $S_n(x)$; del prof. R. San Juán y acotación de $|D^n e^{-e^\lambda}|^{1/n}$ en $(0, +\infty)$. Ibáñez García C.), Rev. Univ. Madrid, 1957, 6, № 21, 87—88 (исп.)

Изучаются полиномы

$$S_n(x)=(-1)^{n+1}e^x D\{xD[xD\ \ldots\ xD(xDe^{-x})]\}\quad\left(D=\frac{d}{dx}\right).$$

Устанавливаются рекуррентные формулы, интегральные соотношения ортогональности, а также формулы, связывающие $S_n(x)$ с полиномами Эрмита и Лагерра.

Наряду с этим получены простые оценки для величин $|D^n e^{-e^t}|^{1/n}$ на ограниченном и бесконечном интервалах изменения переменной t. М. Б. Капилевич

1657. Некоторый несобственный интеграл от произведения двух регулярных кулоновских волновых функций. Буххольц (Ein besonderes uneigentliches Integral über das Produkt zweier regulärer Coulombscher Wellenfunktionen. Buchholz H.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 3-4, 115—120 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Требуется вычислить встречающийся в ядерной физике интеграл

$$\int_0^\infty M_{i\tau,L+1/2}(-is)\cdot M_{i\tau,M+1/2}(-is)\,ds/s^n\quad(n\leqslant M+L+2),$$

где M_{km} — известное решение уравнения Уиттекера.

При $n=2$ соответствующий неопределенный интеграл выражается через подинтегральные функции и их производные. Случай $n=3$ сводится к предыдущему интегрированием по частям. И. М. Соболь

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1658. Применение полиномов Лагерра к решению телеграфных уравнений. Иванов А. В., Ермаков В. С., Инж.-физ. ж., 1958, № 1, 6—16

Авторы предлагают выразить оригинал функции

$$e^{-\xi p}\,\frac{1}{p}\left(\frac{p+\alpha-\beta}{p+\alpha+\beta}\right)^n\qquad(\xi,\alpha,\beta\geqslant 0)$$

через интеграл, содержащий произведение показательной функции и полинома Лагерра. В связи с полученной формулой рассмотрены 2 примера из теории телеграфных уравнений.

Примечание референта. Предлагаемый вид оригинала в неявной форме встречается в одной работе референта (РЖМат, 1955, 5111). В указанной работе дано явное выражение этого оригинала.

Э. Я. Риекстыньш

1659. К вопросу об абсолютной и равномерной сходимости интегралов Фурье. Купцов Н. П., Матем. сб., 1957, 42, № 4, 461—478

Пусть $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ — решение уравнения

$$y''-q(x)\,y+\lambda y=0;\quad \varphi_\alpha(0,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi'_\alpha(0,\lambda)=$$
$$=-\cos\alpha;\quad 0\leqslant x<\infty,$$

где $q(x)$ — вещественная функция, суммируемая с квадратом в каждом конечном интервале полуоси $[0,\infty)$.

Согласно известной теореме Вейля, любую функцию $f(x)\in L^2[0,\infty)$ можно разложить в обобщенный интеграл Фурье

$$f(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}F(\lambda)\,\varphi_\alpha(\lambda,x)\,d\rho(\lambda),\qquad(1)$$

где

$$F(\lambda)=\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\,\varphi_\alpha(\lambda,x)\,dx$$

и $\rho(\lambda)$ — некоторая неубывающая функция.

Продолжая любую непрерывную функцию $f(x)\in L^2[0,\infty]$ на $(-\infty,0]$ четным образом, полагаем для $0<h<1/2$

$$\omega(h,f)=\sup_{|\delta|\leqslant h}\left[\int_0^\infty|f(x+\delta)-f(x)|^2\,dx\right]^{1/2},$$
$$\Omega_1(h,f)=[\omega^2(h,f)+\chi(h,f)]^{1/2},$$

где $\chi(h,f)=\int_{\sigma-h}^{\infty}|f^2(x)|\,dx$ и σ — наибольший корень уравнения

$$h^4\sup_{|\delta|\leqslant h}\int_1^{\sigma+h}|q^2(x)\,f^2(x+\eta)|\,dx=\int_{\sigma-h}^{\infty}f^2(x)\,dx.$$

(Если функция $f(x)$ финитна, то по определению $\chi(h,f)\equiv 0$).

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принадлежит $L^2[0,\infty)$. Если $\sin\alpha\neq 0$ и $\sum n^{-1/2}\Omega_1(1/n,f)<\infty$, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|\,d\rho(\lambda)$ сходится, а следовательно, интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно на каждом конечном отрезке полуоси $[0,\infty)$.

Теорема 2. Пусть $\rho(\lambda)=\text{const}$ на $(-\infty,0]$ и $\sup_{x\geqslant 0,\,\lambda\geqslant 0}|\varphi_\alpha(x,\lambda)|<\infty$. Если $\sin\alpha\neq 0$, функция $f(x)\in L^2[0,\infty)$ равномерно непрерывна и $\Omega_1(h,f)=o(h^{1/2})$, то интеграл (1) сходится равномерно на всей полуоси $[0,\infty)$.

В этих теоремах можно заменить $\Omega_1(h,f)$ на $\omega(h,f)$, если функция $q(x)$ удовлетворяет условию $\sup_{x\geqslant 0}|q(x)|<\infty$.

Аналогичные теоремы доказываются для случая, когда $\sin\alpha=0$. В. А. Марченко

1660. Симметрическая теория сходимости для общих преобразований. **Миллер** (A symmetrical convergence theory for general transforms. Miller John Boris), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 30, 224—241 (англ.)

Функция $K(x)$, заданная на $(0, \infty)$, называется ядром класса D^2_λ, если $K_1(x) = \int_0^x K(t)dt = O(\sqrt{x})$, когда $x \to \infty$,

$$K_1(x) = \frac{x}{2\pi i} \operatorname{l.i.m.}_{T\to\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{R(s)}{1-s} x^{-s}\, ds,$$

где $|R(1/2 + it)| = 1$, $R(1/2 + it)R(1/2 - it) = 1$,

а

$$\chi_\lambda(x) = \operatorname{l.i.m.}_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(2+\lambda-s)\Gamma(s)} R(s)\, x^{1-s}\, ds$$

обладает свойствами: $\omega_\lambda(x) = x^{-\lambda}[x^\lambda \chi_\lambda(x)]'$ непрерывна, ограничена на $(0, \infty)$ и при некотором $\varepsilon > 0$ $\int_x^\infty \frac{\omega_\lambda t}{t}\, dt = O(x^{\lambda-1-\varepsilon})$, когда $x \to \infty$.

При $\lambda > 1/p$ $(p > 1)$ функция $f(x)$ по определению принадлежит классу $\mathfrak{G}^p_\lambda$, если

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^\infty (t-x)^{\lambda-1} f^{(\lambda)}(t)\, dt,$$

где $x^\lambda f^{(\lambda)}(x) \in L_p\ (0, \infty)$.

Устанавливается, что если $K(x) \in D^2_\lambda$ $(\lambda > 1/2)$, то для любой функции $f(x) \in \mathfrak{G}^2_\lambda$, преобразование $g(x) = \int_{+0}^{+\infty} f(t) K(xt)\, dt$ также принадлежит $\mathfrak{G}^2_\lambda$, и для $x > 0$, $f(x) = \int_{+0}^{+\infty} g(t) K(xt)\, dt$. При этом для любой пары функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из $\mathfrak{G}^2_\lambda$ справедливо равенство Парсеваля.

Приводится критерий принадлежности функции $f(x)$ к рассматриваемому классу $\mathfrak{G}^2_\lambda$ и отмечается, что если $\lambda > 1/p\,(p > 1)$, $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$, то имеет место включение $\mathfrak{G}^p_\lambda \subset \mathfrak{G}^p_\mu$.

А. Ф. Тиман

1661. Символические операторы. **Пайу** (Opérateurs symboliques. Pailloux Henri. Publs scient. et techn. Ministère air, 1956, № 317, 77 p.) (франц.)

Строится алгебраическая теория операторов с помощью фундаментального соотношения

$$f(x + a) = \varphi(ap) f(x),$$

где p — символический оператор. Доказано, что $\varphi(\lambda) = e^\lambda$. Как следствие, получаются формулы

$$df/dx = pf(x), \quad f(x + h) = \sum_{n=0}^\infty \frac{h^n p^n}{n!} f(x).$$

Вводится генератриса $\Theta(t)$, соответствующая оператору $\Omega(p)$ с помощью формулы $\Omega(p) f(x) = \int_a^b \Theta(t) f(x + t)\, dt$, и устанавливается связь $\Omega(p) = \int_a^b \Theta(t) e^{tp} dt$, которая позволяет получить основную для приложений формулу

$$\Omega(p) e^{rx} = e^{rx} \Omega(r).$$

Отмечается также целый ряд других формул, необходимых для дальнейших приложений, например, формулы:

$$\Omega'(p) = \int_a^b t\Theta(t) e^{tp}\, dt,$$

$$\Omega x f = x\Omega f + \Omega' f,$$

$$\Omega x^2 f = x^2 \Omega f + 2x\Omega' f + \Omega'' f,$$

. . . . . .

В качестве первого примера дается символическое решение неоднородного уравнения Бесселя. Установлена теорема смещения

$$\Omega(p) e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} \Omega(p + \alpha) f(x)$$

и теорема о композиции двух операторов $(\Omega_1(p)\Omega_2(p))$. С помощью соотношения $e^{kp} = \int_a^b \Theta(t) e^{tp}\, dt$ вводится δ-функция, а затем ее производные. Затем идут всевозможные приложения: нахождение частных решений линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами, решение разностных уравнений. После этого автор переходит к теории символических операторов X_k в применении к функциям многих переменных. Определяющими являются соотношения

$$e^{\sum a_k x_k} u(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n),$$

$$\Omega(X_1, \ldots, X_n) = \int_{(D)} \Theta(t_1, \ldots, t_n) e^{\sum t_k X_k}\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Для приложений важны формулы

$$\Omega x_k f = x_k \Omega f + \Omega'_k f \qquad \left(\Omega'_k = \frac{\partial \Omega}{\partial X_k}\right),$$

$$\Omega x_h x_k = x_h x_k \Omega f + x_k \Omega'_h f + x_h \Omega'_k f + \Omega''_{kh} f$$

. . . . . .

В качестве первого приложения рассматривается задача Коши для уравнения $\partial^2 u/\partial x^2 = \partial u/\partial t$ или в операторном виде $(X^2 - T)u = 0$, а также задача с граничными условиями $u(0, t) = \alpha(t)$, $u'_x(0, t) = \beta(t)$. В последнем случае решение записано в символической форме

$$u(x, t) = (\operatorname{ch} x\sqrt{T})\, \alpha(t) + \frac{\operatorname{sh} x\sqrt{T}}{\sqrt{T}} \beta(t).$$

Так же рассматриваются более общие уравнения

$$\Omega(T, X_1, \ldots, X_n)\, u(t, x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

В частности, этим путем получается известное общее решение волнового уравнения для струны. Интересны приложения к теории гармонических функций, к аналитическим функциям и к системе $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$. Здесь получены формулы общих решений, представленных в виде интегралов. В том же плане рассматриваются динамические уравнения теории упругости и электродинамики. Полученные автором формулы представляют искомые векторы в явном виде через произвольные функции, стоящие под знаком интеграла. Отдельно рассмотрены статические уравнения теории упругости. В заключение рассматриваются общие системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Особенностью развиваемой теории является простота исходных предпосылок. Автор

не уточняет класс функций, в котором находятся его решения, но из его теории можно видеть, что это тот же класс, к которому мы приходим в результате применения классического метода Эйлера — Фурье — Пуассона. И. С. Аржаных

1662 К. Справочная книга по преобразованию Лапласа. Т. III. Приложения преобразования Лапласа. Ч. 2. Дёч (Handbuch der Laplace Transformation. Bd. III. Anwendungen der Laplace Transformation. Abt. 2. Doetsch Gustav. Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956, 300 S.) (нем.)

Содержание книги непосредственно примыкает к т. II, содержащему часть 1 приложений преобразований Лапласа (РЖМат, 1956, 8933К). Настоящий том посвящен приложениям к дифференциальным уравнениям с частными производными, разностным уравнениям, интегральным уравнениям и преобразованиям, теории целых функций экспоненциального типа и преобразованиям Лапласа на конечном интервале. В конце книги приводятся дополнения к т. I., литературные и исторические ссылки, библиография, индекс и исправления к т. II.

Книга открывается частью, в которой весьма подробно трактуются методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, связанные с преобразованием Лапласа. После некоторых общих положений рассматриваются уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, а также частные случаи уравнений с переменными коэффициентами — функциями переменной трансформации. Особо исследуется сингулярное уравнение Фоккера — Планка из диффузионных вопросов в биологии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[axU\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[(bx+c)U\right],\ x>0, t>0.$$

Далее рассматриваются вопросы множественности решений задач математической физики в определенных классах функций с точки зрения преобразования Лапласа, оказывающейся, как известно, более удобной для этой цели, чем метод Фурье разделения переменных. В последней главе части 4 принципы Гюйгенса и Эйлера применяются к выводу операционных соотношений для функций Грина разных задач. Представляет интерес следующая подробно рассмотренная схема:

Уравнение с частными производными	→ Принципы Гюйгенса и Эйлера →	Трансцендентные функциональные уравнения
↓		↓
Преобразования Лапласа		Преобразование Лапласа
↓		↓
Обыкновенное дифференциальное уравнение	→ Принципы Гюйгенса и Эйлера →	Алгебраические функциональные уравнения

В части 5 излагается метод решения линейных разностных уравнений переходом к преобразованию Лапласа. В качестве примера рассматривается электрическая схема фильтра. Специальная глава посвящена разностным уравнениям в пространстве изображений, которые можно решить переходом в пространство оригиналов (обнаруживаемая здесь дуальность базируется на дуальном характере теоремы запаздывания). Часть 5 заканчивается рассмотрением разностных уравнений с частными разностями, причем подробно изучается уравнение

$$U(x, t) - U(x+1, t) + U(x+2, t) - U(x+1, t+1) = 0,$$

являющееся разностным аналогом уравнения теплопроводности.

Интегральные уравнения рассматриваются в части 6. Подробному изучению подвергается уравнение Вольтерра, которое при неотрицательных ядре и свободном члене допускает общее статистическое толкование как уравнение проблемы „возобновления", нашедшей в последнее время широкие естественно-научные и социально-экономические приложения. Операционно решаются также уравнение Абеля и его обобщения. Отдельно рассматривается свертка на всей оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) F(\tau)\, d\tau$$

и связанные с ней интегральные уравнения, причем одна глава специально посвящена трансцендентным теоремам сложения, вытекающим для сверток этого типа из простых функциональных соотношений, имеющих место для преобразований Лапласа свертываемых функций; приводятся многочисленные примеры соотношений между специальными функциями (эллиптическими, бесселевыми функциями, эрмитовыми, лагерровыми полиномами и т. п.). В следующей главе рассматривается комплексная свертка

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int f_1(s-\sigma) f_2(\sigma)\, d\sigma$$

и связанные с ней интегральные уравнения, с приложениями к дифференциальным уравнениям

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{k^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(s) = g(s)$$

бесконечного порядка. В последней главе части 6 дается сводка типов интегральных уравнений, решаемых при помощи преобразования Лапласа.

В последней, седьмой части речь идет о приложениях теории целых функций к изучению преобразований Лапласа оригиналов, отличных от нуля на конечном интервале, причем устанавливается, что и факты из теории преобразования Лапласа могут быть в свою очередь использованы для вывода некоторых свойств целых функций. Таким образом, теория целых функций экспоненциального типа оказывается одной из областей приложения теории преобразования Лапласа.

В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1663. Обобщение теоремы Гульдина. Точки, по отношению к которым эллипсоид инерции есть сфера. Мараваль — Касесновес (Generalizacion de los teoremas de Guldin. Puntos para los que el elipsoide le inercia es una esfera. Maravall Casesnoves Darío), Gac. mat., 1957, **9**, № 8, 225—228 (исп.)

В вертикальной плоскости (например, в плоскости xz) рассматривается фигура, симметричная относительно вертикали, проходящей через ее центр тяжести. Вращением вокруг оси описывается некоторое тело, которое считается однородным, с плотностью 1.

Используя цилиндрические координаты и существенно опираясь на предположенную симметрию, выводится ряд элементарных формул для моментов инерции и статических моментов тела.

В заключение, устанавливается геометрическое место точек, по отношению к которым эллипсоид инерции для системы материальных точек есть сфера.

Г. М. Фихтенгольц

1664. Математический аппарат в линейных сервомеханизмах. I—IV. Перре (Les instruments mathématiques dans les servomécanismes linéaires. I—IV. Perret René), Mécanic, 1958, **18**, № 5, 73—80 (франц.)

1665. О математических проблемах, связанных с защитой трансформаторных станций от молнии. Фенье ш (Transzformátorállomás villámvédelmével kapcsolatos matematikai problémákról. Fényes Tamás), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 201—215 (венг.; рез. русск., франц.)

Автор занимается расчетом перенапряжений, возникающих в проводах вследствие удара молнии. Распространяющаяся в проводе электрическая волна задается эмпирической формулой. Математическое исследование явления производится с учетом отвода перенапряжения с прямоугольным разрезом. Возникающий при отводе скин-эффект считается предельным случаем высокой частоты, поэтому в работе используются и развиваются полученные Кокрофтом результаты (Cockcroft J. D., Proc. Roy. Soc. London, 1929, **122**, 533—542). Автор решает задачу с помощью эллиптических функций. С практической точки зрения весьма интересно, что изучаемое явление может с хорошим приближением считаться независимым от материальных свойств отвода и что отвод с прямоугольным разрезом эквивалентен отводу с круговым разрезом, радиус которого определяется автором.

Резюме автора

1666. Синтез линейных следящих систем на основе критерия минимума практически предельной ошибки воспроизведения. Куракин К. И., Автоматика и телемеханика, 1957, **18**, № 5, 409—426 (рез. англ.)

Дан метод определения оптимальной передаточной функции следящей системы для случая, когда входная воспроизводимая величина является заданной медленно меняющейся функцией и помехи равномерно распределены по всему спектру рабочих частот. Метод основан на использовании критерия минимума практически предельной ошибки воспроизведения. Изложены способы реализации оптимальной передаточной функции при помощи корректирующих устройств, работающих на постоянном токе. Получены общие формулы для определения различных динамических показателей оптимальной следящей системы.

Е. Н. Мирославлев

См. также: 1310, 1424, 1438, 1443, 1446, 1671

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

1667. Итерация lin операций для выпуклых множеств. Кли (Iteration of the «lin» operation for convex sets. Klee V. L., Jr), Math. scand., 1956, **4** № 2, 231—238 (англ.)

Рассматривается вещественное линейное пространство E. Для каждого $X \subset E$ под $\operatorname{lin} X$ понимается результат присоединения к X концов отрезков, внутренние точки которых содержатся в X. По индукции определяется операция $\operatorname{lin}^\beta X$ для всех порядковых чисел:

$$\operatorname{lin}^0 X = X; \quad \operatorname{lin}^\beta X = \begin{cases} \operatorname{lin} \operatorname{lin}^{\beta-1} X, & \text{если } \beta\text{—1 существует,} \\ \bigcup_{\alpha<\beta} \operatorname{lin}^\alpha X, & \text{если } \beta\text{— предельное число} \end{cases}$$

Порядком множества X называется наименьшее порядковое число α, при котором: $\operatorname{lin}^\alpha X = \operatorname{lin}^{\alpha+1} X$.

Приводятся упрощенные доказательства следующих утверждений, установленных ранее Никодимом (РЖМат, 1953, 5843, 5854): 1. Если X — выпуклое множество, то таковыми являются и все $\operatorname{lin}^\alpha X$. 2. Порядок выпуклого множества не превосходит Ω. 3. Если E — конечномерное пространство, то порядок выпуклого множества не превосходит 1. 4. Если $\dim E \leqslant \aleph_0$, то порядок любого выпуклого множества меньше, чем Ω. 5. Если $\dim E \geqslant \aleph_0$ и $\alpha < \Omega$, то в E существует выпуклое множество порядка α. 6. Если $\dim E > \aleph_0$, то в E существует выпуклое множество порядка Ω.

Г. Ш. Рубинштейн

1668. Композиции линейных топологических пространств. Томита (Compositions of linear topological spaces. Tomita Minoru), Math. J. Okayama Univ., 1957, **6**, № 2, 191—208 (англ.)

Пусть L — линейное пространство. В совокупности P всех полунорм на L вводится слабая топология. Рассматривается ограниченное (структурно) множество $\Lambda \subset P$. Его замыкание $\bar{\Lambda}$ компактно в P. Через $C(\bar{\Lambda})$ обозначается пространство всех непрерывных на $\bar{\Lambda}$ функций. При каждом фиксированном $f \in L$ функция $F(\lambda) = \lambda(f)$ ($\lambda \in \Lambda$), заданная первоначально на Λ, равномерно непрерывна, и потому ее можно рассматривать как элемент из $C(\bar{\Lambda})$. Если k — монотонная полунорма в $C(\bar{\Lambda})$, то композицией k^Λ системы полунорм Λ (посредством полунормы k) называют полунорму в L, определяемую равенством

$$k^\Lambda(f) = k(F) \quad (f \in L;\ F(\lambda) = \lambda(f),\ \lambda \in \Lambda).$$

Среди полунорм k особое значение имеют L^p-полунормы ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). Для $p \leqslant \infty$ они определяются, исходя из регулярной меры μ на $\bar{\Lambda}$, формулой

$$|\mu|_p(F) = \left[\int |F(\lambda)|^p \, d\,\mu(\lambda)\right]^{1/p} \qquad (F \in C(\bar{\Lambda}).$$

Под L^∞-полунормой понимается

$$\mu|_\infty(F) = |X|(F) = \sup_{\lambda \in X} |F(\lambda)| \qquad (F \in \bar{C}(\Lambda),$$

где X — замкнутое множество в $\bar{\Lambda}$.

В случае, когда k есть L^p-полунорма, композиция полунорм называется L^p-суммой. Важность L^p-сумм объясняется следующим результатом: каждая композиция k^Λ есть L^∞-сумма системы L^1-сумм полунорм из Λ.

Естественным образом вводится понятие L^p-выпуклости множества $\Lambda \subset P$ и доказывается, что компактное L^p-выпуклое множество полунорм есть L^p-выпуклая оболочка своих экстремальных точек.

В конце статьи высказываются некоторые соображения в духе вышеизложенных идей, относящиеся к кольцам ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Однако, как признает сам автор, эти соображения не идут дальше перефразировки известных результатов теории нормированных колец.

Г. П. Акилов

1669. Об общем виде некоторых функционалов. Мрувка (On the form of certain functionals. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 11, 1061—1067, LXXXVIII (англ., рез. русск.)

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Если X-компактное пространство, то всякий функционал φ, определенный на множестве всех вещественных непрерывных на X функций и удовлетворяющий условиям: 1) $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$; 2) если

$f(p) \leqslant g(p)$ при всяком p из X, то $\varphi(f) \leqslant \varphi(g)$; 3) если $f_n(p) \to f(p)$ при всяком p из X, то $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$, — имеет вид

$$\varphi(f) = \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_k f(p_k), \qquad (1)$$

где $p_1, \ldots, p_k$—фиксированные точки из X и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — фиксированные числа.

Аналогичная теорема была доказана Мазуром для метрического пространства X с $\overline{\overline{X}} < \aleph_1$.

Теорема 3. Пространство X является Q-пространством (РЖМат, 1958, 9655) тогда и только тогда, когда всякий функционал φ, определенный на множестве всех вещественных ограниченных функций и удовлетворяющий условиям 1) —3), имеет вид (1).

При доказательстве автор использует новую характеристику Q-пространств: Пространство X является Q-пространством тогда и только тогда, когда для всякой точки $p_0 \in \beta X \setminus X$ (βX обозначает максимальное компактное расширение по Стоуну-Чеху пространства X) существуют функция $f \in C(\beta X)$ и последовательность $f_1, f_2, \ldots, (f_n \in C(\beta X))$ такие, что $f_n(p) \to f(p)$ для всякого $p \in X$ и $f_n(p_0) \not\to f(p_0)$. И. А. Ергорова

1670. Об обобщении производной по Соболеву и Фридрихсу. Касуга (On Sobolev-Friedrichs' generalisation of derivatives Kasuga Takashi), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 10, 596—599 (англ.)

Пусть E_s — пространство функций, заданных на открытом множестве G n-мерного евклидова пространства, обладающих всеми квадратично суммируемыми сильными (т. е. определенными при помощи сходимости в среднем) обобщенными производными порядка $\leqslant s$, с естественной нормой. Следуя одной идее Нарисимхана (РЖМат, 1958, 4725) и применяя результаты Шварца (РЖМат, 1957, 6506 К), автор доказывает, что множество бесконечно дифференцируемых элементов E_s всюду плотно в E_s; для ограниченного G с достаточно гладкой границей этот результат содержался в работе Ниренберга (РЖМат, 1958, 1203). Автор указывает (с кратким пояснением), что всюду плотное множество в E_s образует также функции, аналитические на каждой компоненте связности G, и что слабое расширение (в $L^2(G)$) любого линейного эллиптического оператора с аналитическими ограниченными коэффициентами можно получить, замыкая сужение этого оператора, определенное на аналитических функциях.

А. Д. Мышкис

1671. Расходящиеся интегралы с точки зрения функционального анализа. I. Исихара (Divergent integrals as viewed from the theory of functional analysis. I. Ishihara Tadashige), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 2, 92—97 (англ.)

Рассматривается интеграл

$$v^*(k) = \int_0^\infty \exp(iks)\, v(\sigma, \tau, s)\, ds \qquad (k = \sigma + i\tau),$$

где $-\infty < \sigma < \infty$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. В основу положено пространство $\Phi = Z(\sigma) \hat{\otimes} \mathfrak{D}(\tau)$ (бипроективное тензорное произведение в смысле Гротендика, РЖМат, 1955, 1374; 1957, 7153), где пространство $\mathfrak{D}_{[\tau_1, \tau_2]}(\tau)$ введено Шварцем, а $Z(\sigma)$ — И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым. Указаны свойства пространства Φ. Доказано, что интеграл $\langle v^*, \varphi \rangle$ сходится для любой $\varphi \in \Phi$, если функция v непрерывна, $v\varphi \in \Phi$ для любой $\varphi \in \Phi$, причем для любых фиксированных $\varphi \in \Phi$ и τ произведение $v(\sigma, \tau, s)\varphi(\sigma, \tau)$ ограничено в любой области $0 \leqslant s < s_0$, $-\infty < \sigma < \infty$ и является при каждом $s \geqslant 0$ преобразованием Фурье функции из $\mathfrak{D}_{[-l, l]}$ (l не зависит от s). Далее, v^* является линейным непрерывным функционалом на Φ, если v непрерывна и отображение $\varphi \to v\varphi$ на каждом (конечном) интервале $0 \leqslant s < s_0$ является равномерно непрерывным отображением Φ в Φ. В том случае, когда $v = \sum_{j=1}^n u_j(\sigma, \tau) w_j(s)$, оба условия на v можно существенно ослабить. Указаны возможные обобщения, а также направления приложений к теории интегральных преобразований, интегральных уравнений и т. д.; все это будет подробно изложено в последующих статьях. А. Д. Мышкис

1672. Об одном свойстве пространства последовательностей. Тарнопольский В. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 158—160

Так как линейный функционал в пространстве s (пространство последовательностей комплексных чисел) с покоординатной сходимостью определяется конечной последовательностью чисел, то можно считать, что $s^* \subset s$. Пусть $M \subset s$. Множество P всех линейных функционалов, ортогональных к M, автор называет ортогональным дополнением множества M. Элементарными средствами доказана теорема: Пусть $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ — элементы из s. Если их линейная оболочка не содержит функционалов, то ее ортогональное дополнение всюду плотно в s.

Опечатка: в формуле (12) верхний индекс у знака суммы должен быть $\alpha_1 - 1$. В. Н. Никольский

1673. О матрице Гильберта. I. Розенблум (On the Hilbert matrix. I. Rosenblum Marvin), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 137—140 (англ.)

При фиксированном $k < 1$ обобщенной матрицей Гильберта называется матрица $H_k = \| (m+n+1-k)^{-1} \|$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ Комплексное число λ называется латентным корнем матрицы H_k, если существует такая ненулевая последовательность комплексных чисел $\{x_n\}_0^\infty$, что: 1) ряд $\sum_{n=0}^\infty (n+m+1-k)^{-1} x_n$ сходится, 2) $\sum_{n=0}^\infty (n+m+1-k)^{-1} x_n = \lambda x_m$ для $m = 0, 1, 2, \ldots$ Основной результат заключается в доказательстве того, что каждое комплексное число с положительной действительной частью является латентным корнем матрицы H_k. М. С. Лившиц

1674. Об одной теореме Киси. Оцука (Sur un théorème de M. Kishi. Ohtsuka Makoto), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 10, 722—725 (франц.)

Рассматривается потенциал $U^\mu(P) = \int_\Omega \Phi(P, Q)\, d\mu(Q)$, где Ω — локально компактное пространство, $\Phi(P, Q) > -\infty$ непрерывна при $P \neq Q$, мера $\mu \geqslant 0$ и имеет компактный носитель. Автор называет принципом верхней границы (le principe de limitation supérieure) утверждение: если $U^\mu(P)$ ограничен сверху на носителе μ, то он ограничен сверху в Ω; принципом максимума Угахери, обобщенным Киси,— утверждение: для всякого компакта $K \subset \Omega$ существует $c = c(\Omega, K, \Phi) \geqslant 0$ такое, что $U^\mu(P) \leqslant c \sup_{Q \in K} U^\mu(Q)$ для всяких масс μ на K; и, наконец, принципом непрерывности — утверждение: если $U^\mu(P)$ непрерывен и конечен на носителе масс μ, то он непрерывен и конечен в Ω.

Теорема 1. Принцип непрерывности вытекает из принципа верхней границы.

Теорема 2. Если $\Phi > 0$, то принцип максимума Угахери-Киси эквивалентен принципу верхней границы.

Теорема, обратная теореме 1, неверна. Из принципа верхней границы нельзя получить неравенства $U^\mu(P) \leqslant c \cdot \sup_{Q \in S_\mu} U^\mu(Q)$, где S_μ — носитель μ. В заключение отмечается близость этой работы к работе Шоке (РЖМат, 1957, 2978). Н. С. Ландкоф

1675. Обобщенный лапласиан и теория выметания мер. Мацусита (Generalized laplacian and balayage theory. Matsushita Shin-ichi), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1957, A8, № 1, 57—90 (англ.)

Строится абстрактная теория потенциала и устанавливается связь с классическими задачами. Автор отмечает использование идеи Л. Шварца при введении обобщенного лапласиана и теоремы Крейна-Мильмана при выметании мер. Пусть D обозначает область в локально компактном пространстве E; $\mathfrak{L}^+(D)$ — выпуклое множество вещественных (либо комплекснозначных) функций, определенных в D и удовлетворяющих условиям:

1) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $f \in \mathfrak{L}^+(D)$, $g \in \mathfrak{L}^+(D)$ влечет $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{L}^+(D)$;

2) если G есть открытое непустое подмножество D, $f \in \mathfrak{L}^+(D)$, то равенство $|f(x)| = \infty$ невозможно на G;

3) если f, $g \in \mathfrak{L}^+(D)$ и $f(x) = g(x)$ для $x \in D$, за исключением неплотного множества точек D, то $f(x) = g(x)$ для всех точек $x \in D$.

Функции из $\mathfrak{L}^+(D)$ полунепрерывны снизу. Обозначим через $\mathfrak{L}(D)$ линейную оболочку $\mathfrak{L}^+(D)$. $\mathfrak{M}^+(D)$ обозначает выпуклое множество положительных мер Радона, определенных в D, и $\mathfrak{M}(D)$ — его линейная оболочка. „Локальным лапласианом" Δ_D (относительно D) называется линейная операция из $\mathfrak{L}(D)$ в $\mathfrak{M}(D)$ такая, что $\Delta_D(f) \in \mathfrak{M}^+(D)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathfrak{L}^+(D)$.

При этом предполагается, что $D_2 \subset D_1$ влечет $\mathfrak{L}^+(D_2) \supset \mathfrak{L}^+(D_1)$ и для любого $f \in \mathfrak{L}(D_1)$ выполняется равенство $\Delta_{D_2}(f) = (\Delta_{D_1}(f))_{D_2}$, где $(*)_{D_2}$ обозначает меру, сохраняющуюся в D_2 и равную нулю вне D_2; $\Delta_E = \Delta$.

Вводится „потенциальный оператор" Φ как линейная операция отображения линейного подпространства $\hat{\mathfrak{M}}(D)$ пространства $\mathfrak{M}(D)$ в пространство $\mathfrak{L}(E)$, удовлетворяющая условиям: 1) $\mu \in \hat{\mathfrak{M}}^+(D)$, где $\hat{\mathfrak{M}}^+(D) = \hat{\mathfrak{M}}(D) \cap \mathfrak{M}^+(D)$ влечет $\Phi(\mu) \in \mathfrak{L}^+(E)$; 2) выполняется равенство $\int \Phi(\mu)\, d\nu = \int \Phi(\nu)\, d\mu$, если интеграл существует (соотношение Фубини); 3) $\Delta_D \Phi(\mu) = \mu$ (Φ есть обращение лапласиана).

Для вещественного $\mathfrak{M}(D)$ и $\mu \in \mathfrak{M}^+(D)$ предполагается, что либо $\Phi(\mu) \in \mathfrak{L}^+(E)$, либо $\Phi(\mu)$ есть функция $\equiv \infty$; для относительно компактных D предполагается $\Phi(\mu) \in \mathfrak{L}_\infty(E)$ — классу функций, исчезающих на бесконечности. В случае относительной компактности D, автор предполагает $\hat{\mathfrak{M}}(D) = \mathfrak{M}(D)$. Через $\mathfrak{H}_G(D)$ обозначено множество всех $f \in \mathfrak{L}(D)$, для которых $\Delta_G(f) = 0$, где G есть подобласть D („гармонические" в G функции); $\mathfrak{H}(D) = \mathfrak{H}_D(D)$.

Доказывается (теорема 2), что в случае относительной компактности D, выполняется равенство $\mathfrak{L}(D)/\mathfrak{H}_G(D) = \mathfrak{M}(G)$ — в смысле изоморфизма линейных пространств, и каждый класс вычетов содержит в точности один потенциал $\Phi(\mu)$ меры μ из $\mathfrak{M}(G)$. Отсюда получается обобщенное разложение Ф. Рисса

$$f = \Phi[\Delta_G(f)] + f_G$$

и единственность этого разложения.

Для случая, когда E — локально компактная группа с мерой Хара dx и $\varphi(x)$ — непрерывная функция на E, равная нулю вне некоторого компактного множества, обозначим $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi \cdot dx)$; при этом выполняется равенство

$$\int_E f \cdot \varphi dx = \int_D \Phi(\varphi)\, d\Delta_D(f) + \int_E f_D \varphi dx.$$

При $D = E$ и $f_D = 0$ отсюда получается формула Бохнера.

Вводится ядро $\Phi(x, y)$, отвечающее оператору Φ: $\Phi(x, y) = \Phi(\varepsilon_x)(y)$, где ε_x есть мера массы $+1$, сосредоточенная в точке x. Потенциал $\Phi(\mu)$ реализуется формулой

$$\Phi(\mu)(x) = \int \Phi(x, y)\, d\mu(y), \qquad \mu \in \hat{\mathfrak{M}}^+(E).$$

Рассматриваются потенциальные операторы „типа η", для которых $\dfrac{1}{r(x, y)} = \eta[\Phi(x, y)]$, где $r(x, y)$ есть расстояние между точками x и y и $\eta(t)$ — функция, непрерывная и монотонно растущая в промежутке $0 < t < \infty$ (либо $-\infty < t < \infty$).

„η-норма" определяется по формуле $\|f\|_\eta = \sup_{x \in E} \eta[|f(x)|]$; при этом предполагается, что $\lim_{t \to \infty} \eta^{-1}(t) = \infty$, где $\eta^{-1}(t)$ — обратная функция для $\eta(t)$. Число $c(X)$ называется „емкостью" компактного либо открытого множества X, если $c(X) = \eta(1) \cdot \sup(\|f\|_\eta^{-1})$, где sup взят по тем $f \in \mathfrak{L}^+(E)$, для которых $f = \Phi \Delta_X(f)$, $\|\Delta_X(f)\| = 1$. Более детальное исследование емкости произведено для случаев, когда $\eta(t \cdot s) \equiv \dfrac{\eta(t) \cdot \eta(s)}{\eta(1)}$ („тип отделимости") либо $\eta(t + s) \equiv \eta(t)\eta(s)$ („тип характера"). Это определение емкости обобщает, для соответственных случаев, другие известные определения.

Для построения „выметания меры" вводится пространство $H(D)$, состоящее из отождествлений функций f из $\mathfrak{L}^+(E)$, для которых $\Delta(f) \in \mathfrak{M}(E - D)$, по норме $\|f\|_D = \sup_{x \in D} |f(x)|$, где $\overline{D}$ компактно. При этом предполагается выделенным множество Γ из $\overline{D}$, для которого $\|f\|_D = \sup_{x \in \Gamma} |f(x)|$. Кроме того, предполагается, что для $x_1 \neq x_2$ из $\overline{D}$ имеется z из $E - \overline{D}$ такое, что $\Phi(x_1, z) \neq \Phi(x_2, z)$, и некоторое пространство $B_0(E)$ ограниченных потенциалов на E плотно в пространстве $C(E)$ всех функций, непрерывных на E, где E — любое компактное подмножество E. Через $\mathfrak{M}_0(D)$ обозначена совокупность всех μ из $\mathfrak{M}^+(D)$, для которых $\|\mu\| = \int d\mu = 1$; аналогично вводится $\mathfrak{M}_0(F)$. $\mu\hat{}$ из $H(D)^*$ сопряженного пространства) образуется по формуле $\mu\hat{}(f) = \int f d\mu$.

Из теоремы 1 статьи референта (Докл. АН. СССР 1952, 87, № 1) следует, что $\{\varepsilon_x\hat{}\}_{x \in \overline{\Gamma}}$ содержит множество Ext $\overline{\mathfrak{M}}_0\hat{}(D)$ экстремальных точек выпуклого и компактного (в слабой топологии $H(D^*)$) множества $\overline{\mathfrak{M}}_0\hat{}(D)$, где $\overline{\mathfrak{M}}_0\hat{}(D) = \{\mu\hat{}\}_{\mu \in \overline{\mathfrak{M}}_0(D)}$ и $\overline{\mathfrak{M}}_0(D)$ есть замыкание (по мере) множества $\mathfrak{M}_0(D)$, Γ_0 обозначает множество точек $\overline{\Gamma}$, порождающих точки Ext $\overline{\mathfrak{M}}_0\hat{}(D)$.

По замечанию к теореме 4 в статье референта (Докл. АН. СССР, 1952, 83, № 3), для каждого μ из $\mathfrak{M}_0(D)$ имеется μ_Γ из $\mathfrak{M}_0(\overline{\Gamma})$ такая, что $\mu\hat{} = \hat{\mu}_\Gamma$; при этом $\Phi(\mu) = \Phi(\mu_\Gamma)$ вне Γ. Мера μ_Γ и является „выметанием" меры μ относительно Γ.

Автор не ссылается на указанные здесь общие теоремы референта, а доказывает существование Γ_0 и меры μ_Γ в специальной ситуации данной статьи. На границе $\overline{D}$ доказывается, что $\Phi(\mu) = \Phi(\mu_\Gamma)$ с точностью

до множества емкости нуль. Когда Γ_0 содержится в границе $\bar{D}$, точки Γ_0 называются „регулярными". Доказывается (теорема 14) существование выметания („собственное выметание") μ^0_Γ, характеризуемого как мера из $\mathfrak{M}^+(D)$, потенциал которой $\Phi(\mu^0_\Gamma)$ равен минимуму всех $\Phi(\nu)$ для ν, удовлетворяющих условию: $\Phi(\nu) = \Phi(\mu)$ на $E - \bar{D} \cup \Gamma_0$ и на границе $\bar{D}$ — с точностью до множества емкости нуль. С помощью обобщенной формулы Рисса автор, следуя Картану (H. Cartan), строит собственное выметание $f \in \mathfrak{L}^+(E)$ (выметание для функций).

Дано обобщение результатов на случай, когда замыкание $\bar{D}$ не компактно.

Даны примеры, среди которых — преобразование Фурье и теория ньютонова потенциала при $E = R^n$ (в евклидовом пространстве).

При некоторых ограничениях (общего характера) на D и $\mathfrak{L}^+(D)$ дается решение обобщенной проблемы Дирихле, именно, доказывается, что всякой функции f, непрерывной на границе ∂D области $\bar{D}$ (∂D — компактно и содержит Γ_0), отвечает функция $\tilde{f}$, „гармоническая" относительно D, ограниченная на $\bar{D}$ и удовлетворяющая условию $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, для $x \in D$, $x_0 \in \Gamma_0$. Рассматривается также другой аспект проблемы Дирихле.

Д. П. Мильман

1676. К теории пространств Сакса. Орлич (Contribution to the theory of Saks spaces. Orlicz W.), Fundam. math., 1957, **44**, № 3, 270—294 (англ.)

Пусть X — линейное пространство, в котором введены две нормы: фундаментальная $\|\ \|$ и „со звездочкой" $\|\ \|^*$. Если $d(x_n, x_0) \to 0$ и $\|x_n\| = O(1)$, то последовательность $\{x_n\}$ называется ω-сходящейся ($x_n \overset{\omega}{\to} x_0$). В множестве $X_s = E_x\{\|x\| \leqslant 1\}$ вводится метрика: $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|^*$. Полученное метрическое пространство обозначается $X_s(\omega)$. Если $X_s(\omega)$ полно, то оно называется пространством Сакса. При этом, вообще говоря, X может быть неполным относительно каждой из норм $\|\ \|$ и $\|\ \|^*$. В первой части работы даны некоторые дополнения к более ранним результатам (РЖМат, 1956, 8135). Некоторые теоремы этой части: Если $X_s(\omega)$ — пространство Сакса, то X полно относительно нормы $\|x\|_0 = \max(\|x\|, \|x\|^*)$. Дистрибутивный оператор U, отображающий X в линейное нормированное пространство Y, называется $(X_s(\omega), Y)$-линейным, если для x_n и $x_0 \in X_s(\omega)$ из $x_n \overset{\omega}{\to} x$ следует $U(x_n) \to U(x)$. Каждый линейный функционал ξ в $X_s(\omega)$ может быть представлен в виде $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — линейные функционалы, определенные соответственно в нормированных пространствах $(X, \|\ \|)$ и $(X, \|\ \|^*)$; кроме того, $\|\xi\|_0 = \|\xi_1\| + \|\xi_2\|^*$. Пусть U_n — последовательность $(X_s(\omega), Y)$-линейных операторов. Последовательность $\|U_n(x)\|$ ограничена для каждого $x \in X$ в том и только в том случае, если $\|U_n(x)\| \leqslant k\|x\|_0$.

Во второй части исследуются линейные функционалы в пространстве Сакса M_s^α функций, ограниченных на всей оси и суммируемых со степенью $\alpha \geqslant 1$, с нормами:

$$\|x\| = \sup |x(t)|, \quad \|x\|^* = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^\alpha dt\right\}^{1/\alpha}$$

В третьей части даны некоторые приложения общих теорем к установлению непрерывности дистрибутивных операторов в различных пространствах функций.

М. И. Кадец

1677. Операторные свойства полиномов наилучшего приближения. Никольский В. Н., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 353—358

Изложены (с доказательствами) те же результаты что и в докладе автора на Третьем Всесоюзном математическом съезде (РЖМат, 1957, 6493).

З. С. Агранович

1678. Обобщение пространств L^p. Шварц (Généralisation des espaces L^p. Schwartz L.), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, **6**, № 3, 241—250 (франц.)

Пусть X — локально компактное топологическое пространство со счетной базой на бесконечности, $1 \leqslant p < \infty$. Если $\mu \geqslant 0$ — мера в X и $f \in L^p(X, \mu)$, то $f^{[p]}\mu$ (знаком $[p]$ обозначается возведение модуля комплексного числа в степень p без изменения аргумента) определяет ограниченную (комплекснозначную) меру, которая обозначается (f, μ). Идентичные меры $f^{[p]}\mu$ и $g^{[p]}\nu$ считаются эквивалентными ($(f, \mu) \sim (g, \nu)$), каждый класс эквивалентности называется ограниченной $1/p$-мерой, а совокупность этих классов обозначается через $H^p = H^p(X)$. В H^p естественно вводятся линейные действия и норма $\|\xi\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ (если $(f, \mu) \in \xi$), причем H^p оказывается банаховым пространством. H^p можно получить как индуктивный предел его подпространств $H^p(\mu)$ (μ—мера $\geqslant 0$) классов (f, μ) ($f \in L^p(X, \mu)$); рассматриваются некоторые свойства таких подпространств. Если $\xi \in H^p$, $\eta \in H^q$, $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} \leqslant 1$, то можно естественно определить мультипликативное произведение $\xi\eta \in H^r$. Если $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, то H^p и $H^{p'}$ являются дуальными пространствами относительно билинейной формы $\int_X d(\xi\eta)$ ($\xi \in H^p$, $\eta \in H^{p'}$). H^2 является гильбертовым пространством. В H^p естественно вводится упорядоченность (частичная). Более широкоечем H^p пространство H^p_{loc} порождается парами (f, μ), в которых $\mu \geqslant 0$, а f локально интегрируема в p-й степени по мере μ. Если $\xi \in H^p_{\text{loc}}$, $g \in H^p_{\text{loc}}$ ($|\xi|^p$) (ξ — мера, g — функция), то $g\xi = \left(g^{[p]}\, \xi^{[p]}\right)^{\left[\frac{1}{p}\right]} \in H^p_{\text{loc}}$; в частности, если $(f, \mu) \in \xi \in H^p_{\text{loc}}$, то $\xi = f\sqrt{\mu}$. При $\xi, \eta \in H^p_{\text{loc}}$ получается разложение η относительно меры $|\xi|$, аналогичное известному разложению Лебега. Автор указывает на возможную применимость введенных понятий к преобразованию Фурье на локально компактных абелевых группах и к волновым функциям в квантовой механике.

А. Д. Мышкис

1679. К абсолютно сходящимся рядам. Шалат (K absolútne konvergentnýmradom. Šalát Tibor), Mat.-fyz. časop., 1957, **7**, № 3, 139—142 (словацк.; рез. русск.)

Пусть $\{C_i\}$ — последовательность непустых множеств комплексных чисел, удовлетворяющих условиям: 1) множество $\bigcup C_i$ ограничено; 2) каждое множество C_i компактно; 3) C_i содержит больше чем одно число для бесконечного множества значений i. Пусть, далее, $\{a_i\}$ — последовательность элементов банахова пространства X, для которых $\sum \|a_i\| < \infty$. Якубик (РЖМат, 1956, 5940) доказал, что множество элементов $w \in X$, представимых в виде $w = \sum c_i a_i$ ($c_i \in C_i$), является совершенным. Автор показывает, что утверждение Якубика остается справедливым, если условие 1) отбросить, а условие $\sum \|a_i\| < \infty$ заменить более слабым условием $\sum K_i \|a_i\| < \infty$, где $K_i = \sup_{z \in C_i} |z|$.

Г. Ф. Кангро

1680. Замечание о конечномерных универсальных банаховых пространствах. Бессага (A note on universal Banach spaces of a finite dimensions. Bessaga G.), Bull. Acad. polon. sci. sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 2, 97—101, VIII (англ.; рез. русск.)

Доказана теорема: Пусть $n > 2$ — произвольное натуральное число. Не существует n-мерного пространства Банаха, универсального для всех двумерных B-пространств, сферы которых являются $(2n+2)$-угольниками. Эта теорема дает отрицательный ответ на вопрос Мазура: существует ли конечномерное пространство Банаха, универсальное для всех двумерных банаховых пространств. Поставлены три проблемы относительно универсальных пространств. М. И. Кадец

1681. **Субрефлексивные нормированные линейные пространства. Фелпс** (Subreflexive normed linear spaces. Phelps R. R.), Arch. Math., 1958, 8, № 6, 444—450 (англ.)

Пусть E — линейное нормированное пространство, E^* — его сопряженное, P — множество всех линейных функционалов, достигающих своей верхней грани на единичной сфере пространства E. Известно, что если E рефлексивно, то $P = E^*$. Обратную теорему для сепарабельных банаховых пространств доказал Джеймс (РЖМат, 1958, 4838). Таким образом, для сепарабельных пространств условие $P = E^*$ эквивалентно рефлексивности. Те линейные нормированные пространства, для которых P всюду плотно (по норме) в E^*, автор называет субрефлексивными. По мнению автора, есть основания полагать, что всякое пространство Банаха субрефлексивно.

Основной целью статьи является отыскание достаточных, а также необходимых и достаточных условий субрефлексивности. Вводится специальный класс замкнутых выпуклых множеств, а также некоторые другие понятия, пользуясь которыми, автор получает искомые условия. В качестве образца приведем теорему: Если E^* локально равномерно выпукло, то E — субрефлексивно (нормированное пространство называется локально равномерно выпуклым, если из условий $\|x\| = \|x_n\| = 1$ и $\|x + x_n\| \to 2$ следует $\|x - x_n\| \to 0$. При этом E может не быть рефлексивным. Рассмотрено несколько известных (например $C(X)$, где X — компакт) субрефлексивных, но не рефлексивных пространств Банаха и для них указаны соответствующие P (без доказательства плотности). Дан пример линейного нормированного (но неполного) пространства, которое:) не является субрефлексивным; 2) имеет рефлексивное пополнение, 3) изоморфно некоторому субрефлексивному пространству.

К статье дано примечание редакции журнала, в котором указывается, что автор сообщил о наличии ошибки в доказательстве теоремы 1. 2. Исправление будет помещено в одном из следующих номеров.

В. Н. Никольский

1682. **О некоторых приложениях одной теоремы Ф. Рисса. Хаймович А.**, Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 5, 763—764

Показано, что с помощью теоремы Рисса об общей форме линейного функционала можно непосредственно установить существование функции Грина для некоторых эллиптических граничных задач второго порядка. М. Ш. Бирман

1683. **Векторные меры и линейные операции. Динкуляну** (Mesures vectorielles et opérations linéaires. Dinculeanu Nicolae), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 16, 2328—2331 (франц.)

Изучаются векторные меры, заданные на компактном пространстве, со значениями в банаховом пространстве. Дается условие „регулярности" рассматриваемых мер (если интеграл по регулярной мере для непрерывных векторных функций равен нулю, то и сама мера равна нулю). Получаются условия представимости линейных операций в виде интегралов по векторной мере, аналогичные результатам М. К. Гавурина, И. М. Гельфанда, Данфорда и др. В. Э. Лянце

1684. **О подобии, инвариантных множествах и унитарной эквивалентности некоторых операторов типа Вольтерра. Калиш** (On similarity, reducing manifolds, and unitary equivalence of certain Volterra optrators. Kalisch G. K.), Ann. Math., 1957, **66**, № 3, 481—494 (англ.)

Пусть в треугольнике $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ задана комплекснозначная ограниченная и измеримая функция $F(x, y) = (y - x)^{m-1} G(x, y)$; где m — натуральное число, $\operatorname{Im} G(x, x) = 0$, $G(x, x) \neq 0$. Функция $F(x, y)$ порождает в пространстве $L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ ограниченный квазинильпотентный оператор

$$T_F f(x) = \int_x^1 F(x, y) f(y)\, dy. \qquad (1)$$

Рассмотрим в этом же пространстве оператор

$$T_E f(x) = \int_x^1 f(y)\, dy.$$

Доказываются следующие утверждения.

1) Если $m = 1$ и функция $G(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то операторы T_F и cT_E, где

$$c = \operatorname{sign} G(x, x) \int_0^1 |G(u, u)|\, du,$$

подобны, т. е. существует такое линейное непрерывное и обратимое отображение P пространства L_p на себя, что $cT_E = P^{-1} T_F P$.

2) Пусть m произвольно, а функция $G(x, y)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий: а) $G(x, y)$ аналитична, б) $G(x, y) = g(y - x)$, где g — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда оператор T_F подобен оператору $c_1 T_E^m$, где

$$c_1 = \operatorname{sign} G(x, x) \left(\int_0^1 |G(u, u)|^{1/m}\, du \right)^m. \qquad (2)$$

3) Определим оператор $T^r{}_E$ для любого $r \geqslant 1$ формулой

$$T^r{}_E f(x) = \int_x^1 \frac{(y - x)^{r-1}}{\Gamma(r)} f(y)\, dy.$$

Если c_1 и c_2 вещественны, а r_1 и $r_2 \geqslant 1$, то операторы $c_1 T_E^{r_1}$ и $c_2 T_E^{r_2}$ подобны только в том случае, когда $c_1 = c_2$, $r_1 = r_2$.

Обозначим через H_x подпространство в $L_p[0,1]$, состоящее из функций, равных нулю на промежутке $[x, 1]$. Будем называть оператор T_F одноклеточным, если каждое его инвариантное подпространство совпадает с одним из подпространств H_x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Доказывается, что оператор T_F будет одноклеточным, если на функцию $F(x, y)$ наложить ограничения, указанные в 1) либо в 2).

В статье также рассматриваются критерии унитарной эквивалентности операторов типа (1). Отметим следующий результат:

Пусть T_F — одноклеточный оператор, действующий в $L_2[0,1]$. Если $F(x, y) = (y - x)^{m-1} G(x, y)$, причем функ-

ция $G(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в окрестности отрезка $y = x$, $\mathrm{Im}G(x,x) = 0$ и $G(x, x) \neq 0$, тогда существует единственный оператор T_{F_1}, где $F_1(x, y) = (y - x)^{m-1} G_1(x, y)$, $\mathrm{Im}\, G_{1x}(x,x) = \mathrm{Im}G_{1y}(x,x) = 0$, $G_1(x, x) = c_1$, унитарно эквивалентный оператору T_F. Постоянная c_1 определяется из формулы (2).

Во всех теоремах о линейной или унитарной эквивалентности двух операторов дается конструкция того оператора, который эту эквивалентность осуществляет.

Результаты реферируемой статьи частично совпадают с результатами Л. А. Сахновича (РЖМат, 1959, 471).

М. С. Бродский

1685. Спектральная теория операторов в банаховом пространстве. Бишоп (Spectral theory for operators on a Banach space. Bishop Errett), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 414—445 (англ.)

Развиваются результаты, изложенные, например, в статье Данфорда (РЖМат, 1955, 5132), по теории „скалярных" операторов вида

$$S = \int z dE(z) \qquad (1)$$

и „спектральных" операторов, получаемых из (1) добавлением перестановочного с S обобщенного нульстепенного оператора в комплексном банаховом пространстве B. Здесь $E(S)$ есть спектральная мера, т. е. вполне аддитивная (по норме векторов B) функция борелевских множеств S комплексной плоскости $X = \{z\}$, значения которой суть ограниченные линейные операторы, удовлетворяющие условиям: $E(X) = I$, $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1) E(S_2)$ для всех S_1, S_2.

Основное понятие, систематически изучаемое и применяемое автором, — это векторная мера (vector-valued measure) — вполне аддитивная (по норме векторов) векторная функция множества $m = m(S)$. Из общих свойств банаховых пространств следует существование у m конечной „нормы" $\|m\| = \sup \| \sum \lambda_i m(S_i) \|$, где sup берется по всем комплексным $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с $|\lambda_i| \leqslant 1$ и всем попарно непересекающимся $S_1, \ldots, S_n$. С этой нормой множество всех мер m становится комплексным банаховым пространством Q. Интегральная операция

$$\int f(z)\, dm(z), \qquad (2)$$

рассматриваемая на пространстве $\mathfrak{M}(X)$ ограниченных измеримых функций $f(z)$, исчезающих на ∞, с нормой $\|f\| = \sup |f(z)|$, имеет непосредственный смысл на ступенчатых $f(z)$ и представляет на них ограниченное линейное преобразование из $\mathfrak{M}(X)$ в B с нормой $\|m\|$; следовательно, эта операция определена для всех $f(z) \in \mathfrak{M}(X)$. Доказывается, что в рефлексивном пространстве B (впредь только они и рассматриваются) всякая ограниченная линейная операция из $\mathfrak{M}(X)$ в B имеет вид (2). „Неопределенный интеграл" $\int_S f(z)\, dm(z)$ является векторной мерой.

Трансформацией (в отличие от оператора — ограниченной трансформации) в B автор называет замкнутое линейное преобразование T со всюду плотной областью определения $D(T)$; совокупность всех таких T обозначена через $\mathfrak{T}$, совокупность сопряженных трансформаций T^* в сопряженном пространстве B^* — через $\mathfrak{T}^*$. Относительно данной $T \in \mathfrak{T}$ векторная мера $m(S)$ называется T-мерной, если для всякого ограниченного S имеем $m(S) \in D(T)$ и $Tm(S) = \int_S z dm(z)$ (это есть обобщение понятия дифференциального решения; см., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, V, М.-Л., 1947, 362. *Реф.*). Доказывается, что каждая T-мера m „сосредоточена" на спектре $\sigma(T)$ трансформации T, т. е. $m(S) = m(S \cap \sigma(T))$.

T-мера m и T^*-мера μ, сосредоточенные соответственно на непересекающихся множествах S_1 и S_2, ортогональны, т. е. для всяких борелевских множеств U и V значение $\langle m(U), \mu(V) \rangle$ линейного функционала $\mu(V) \in B^*$ на элементе $m(U) \in B$ равно нулю.

Для выяснения топологических (используемых далее) свойств зависимости T-меры от T вводится понятие сильной топологии в $\mathfrak{T}$; это есть окрестностная топология, для которой каждая окрестность $O(T_0, M, \varepsilon)$ трансформации $T_0 \in \mathfrak{T}$ определяется произвольным конечномерным подпространством $M \subset D(T_0)$, произвольным $\varepsilon > 0$ и состоит из всех тех $T \in \mathfrak{T}$, для которых $D(T) \supset M$ и $\|Tx - T_0 x\| < \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in M$. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 2. 4. Пусть T, $T_\alpha \in \mathfrak{T}$, α пробегает упорядоченное множество индексов и при этом $T_\alpha^* \to T^*$ в сильной топологии $\mathfrak{T}^*$; пусть m_α есть T_α-мера с $\|m_\alpha\| < c$ для всех α ($c > 0$ — постоянная) и m — предельная точка в Q последовательности m_α в слабой операторной топологии (по отношению к построенной выше операции $\int f(z)\, dm(z)$ из $\mathfrak{M}(X)$ в B, т. е. $\langle \int f(z) dm_\alpha(z), u \rangle \to \langle \int f(z)\, dm(z), u \rangle$ с возрастанием α). Тогда m есть T-мера.

Применение построенных выше понятий к скалярным трансформациям вида (1) основано на том, что $E(\,)x$ (это обозначение меры, значения которой суть $E(S)x$) при каждом $x \in B$ есть векторная мера, и тогда трансформация (1) определяется для всех тех x, для которых функция z интегрируема по мере $E(\,)x$ (в смысле сходимости интегральных сумм по норме векторов). Из теоремы 2. 4 вытекает следующий результат:

Теорема 3. 1. Трансформация $T \in \mathfrak{T}$ является скалярной тогда и только тогда, когда каждый $x \in B$ „имеет" T-меру (т. е. $m(X) = x$ для некоторой T-меры m) и каждый $u \in B^*$ имеет T^*-меру. Если T есть скалярная трансформация, то каждый $x \in B$ имеет единственную T-меру. Если каждый $x \in B$ имеет единственную T-меру, то T есть расширение скалярной трансформации, а если T при этом ограничена, то она является скалярным оператором.

Полезной характеристикой скалярной трансформации T вида (1) является величина $|||T||| = \sup_{x \in B} (\|E(\,)x\| / \|x\|)$. Рассматривается множество G_c всех скалярных трансформаций с $|||T||| \leqslant c$ ($c > 0$ — постоянная) и доказывается следующая теорема, основная в статье:

Теорема 3. 2. Пусть T принадлежит замыканию $\overline{G}_c$ множества G_c в сильной топологии (определенной выше). Тогда существует операторная функция $E(\,)$, определенная на борелевских множествах и такая, что: 1) для каждого $u \in B^*$ $E^*(\,)u$ есть T^*-мера и $\|E^*(\,)u\| \leqslant c\|u\|$; 2) если $x \in D(T)$, то $Tx = \int z dE(z)x$; 3) если T принадлежит замыканию той части G_c, спектр трансформации которой лежит в данном замкнутом множестве C, то $E(S) = 0$ при $S \cap C = 0$; 4) если B есть гильбертово пространство и $c = 1$, то $E(S)$ есть положительный эрмитов оператор и $\|Tx\|^2 = \int |z|^2 d(E(z)x, x)$ для всех $x \in D(T)$.

Из этой теоремы для гильбертовых пространств следует не только основная спектральная теорема для самосопряженных трансформаций ($T = T^*$), но и обобщенная спектральная теорема для симметрических трансформаций ($T \subset T^*$), вытекающая из пункта 4) теоремы.

Далее рассматривается класс $\Gamma \subset \mathfrak{T}$ тех трансформаций T, для которых множество значений всех T-мер всюду плотно в B и множество значений всех T^*-мер всюду плотно в B^*. Для такой трансформации и каждой измеримой по Борелю функции $f(z)$ комплексного переменного z естественным образом определяется трансформация $f(T)$. Соответствие $f(z) \to f(T)$ обладает обычными свойствами функции от оператора.

Предыдущие построения в основном распространяются (по-прежнему в рефлексивных пространствах) на спектральные операторы (см. начало реферата) путем введения понятия слабой T-меры, обобщающей понятие T-меры. Предварительно доказывается, что Tm есть векторная мера вместе с m, если все значения $m(S)$ меры m принадлежат $D(T)$. Далее в совокупности $Q_0 \subset Q$, состоящей из мер ν, сосредоточенных на ограниченных борелевских множествах, определяется преобразование Ω по формуле $(\Omega\nu)(S) = \int_S z\,d\nu(z)$. Если $m \in Q$, то для всякого ограниченного S_0 мера $\nu(S) = m(S \cap S_0)$ принадлежит Q_0 и называется куском (slice) меры m. Теперь вводится определение: мера m называется слабой T-мерой, если для всякого ее куска ν и любого натурального n существует $T^n\nu$ и $\|(T - \Omega)^n \nu\|^{1/n} \to 0$ при $n \to \infty$.

С помощью этого понятия сформулируем для спектральных операторов, например, аналог теоремы 3. 1:

Теорема 5. б. Оператор T в рефлексивном банаховом пространстве B является спектральным тогда и только тогда, когда каждый $x \in B$ имеет слабую T-меру и каждый $u \in B^*$ имеет слабую T^*-меру. М. К. Фаге

1686. О гармоническом анализе на локально компактной группе. Хиршфельд (Sur l'analyse harmonique dans les groupes localement compacts. Hirschfeld Rudi), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 8, 1138—1140 (франц.)

Пусть G — локально компактная группа, μ — правоинвариантная мера Хара и $\{U_t;\ t > 0\}$ — семейство областей с компактным замыканием. Пусть выполняются условия:

а) для любых $\varepsilon > 0$ и $y \in G$ существует число $a > 0$ такое, что (Δ — симметрическая разность)

$$\mu(yU_t \Delta U_t) < \varepsilon\,\mu(U_t) \text{ для } t \geqslant a,$$

б) для $c > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует $b > 0$ такое, что для всех $t \geqslant b$ существуют элементы $x_1, \ldots, x_n \in G$, удовлетворяющие условиям

$$x_i U_c \cap x_j U_c = \varnothing\ (i \neq j) \quad \text{и} \quad \mu(U_t \Delta \cup_{i=1}^n x_i U_t) < \varepsilon\,\mu(U_t).$$

Для комплексной $f(x)$, $x \in G$, суммируемой на любом множестве U_t, положим

$$\overline{M}_x\{f(x)\} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{\mu(U_t)} \int_{U_t} f(x)\,d\mu(x). \qquad (1)$$

Если $f(x)$ на G почти периодическая, то (1) совпадает со средним по Нёйману.

При помощи среднего значения (1) автор строит на G теорию почти периодических функций Безиковича.

Примечание референта. Другое построение теории почти периодических функций Безиковича на локально компактной группе см. в работе Фёльднера РЖМат, 1958, 9020). М. Б. Левитан

1687. Три проверочных проблемы в теории операторов. Кейдисон, Сингер (Three test problems in operator theory. Kadison Richard V., Singer I. M.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1101—1106 (англ.)

Капланским в его монографии (РЖМат, 1958, 154 К) были указаны три проблемы теории абелевых групп, по ответам на которые можно судить о соответствии теории существу предмета. Там же указывалось, что аналогичные проблемы естественно сформулировать и в других теориях, в частности, в теории операторов в гильбертовом пространстве. Авторы формулируют указанные вопросы следующим образом:

1. Пусть A и B — операторы, действующие в гильбертовых пространствах H и K соответственно. Если операторы $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, действующие соответственно в $H \otimes H$ и $K \otimes K$, унитарно эквивалентны, то будут ли унитарно эквивалентны операторы A и B?

2. Если $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ унитарно эквивалентны, будут ли унитарно эквивалентны B и C?

3. Если оператор A унитарно эквивалентен оператору BF, а B унитарно эквивалентен оператору AE, где E — оператор, перестановочный с A, а F — с B, то будут ли унитарно эквивалентными A и B?

Первая и третья проблемы решаются положительно. Ответ на вторую положителен лишь при некоторых дополнительных предположениях. Г. П. Акилов

1688. Соотношения между спектром бесконечной матрицы и спектрами ее секций. Смарт (Relations between the spectrum of an infinite matrix and the spectra of its sections. Smart D. R.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 357—367 (англ.)

Если $H = \| h_{ij} \|_{i,j=1}^{\infty}$ — бесконечная матрица, то ее n-й секцией называется матрица $H_n = \| h_{ij} \|_{i,j=1}^{n}$. Рассматривается лишь тот случай, когда матрица H такова, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |h_{ij}|^2 < \infty \quad (j = 1, 2, \ldots), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |h_{ij}|^2 < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и $\{g_j\}_1^{\infty}$ — некоторый его фиксированный ортогональный базис. Пусть $\mathfrak{H}_0$ — линейная оболочка базиса $\{g_j\}_1^{\infty}$; $T_1(H)$ обозначает линейный оператор такой, что $\mathfrak{H}_0$ — его область определения, а $T_1(H) g_j = \sum_{l=1}^{\infty} h_{lj} g_l$ ($j = 1, 2, \ldots$), а $T(H)$ — замыкание оператора $T_1(H)$. Спектром бесконечной матрицы H называется спектр оператора $T(H)$; матрица H называется самосопряженной, если оператор $T(H)$ является самосопряженным.

$\gamma(H)$ обозначает совокупность всех точек λ комплексной плоскости, любая окрестность которых содержит хотя бы одно собственное число матрицы H_m при всех достаточно больших m; иными словами, $\gamma(H)$ — нижний топологический предел последовательности $\{\sigma(H_m)\}_1^{\infty}$ спектров секций матрицы H; $\gamma_n(H)$ обозначает совокупность всех точек λ комплексной плоскости, любая окрестность которых содержит хотя бы n собственных чисел (учитывая их кратность) матицы H_m для бесконечного множества значений m. В частности, $\gamma_1(H)$—

верхний топологический предел последовательности $\{\sigma(H_m)\}_1^\infty$. Вводится обозначение $\gamma_\infty(H) = \cap_{n=1}^\infty \gamma_n(H)$. Ясно, что $\gamma(H) \supset \gamma_1(H)$ и $\gamma_1(H) \supset \gamma_2(H) \supset \cdots$.

Пусть $\sigma(H)$ — спектр оператора $T(H)$ (матрицы H), а $\alpha(H)$ — дополнение его поля регулярности (Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.—Л., 1950, 318). Ясно, что $\alpha(H) \subset \sigma(H)$.

Оказывается, что множество $\alpha(H)$ теснее связано с спектрами секций матрицы H, чем $\sigma(H)$. Приведем некоторые предложения, доказанные в статье.

1. Если матрица H такова, что все ее секции H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ являются нормальными, то $\gamma(H) \supset \alpha(H)$ и $\gamma_\infty(H) \supset \alpha'(H)$, где $\alpha'(H)$ — производное множество множества $\alpha(H)$.

2. Пусть

$$k_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left| h_{ij} \right|^2.$$

Тогда а) если $\lim k_n = 0$, то $\gamma_1(H) \subset \alpha(H)$; б) если $\overline{\lim}\, k_n = 0$, то $\gamma(H) \subset \alpha(H)$.

Рассматривается якобиева матрица $J = \| j_{rs} \|_{r,s=1}^{\infty}$, где $j_{rs} = 0$ при $|r - s| > 1$, $j_{rr} = a_r$ — вещественное число, $j_{r,r+1} = \overline{j_{r+1,r}} = b_r \neq 0$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Доказывается:

1) $\gamma_1(J) \supset \gamma(J) \supset \alpha(J) \supset \gamma_2(J) \supset \gamma_3(J) \supset \gamma_\infty(J) \supset \alpha'(J)$;

2) если либо $b_n \to 0$, либо b_n ограничены, а $|a_n| \to \infty$ то $\gamma_1(J) = \alpha(J)$; если существует возрастающая последовательность n_2, стремящаяся к бесконечности и такая, что либо $b_{n_2} \to 0$, либо b_{n_2} и b_{n_2-1} ограничены, а $|a_{n_2}| \to \infty$, то $\gamma(J) = \alpha(J)$; 3) если J — самосопряженная матрица, то $\alpha'(J) = \gamma_\infty(J) = \gamma_3(J)$; если J — несамосопряженная матрица, то $\alpha(H)$ — пустое множество; 4) $\gamma(J) - \alpha(J)$ — дискретное множество; 5) $\alpha'(J)$ не изменится, если в матрице J изменить конечное количество элементов, причем так, чтобы матрица осталась якобиевой.

В статье приведены примеры, показывающие, что ни одно из четырех включений $\gamma_1(J) \supset \gamma(J) \supset \alpha(J) \supset \gamma_2(J) \supset \gamma_3(J)$ не является, вообще говоря, равенством. И. С. Кац

1689. Коммутаторы и абсолютно непрерывные операторы. Патнам (Commutators and absolutely continuous operators. Putnam C. R.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 2, 513—525 (англ.)

Продолжение и дальнейшее развитие результатов, полученных автором ранее (РЖМат, 1957, 8017). Рассматриваются коммутаторы

$$C = AB - BA, \quad D = AC - CA, \quad E = AD - DA$$

ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Пусть оператор A нормален и $A = \int z dK$ — его спектральное разложение. Точка нуль всегда является внутренней точкой множества W_E, представляющего собой замыкание множества точек (Ex, x) при $\|x\| = 1$ (определение внутренней точки см. в указанном выше реферате). Она является внутренней точкой множества W_D, если для какого-нибудь множества Z двумерной меры нуль выполняется условие $\int_Z dK = I$ (в частности, это имеет место для самосопряженных и унитарных операторов).

Самосопряженный или унитарный оператор называется абсолютно непрерывным, если $\int_Z dK = 0$ для любого множества Z одномерной меры нуль. В аналогичном определении для нормального оператора Z — множество двумерной меры нуль. Приводятся достаточные условия абсолютной непрерывности, связанные с расположением точки нуль по отношению к множеству W_C для самосопряженного и унитарного оператора и W_D — для нормального.

Далее полученные результаты применяются к рассмотрению некоторых тёплицевых и якобиевых матриц. Пусть $T = (c_{k-j})$ $(j, k = 0, 1, \ldots)$ — тёплицева матрица, порожденная последовательностью комплексных чисел c_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ таких, что $c_{-n} = \overline{c_n}$, $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Если оператор A с матрицей $a_{jk} = \begin{cases} 0 & k - j < 1 \\ c_{k-j} & k - j \geqslant 1 \end{cases}$ ограничен и $T = \int \lambda\, dE_\lambda$, то $\int_Z dE_\lambda < I$ для любого множества Z одномерной меры нуль. Приводятся некоторые условия, при которых матрица T оказывается абсолютно непрерывной или представимой в виде суммы абсолютно непрерывной матрицы и некоторой ганкелевой матрицы.

Доказывается, что якобиева матрица $D = (d_{ij})$, где $d_{i,i+1} = b_i$, $d_{i+1,i} = \overline{b_i}$ и $d_{ij} = 0$ в остальных случаях, абсолютно непрерывна при условии $0 < |b_1| < |b_2| < \ldots < \text{const}$. Ю. Л. Далецкий

1690. Проекторы, связанные с полиномами Якоби. Хершман (Projections associated with Jacobi polynomials. Hirschman I. I., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 286—290 (англ.)

Полиномы Якоби $P_n^{(\sigma,\tau)}(x)$ как функции от n являются собственными функциями самосопряженного оператора в конечных разностях $\Delta\alpha(n) = C(n)\alpha(n+1) + D(n)\alpha(n-1)$. Пусть Γ_λ — соответствующее разложение единицы. Доказывается, что при $\sigma \geqslant -1/2$, $\tau \geqslant -1/2$ имеет место неравенство

$$\| \Gamma_\lambda\, \alpha(n) \|_p \leqslant A(\sigma, \tau, p) \| \alpha(n) \|_p,$$

где A не зависит от λ и норма берется в смысле пространства l^p, $1 < p < \infty$. Аналогичный результат для разложения единицы, соответствующего дифференциальному оператору, связанному с полиномами Якоби, был получен Поллардом (Pollard H., Duke Math. J., 1949, 16, 189—191). Г. К. Энгелис

1691. Дальнейшее обобщение теоремы Гурса и Хейвуда и ее применения. Чжан Ши-сюнь (Chang Shih-hsun), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. szechuan, 1956, № 1, 31—48 (кит., рез. англ.)

Пусть $\mathfrak{H}$ — полное гильбертово пространство, $\{x_\alpha\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$, T — ограниченный линейный оператор, отображающий $\mathfrak{H}$ в себя; вводится обозначение:

$$t_{ij} = (Tx_j, x_i) \quad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Если $\| T \|^2 \equiv \sum_{i,j=1}^{\infty} |t_{ij}|^2 < \infty$, то T называется опе-

ратором с ограниченной двойной нормой, а число $|||T|||$ — двойной нормой оператора T.

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $\{A_h\}$ — последовательность операторов такая, что $|||A_h||| < \infty$ и $A_iA_j = A_jA_i = 0$ $(i \neq j)$. Если существует линейный оператор T такой, что $\lim_{n\to\infty} \left|\left|\left| T - \sum_{h=1}^{n} A_h \right|\right|\right| = 0$, то $\delta_T^*(\lambda) = \prod_{h=1}^{\infty} \delta_{A_h}^*(\lambda)$. Здесь $\delta_T^*(\lambda)$ и $\delta_{A_h}^*(\lambda)$ обозначают определители Карлемана — Фредгольма операторов T и A_h соответственно (когда n — конечное, см. стр. 349 книги Занена (РЖМат, 1957, 5736 К)

2. Пусть T — нормальный линейный оператор, т. е. $TT^* = T^*T$, причем $0 < |||T||| < \infty$. Тогда существует последовательность линейных ортогональных операторов $\{T_h\}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ с ограниченной двойной нормой такая, что

$$\delta_T^*(\lambda) = \prod_{h=1}^{\infty} \delta_{T_h}^* \lambda. \qquad (1)$$

3. Среди всех множителей произведения (1) существует по крайней мере один множитель $\delta_{T_h}^*(\lambda)$, имеющий нули, так что каждый нормальный оператор с ограниченной двойной нормой имеет по крайней мере одно собственное значение μ_{h_l}, причем абсолютное значение равняется некоторому особому значению λ_h этого оператора (особым значением оператора T называется собственное значение оператора $\sqrt{T^*T}$).

4. Если $\{\lambda_h\}$ — полная система особых значений нормального оператора T с ограниченной двойной нормой, то $\{\lambda_h^n\}$ является полной системой особых значений оператора T^n.

5. Для любого оператора T с ограниченной двойной нормой $\left|\left|\left| T \right|\right|\right|^2 = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-2}$; в частности, если T — нормальный оператор, то

$$\left|\left|\left| T^n \right|\right|\right| = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-2n} = \sum_{h=1}^{\infty} \left| \mu_h^{-2n} \right| \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\{\mu_h\}$ — означает полную систему собственных значений оператора T.

В предыдущей статье (Sci. Record, Sinica, 1952, 5, 11—16) автор рассматривал подобные теоремы только для интегральных операторов в L_2. Ши Чжун-цы

Примечание редакции. Теоремы 4 и 5 хорошо известны; например, теорема 4 — непосредственное следствие общей теоремы о вполне непрерывных нормальных операторах (Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М. — Л., 1950, 191).

1692. Функциональный анализ для общих операторов в гильбертовом пространстве. Шрейбер (A functional calculus for general operators in Hilbert space. Schreiber Morris), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 108—118 (англ.)

В гильбертовом пространстве H рассматриваются сжатия (операторы с нормой < 1). По теореме Б. Надя (РЖМат, 1954, 2626) каждое сжатие A определяет единственную операторную функцию $F(\sigma)$, заданную на (борелевских) множествах σ единичной окружности $C(|z| = 1)$ комплексной плоскости, имеющую своими значениями положительные самосопряженные операторы и такую, что $A^n = \int_C z^n \, dF(z)$ в смысле сильной топологии $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Такую функцию автор называет операторной мерой (о. м.). Носителем (support) $\Lambda(F)$ о. м. $F(\sigma)$ называется дополнение к сумме всех открытых нуль-множеств $F(\sigma)$.

Определяется нормированное кольцо $L_\infty(F)$ функций $f(z)$, заданных на $\Lambda(F)$, существенно ограниченных по о. м. $F(\sigma)$, с нормой $\|f\|_\infty = \inf_{F(\sigma)=I} \sup_{z\in\sigma} |f(z)|$ (I — единичный оператор). Для таких функций $f(z)$ существует функция от оператора $f(A) = \int_C f(z) \, dF(z)$ в сильной топологии, чем определяется отображение φ кольца $L_\infty(F)$ на некоторое множество $\varphi[L_\infty(F)]$ ограниченных линейных операторов $f(A)$. Для функции $f(z)$, аналитической при $|z| < 1 + \varepsilon$, доказывается совпадение $f(A)$ с интегралом $\frac{1}{2\pi i} \int f(z)(I - zA)^{-1} \, dz$ (по контуру, охватывающему спектр A), обычно служащим для определения $f(A)$ (см., например, п. 151 книги Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя (РЖМат, 1955, 5144). Для изучения отображения φ в $L_\infty(F)$ вводится (BP)-сходимость (сокращение от bounded pointwise); последовательность $f_n(z) \in L_\infty(F)$ сходится (BP) к $f(z)$, если $f_n(z)$ равномерно ограничены и $f_n(z)$ стремится к $f(z)$ почти всюду по о. м. $F(\sigma)$. Определяется множество функций $\Delta(F)$ (о котором заранее неизвестно, что оно есть часть $L_\infty(F)$, состоящее из всех многочленов и (BP)-пределов последовательностей многочленов.

Основные из доказываемых результатов:

Лемма 3. $\Delta(F) \subset L_\infty(F)$ и (BP)-сходимость в $\Delta(F)$ влечет сильную сходимость в $\varphi[L_\infty(F)]$.

Теорема 1. φ отображает линейное пространство $L_\infty(F)$ гомоморфно, не увеличивая нормы, преобразуя $f(z)$ в $f(A)^*$, а для элементов из $\Delta(F)$, сохраняя и произведение.

Следствие 3. Если о. м. $F(\sigma)$ оператора $A = \int z \, dF(z)$ с носителем $\Lambda(F) = C$ эквивалентна лебеговой мере, т. е. имеет с нею общие нуль-множества (автор ссылается на свой результат из другой статьи (РЖМат, 1957, 8754), что таковы все операторы с нормой < 1; кроме того, в реферируемой статье доказано, что $\Lambda(F) = C$; если A не унитарен (теорема 2), то $\Delta(F)$ (BP)-замкнуто и состоит из всех функций, являющихся почти всюду на C некасательными предельными значениями функций, аналитических и ограниченных внутри C.

Теорема 4. Если, в условиях следствия 3, спектр A содержит C, то φ есть изометрическое отображение пространства содержащихся в $\Delta(F)$ непрерывных функций на замыкание $\mathfrak{A}$ по равномерной топологии алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной операторами A и I; следовательно, $\mathfrak{A} \subset \varphi[\Delta(F)]$.

При доказательстве этих предложений существенно используется теорема М. А. Наймарка (Докл. АН СССР, 1943, 41, 359 - 361) о существовании спектральной (проекторной) меры $E(\sigma)$ в более широком гильбертовом пространстве $K \supset H$ такой, что $F(\sigma) = PE(\sigma)$, где P есть проектор из K на H.

Теорема 5. Оператор B перестановочен с $A = \int z \, dF(z)$ и A^* тогда и только тогда, когда он перестановочен со всеми $f(A)$ при $f(z) \in L_\infty(F)$.

Следствие 4. $A=\int z\,dF(z)$ перестановочен со всеми $F(\sigma)$ тогда и только тогда, когда он нормален.

Для нормального сжатия $A=\int z d\dot{F}(z)$ выводится формула, выражающая $F(\sigma)$ через спектральную функцию $E(\sigma)$ оператора A. М. К. Фаге

1693. К теории подпространств в линейных пространствах с индефинитной метрикой. Лоухиваара (Zur Theorie der Unterräume in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. Louhivaara Ilppo Simo. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 252, 11S.) (нем.)

Исправление к предыдущей работе автора того же названия (РЖМат, 1958, 483). Указывается, что условие (A): $Q(a,u_0)=0$ для всех $u_0\in U^0$ является только необходимым для существования Q-нормали из a на U. Достаточным же является условие (A'): Существует такое $\varkappa>0$, что $Q(a,u^0)=0$ для всех $u^0\in U^0_\varkappa$, где $U^0_\varkappa$ определяется следующим образом: пусть E_λ — спектральное семейство формы Q на U в метрике H, т. е.

$$Q(u,v)=\int\limits_{-1\leqslant\lambda<1}\lambda\,d_\lambda H(E_\lambda u,v)\qquad(u,v\in U).$$

Тогда $E^0_\varkappa=\int\limits_{-\varkappa\leqslant\lambda<\varkappa}dE_\lambda$, а $U^0_\varkappa=E^0_\varkappa U$. И. С. Иохвидов

1694. Об одном предложении Нёймана. Накамура, Умэгаки (On a proposition of von Neumann. Nakamura Masahiro, Umegaki Hisaharu), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 3, 142—144 (англ.)

Пусть M — полуконечный фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве, A — коммутативная W^0-подалгебра в M, p, q,... — последовательность проектирующих операторов из A, порождающая A. Для $x\in M$ рассматривается операция $x^{|p|q|\ldots}=\lim_r x^{|p|q|\ldots|r}$, где $x^{|p}=pxp+(1-p)x(1-p)$, $x^{|p|q|\ldots}=\left(x^{|p}\right)^{|q}$ и т. д. (обобщающая операцию перехода от матрицы к ее диагональной части). Эта операция была введена Нёйманом (Neumann J. von., Ann. Math., 1940, 41, 94—161), который высказал, но не доказал утверждение, что операция $x\to x^{|p|q|\ldots}$ зависит только от A, а не от выбора последовательности p, q,... В реферируемой статье доказывается это утверждение; доказательство основано на результатах Умэгаки (РЖМат, 1958, 9014) об условном ожидании в операторной алгебре. Кроме того, устанавливается, что A максимальна в M тогда и только тогда, когда операция $x\to x^{|p|q|\ldots}$ совпадает с операцией $x\to x^e$ условного ожидания, обусловленного алгеброй A. М. А. Наймарк

1695. Один результат о сопряженном пространстве к C^* алгебре. Гротендик (Un résultat sur le dual d'une C*-algèbre. Grothendieck A.), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 2, 97—108 (франц.)

Рассматриваются линейные эрмитовы функционалы на C*-алгебрах (полных нормированных *-алгебрах, в которых $|x^*x|=|x|^2$) A.

Основные результаты:

I. В A всякий непрерывный линейный эрмитов функционал f представляется и притом единственным образом в виде $f=v-w$, где v, w — положительные функционалы, причем $\|f\|=\|v\|+\|w\|$.

II. Обратно, если в полной нормированной *-алгебре A всякий непрерывный линейный эрмитов функционал f представляется в виде разности двух ограниченных положительных функционалов, то в A существует норма, эквивалентная исходной, в которой A есть C^*-алгебра.

При этом положительный функционал называется ограниченным, если он есть сужение на A положительного функционала в алгебре, полученной из A присоединением единицы.

III. Во втором сопряженном пространстве A'' и C^*-алгебре A можно определить операции умножения и инволюции, превращающие его в *-алгебру и притом единственным образом, так что для любого унитарного представления φ алгебры A в кольцо $L(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, второе сопряженное φ'' (рассматриваемое как отображение A'' в $L(H)$) есть *-представление.

В этом случае φ'' есть гомоморфизм алгебры A'' на слабо замкнутую алгебру, порожденную алгеброй $\varphi(A)$. При надлежащем φ отображение φ'' взаимно однозначно, следовательно, A'' — слабо замкнутая алгебра.

Норма второго сопряженного пространства A'' совпадает с нормой, в которой A'' есть C^*-алгебра. Положительные нормальные функционалы на A'' совпадают с функционалами, определенными положительными функционалами на A'.

IV. Пусть A — слабо замкнутая алгебра операторов в гильбертовом пространстве. Тогда всякий эрмитов ультраслабонепрерывный функционал u в A представляется и притом единственным образом в виде $u=v-w$, где v, w — положительные нормальные функционалы и $\|u\|=\|v\|+\|w\|$.

В заключение формулируется нерешенный вопрос.

Как указывает автор, предложение I (кроме единственности разложения) опубликовал ранее Такеда (РЖМат, 1956, 5351). М. А. Наймарк

1696. Топологические свойства W*-алгебр. Сакаи (On topological properties of W^*-algebras. Sakai Shôichirô), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 8, 439—444 (англ.)

Пусть A — C^*-алгебра и $\widetilde{A}$ — пространство, сопряженное с A. Подпространство $V\subset\widetilde{A}$ называется инвариантным, если оно инвариантно относительно всех операторов, сопряженных с операторами левого и правого регулярных представлений алгебры A. Пусть V_0 — линейное многообразие, натянутое алгебраически на совокупность всех положительных функционалов, содержащихся в данном замкнутом инвариантном подпространстве V. Автор доказывает, что V_0 совпадает с V. Доказано также утверждение (являющееся ответом на вопрос, поставленный Диксмье (РЖМат, 1957, 8773): Прямое произведение $M_1\otimes M_2$ двух W^*-алгебр M_1 и M_2, из которых по крайней мере одна чисто бесконечна (в смысле Диксмье), является чисто бесконечным.

Пусть I — дискретное, локально компактное пространство и ν — мера, сопоставляющая каждой точке I массу, равную 1. Пусть l^1 — пространство всех ν-суммируемых, l^∞ — пространство всех ν-существенно ограниченных и c_0 — пространство всех непрерывных, исчезающих на бесконечности, функций, заданных на I.

Как известно, $\widetilde{c_0}=l^1$, $\widetilde{l^1}=l^\infty$ и слабая сходимость в l^1 совпадает со сходимостью по норме в l^1 (Банах С., Курс функционального аналізу. Київ, 1948, стр. 119). Пусть далее H — гильбертово пространство, C — банахово пространство всех вполне непрерывных операторов в H, T — банахово пространство всех операторов со следом в H и B — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов в H. Известно, что $\widetilde{C}=T$, $\widetilde{T}=B$. В связи с этим Диксмье (Dixmier J., Ann. Math., 1950, 51, 387—408) поставил вопрос о том, не

совпадает ли $\sigma(T, B)$-сходимость по последовательности в T со сходимостью по норме.

Автор строит контрпример и отмечает, что такой же контрпример был построен Гротендиком (реф. 1695). Попутно доказаны также некоторые другие утверждения. В. Э. Лянце

1697. Матрицы порядка N над OW^*-алгеброй. Берберян ($N\times N$ matrices over an AW^*-algebra. Berberian S. K.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 1, 37—44 (англ.)

Доказывается, что алгебра матриц данного произвольного (конечного) порядка над произвольной данной AW^*-алгеброй также является AW^*-алгеброй. В. Э. Лянце

1698. Характеры полупростых групп Ли. Харишь-Чандра (The characters of semisimple Lie groups. Harish-Chandra), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 1, 98—163 (англ.)

Подробное изложение результатов, сообщенных автором ранее (РЖМат, 1957, 4184).

Примечание референта. Значительная часть результатов этой работы в более четкой и доступной форме получена независимо Ф. А. Березиным (РЖМат, 1957, 4975, 6490, реф. 1699). М. И. Граев

1699. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли. Березин Ф. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1957, **6**, 371—463

Подробное изложение результатов, в основном опубликованных ранее автором (РЖМат, 1957, 4975, 6490). В примечании при корректуре автор указывает, что часть этих результатов получил независимо Харишь-Чандра (реф. 1698). М. А. Наймарк

1700. Спектральное представление полугрупп нормальных операторов. Юнеску-Тулча (Spectral representation of semigroups of normal operators. Ionescu Tulcea Cassius), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, **44**, № 1, 44—45 (англ.)

Пусть G — локально компактная группа, S — локально компактное подпространство G, μ — сужение меры Хара группы G на S. Пусть выполнены условия: 1) $xy = yx \in S$, $(x, y \in S)$; 2) $\mu(U) > 0$ для любого подмножества $U \subset S$, открытого в S.

Комплекснозначная функция χ, определенная на S, называется характером S, если она непрерывна, $\chi \not\equiv 0$ и $\chi(ts) = \chi(t)\chi(s)$ для всех $s, t \in S$. Пусть E — множество характеров S, в котором введена топология равномерной сходимости на компактных подмножествах S. Через $\mathfrak{U}$ обозначим некоторое покрытие S открытыми (в S) относительно компактными подмножествами $X (\subset S)$. Для любой совокупности $\mathfrak{R} = (r(X))_{X \in \mathfrak{U}}$ чисел $r(X) \geqslant 1$ через $E(\mathfrak{R})$ обозначим подпространство характеров $\chi \in E$, удовлетворяющих неравенству $|\chi(t)| \leqslant r(X)^{1/2}$ для $t \in X$, $X \in \mathfrak{U}$. $E(\mathfrak{R})$ — локально компактно для любой совокупности $\mathfrak{R}$.

Через N_1 обозначим объект $\{H, U_t\}$, где H — гильбертово пространство, а $tU_t \to$ — слабо непрерывное отображение S на множество ограниченных нормальных операторов в H такое, что $U_t U_s = U_{ts}$ для любых $t, s \in S$. Для любой совокупности чисел $\mathfrak{R} = (r(X))_{X \in \mathfrak{U}}$ $(r(X) \geqslant 1)$ через $N_1(\mathfrak{R})$ обозначим подмножество объектов $\{H, U_t\} \in N_1$, удовлетворяющих неравенству $\|U_t\| \leqslant r(X)^{1/2}$ для $t \in X$, $X \in \mathfrak{U}$.

Теорема 1. Для любого $\{H, U_t\} \in N_1(\mathfrak{R})$ существует одно и только одно спектральное семейство $(\mu_{x,y})_{x,y \in H}$ на $E(\mathfrak{R})$ такое, что для $t \in S$, $x, y \in H$

$$(U_t x, y) = \int_{E(\mathfrak{R})} \chi(t) d\mu_{xy}(\chi) \quad (\alpha).$$

Условие (β): $\|\mu_{x,x}\| = \|x\|^2$ для любого $x \in H$ выполняется в том и только том случае, когда для любого $x \in H$ $(x \neq 0)$ существует такое $t \in S$, что $U_t x \neq 0$.

Через N_2 обозначим совокупность объектов $\{H, U_t\}$, где нормальные операторы U_t уже не обязательно ограничены, а отображение $t \to (U_t x, y)$ непрерывно для

$$x \in D = \bigcap_{t \in S} D(U_t) \text{ и } y \in H.$$

Теорема 2. Для любого $\{H, U_t\} \in N_2$ существует одно и только одно спектральное семейство $(\mu_{x,y})_{x,y \in H}$ на E такое, что для всех $t \in S$, $x \in D(U_t)$, $y \in H$ имеет место равенство (α) теоремы 1. Условие (β) выполняется в том и только том случае, когда для любого $x \in D$ $(x \neq 0)$ существует $t \in S$ такое, что $U_t x \neq 0$. И. С. Иохвидов

1701. Элементарное доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке. Сэки (An elementary proof of Brouwer's fixed point theorem. Seki Takejiro), Tôhoku Math. J., 1957, **9**, № 2, 105—109 (англ.)

Приводится основанное на элементарных соображениях доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке непрерывного отображения конечномерной сферы в себя.

Примечание референта. Доказательство теоремы для двумерного случая нельзя считать полным, поскольку оно использует неравенство, справедливость которого не очевидна. Следует, впрочем, отметить, что общий случай рассмотрен независимо от указанного частного. Г. П. Акилов

1702. О ветвях логарифмической функции матричной переменной. Ноно (On the branches of logarithmic function of a matrix variable. Nôno Takayuki), J. Sci. Hiroshima Univ., 1957, **A21**, № 1, 1—6 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство всех комплексных матриц порядка n с обычной топологией, $\mathfrak{M}$ — совокупность всех матриц из $\mathfrak{A}$ с ненулевым определителем. Рассматривается отображение $W \to Z = \exp W$ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{A}^0$ — совокупность точек $\mathfrak{A}$, в которых это отображение локально гомеоморфно. Если $M \in \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{L}(M) = \{A; \exp A = M\}$. Пусть M, $M' \in \mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{L}(M)$, $A' \in \mathfrak{L}(M')$. Если существует непрерывная на $[0,1]$ функция $W(t)$ со значениями в $\mathfrak{A}$ такая, что $W(t) \in \mathfrak{A}^0$ при $t \in (0,1)$, $W(0) = A$, $W(1) = A'$, то говорят, что точка A' получена из точки A продолжением вдоль дуги $Z = Z(t) = \exp W(t)$ $(t \in [0,1])$. Доказывается несколько теорем о возможности такого продолжения. Наиболее просто формулируется теорема 3: Если $S \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{M}$, то в любой окрестности S существует замкнутая дуга $Z = Z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, целиком лежащая в $\mathfrak{M}$ и такая, что: а) $Z(0) = Z(1) = M$; б) некоторая точка из $\mathfrak{L}(M)$ переходит в другую точку продолжением вдоль этой дуги. В. П. Хавин

1703. Замечания о степенных рядах в абстрактных пространствах. Ватанабэ, Тэраи, Симода (Notes on power series in abstract spaces. Watanabe Takeshi, Terai Masaaki, Shimoda Isae), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci. Math., 1956, **7**, Dec., 67—72 (англ.)

Пусть E и E' — комплексные банаховы пространства. Рассматриваются степенные ряды $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$; здесь f и h_n, $n = 0, 1, \ldots$ — функции, заданные в E и принимающие значения в E' (по поводу определения степенного ряда см. Хилл Э. Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во ин. лит., 1951, гл IV).

Доказано несколько теорем, выясняющих смысл величин

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1}\|h_n(x)\|},\qquad \overline{\lim}\frac{\sup_{\|x\|=1}\|h_n(x)\|}{\sup_{\|x\|=1}\|h_{n-1}(x)\|},$$

$$\overline{\lim}\sup_{\|x\|=1}\frac{\|h_n(x)\|}{\|h_{n-1}(x)\|},\qquad \sup_{\|x\|=1}\lim\frac{\|h_n(x)\|}{\|h_{n-1}(x)\|},$$

и соотношения между ними.

В виде примера приведем теорему 2:

Если $\overline{\lim}\frac{\sup_{\|x\|=1}\|h_n(x)\|}{\sup_{\|x\|=1}\|h_{n-1}(x)\|}=\frac{1}{\sigma}$, то $f(x)$ равномерно ограничена в любом шаре $\|x\|\leqslant\sigma-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$). В заключение приводится без доказательства аналог теоремы Таубера для степенных рядов. В. П. Хавин

1704. Об основных теоремах дифференциального и интегрального исчисления в линейных пространствах. Гаврин М. К., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 38—48 (рез. англ.)

Пусть X — вещественное линейное пространство (без топологии) и Y — вещественное линейное пространство, топология которого задана достаточной системой полунорм. Производная $\varphi'(x)$ от функции $\varphi(x)$ из X в Y понимается в смысле Гато. Пусть A — множество всех линейных операторов из X в Y и $\psi(x)$ — функция из X в A. $\psi(x)$ называется слабо непрерывной, если для любых $\bar{x}$, x_1, $x_2\in X$ функция $\Phi(t)=\psi(x_1+t(x_2-x_1))\cdot\bar{x}$ из $[0,1]$ в Y непрерывна по t. Если

$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\psi(x_0+t\xi)\cdot\bar{x}-\psi(x_0)\cdot\bar{x}]=B(\bar{x},\xi)$, где B — билинейный оператор, то $\psi'(x_0)=B$ называется слабой производной от $\psi(x)$ в точке x_0. Функция $\varphi(x)$ (k)-равномерно дифференцируема в точке x_0, если каждому $\varepsilon>0$ соответствует $\delta>0$ такое, что любая полунорма

$\left\|\frac{1}{t}\left[\varphi(x_0+t\xi)-\varphi(x_0)\right]-\varphi'(x_0)\cdot\xi\right\|_\alpha<\varepsilon$ для всякого вектора ξ, принадлежащего любому k-мерному параллелепипеду из X, когда $0<t<\delta$. Функция $\psi(x)$ называется (k)-равномерно слабо дифференцируемой в точке x_0, если $\psi(x)\cdot\bar{x}$ (k)-равномерно дифференцируема при $x=x_0$. Обычным образом вводится интеграл (Римана) $\int_a^b\Phi(t)dt$, где $\Phi(t)$ — функция из $[a,b]$ в Y, и при его помощи определяется интеграл по отрезку $[x_1,x_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2}\psi(x)\cdot dx=\int_0^1\psi(x_1+t(x_2-x_1))\cdot(x_2-x_1)\,dt$$

от слабо непрерывной функции $\psi(x)$. Для ломаной L с вершинами $x_0,x_1,\ldots,x_m\in X$ определяется $l=\int_L\psi(x)dx$ как сумма интегралов по каждому звену ломаной. l не зависит от пути, если $\int_{L_1}\psi(x)\cdot dx=\int_{L_2}\psi(x)\cdot dx$ для любых двух ломаных с общими концами.

Доказываются теоремы: 1. Если l не зависит от пути, то $\varphi(x)=y_0+\int_0^x\psi(x)\cdot dx$ имеет производную $\varphi'(x)=\psi(x)$. Если $\varphi_1'(x)=\psi(x)$ и $\varphi_1(0)=y_0$, то $\varphi_1(x)=\varphi(x)$.

2. Если $\psi(x)$ слабо непрерывна и $\psi(x)=\varphi'(x)$, то l не зависит от пути и $l=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$, где x_1 и x_2 — начало и конец L. 3. Если $\psi(x)$ (1)-равномерно слабо дифференцируема во всех точках X и билинейный оператор B симметричен в любой точке x_0, то l не зависит от пути. 4. Если $\varphi(x)$ имеет слабо непрерывную производную $\varphi'(x)=\psi(x)$, причем $\psi(x)$ (1)-равномерно слабо дифференцируема в точке x_0, то $B=\psi'(x_0)$ симметрична.

М. М. Вайнберг

1705. О границах полиномов в гиперсферах и производных Фреше-Майкала в вещественных и комплексных линейных нормированных пространствах. Майкал (On bounds of polynomials in hydrespheres and Fréchet-Michal derivatives in real and complex normed linear spaces. Michal A. D.), Math. Mag., 1954, 27, № 3, 119—126 (англ.)

Обобщаются некоторые предложения А. А. Маркова (Уч. зап. Импер. акад. наук, 1889, 62, 1—24), В. А. Маркова (1892 г.) и С. Н. Бернштейна. Пусть E_1 и E_2 — вещественные банаховы пространства и $p(x)$ — полином степени n из E_1 в E_2, удовлетворяющий в шаре $D(\|x\|\leqslant 1)$ условию: $\|p_n(x)\|\leqslant 1$. Тогда имеют место утверждения: 1. $\|p_n'(x)\|\leqslant n^2$ в D. 2. Дифференциал Фреше порядка ν удовлетворяет в D неравенству

$$\|p(x;y,y,\ldots,y)\|\leqslant\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots[n^2-(\nu-1)^2]}{(2\nu-1)!!}\|y\|^\nu.$$

3. $\|p^{(\nu)}(x)\|\leqslant\frac{2^{(\nu-1)(\nu-2)/2}\,n^2(n^2-1^2)\ldots[n^2-(\nu-1)^2]}{(\nu-1)!(2\nu-1)!(2\nu-3)!!}$.

4. Если E_1 и E_2 — комплексные банаховы пространства, то $\|p_n'(x)\|\leqslant n$ в D. Из последнего получается ряд других предложений. М. М. Вайнберг

1706. О линейных функциональных уравнениях в пространстве Гильберта. Альтман (On linear functional equations in Hilbert space. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 3, 223—227, XIX (англ.; рез. русск.)

В предыдущей статье автора (РЖМат, 1958, 7922) была установлена теорема о неподвижной точке для слабо непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. Ее следствиями являются основные результаты реферируемой статьи.

1. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, Q (соответственно S) — множество таких точек $x\in H$, что $\|x\|\leqslant r$ (соответственно $\|x\|=r$), A — слабо непрерывный (не обязательно линейный) оператор, определенный на Q, со значениями в H. Если для любого $x\in S$

$$(Ax,x)\leqslant M(x,x),\text{ где }0<M<1,\qquad(1)$$

то при любом y, удовлетворяющем условию $\|y\|\leqslant(1-M)r$, уравнение

$$x-Ax=y\qquad(2)$$

имеет по крайней мере одно решение в Q.

2. Пусть (e_n) $(n=1,2,\ldots)$ — полная ортонормированная система в H и H_n — подпространство, определяемое векторами $e_1,\ldots,e_n$. Тогда (при тех же предположениях, что и выше) для любого n существует приближение Галеркина $x_n\in H_n\cdot Q$; в последовательности (x_n) содержится подпоследовательность (x_{n_i}), сходящаяся слабо к решению уравнения (2); всякая слабо сходящаяся по

следовательность, частичная по отношению к (x_n), сходится слабо к решению уравнения (2); если уравнение (2) имеет единственное решение, то последовательность (x_n) сходится к нему слабо. Предположение остается в силе, если вместо слабо непрерывных операторов рассматривать вполне непрерывные операторы и говорить не о слабой сходимости, а о сильной.

3. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в H, и условие (1) выполнено для любого $x \in H$. Тогда уравнение (2) имеет единственное решение при любом y из H, обратный оператор $(I-A)^{-1}$ ограничен и $\|(I-A)^{-1}\| \leqslant (1-M)^{-1}$. Для любого n существует единственное приближение Галеркина x_n, и последовательность (x_n) сходится слабо к решению уравнения (2); эта последовательность сходится сильно, если A вполне непрерывен. Аналогичное предложение формулируется для уравнения $x - \lambda Ax = y$, содержащего параметр λ.

Полученные результаты применяются к теории интегральных уравнений и к теории бесконечных систем обыкновенных уравнений. С. Н. Крачковский

1707. Нелинейные функциональные уравнения в локально выпуклых пространствах. Браудер (Non-linear functional equations in locally convex spaces. Browder Felix E.), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 579—589 (англ.)

Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, S и Z — линейные хаусдорфовы пространства, U-открытая выпуклая симметричная окрестность нуля в S, $p_U(s)$ — полунорма, соответствующая множеству U, N_U — подпространство в S, состоящее из замыкания линейного множества векторов $\{s\}$, для которых $p_U(s) = 0$. Непрерывный оператор C назван G-вполне непрерывным, если он преобразует открытое выпуклое и симметричное множество $G \subset S$ в компактное выпуклое множество $K \subset Z$. C назван регулярно G-вполне непрерывным в соответствующем смысле, если выполнено одно из следующих условий: (α) K содержится в метризуемом линейном подпространстве из Z; (β) $K \cup \{s_0\}$ содержится в линеином подпространстве $Y_1 \subset Z$ таком, что любое непрерывное отображение замкнутого подмножества M из Y_1 в K может быть расширено до отображения всего Y_1 в K; (π) $S = Z$, C постоянно на классах эквивалентности по модулю N_G и если C_1 — отображение фактор-пространства $S/N_G \to S/N_G$, получаемое композицией C с натуральной проекцией S на S/N_G, то C_1 непрерывно по норме p_G. Отображение f хаусдорфова пространства A на хаусдорфово пространство B называется покрывающим, если для каждой точки $b \in B$ существует окрестность $N(b)$ такая, что f отображает каждую компоненту $f^{-1}(N)$ гомеоморфно на N. Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть G — открытое выпуклое множество из X, C — отображение $\overline{U}$ в X, которое регулярно G-вполне непрерывно в смысле (α) или (β), I — тождественное отображение, $T = I + C$ — взаимно однозначное отображение $\overline{U}$ на $T(\overline{U})$. Тогда $T(G)$ открыто в X и степень отображения $A[x, G, T] = \pm 1$ для $x \in T(G)$ (о степени отображения в локально выпуклых пространствах см. Nagumo M., Amer. J. Math., 1951, 73, 497—511).

2. Пусть U-открытая, выпуклая, симметричная окрестность нуля в S, C — регулярное в смысле (π) U-вполне непрерывное отображение $\overline{U}$ в S. Если отображение TU множества $\overline{U}/N_U$ в S/N_U, определенное равенством $T(S + N_U) = s + C(s) + N_U$, взаимно однозначно, то $T(U)$ открыто в S. Кроме того, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что U-вполне непрерывное отображение C_1 множества $\overline{U}$ в S, регулярное в смысле (π), удовлетворяет условию: $p_U(C'(s') - C'_1(s')) < \varepsilon$ для $s' \in \overline{U}/N_U$, где C' и C'_1 — индуцированные отображения, то существует $s_1 \in U$ такое, что $s_1 + C_1(s_1) = C(0)$.

3. Пусть G — открытое множество в X, T — отображение G в Y. Пусть далее каждому $x_1 \in G$ соответствуют (зависящие от x_1) окрестности нуля $U \subset X$ и $V \subset Y$ такие, что: $x_1 + U \subset G$; $T = H + C$, где H — гомеоморфизм $x_1 + U$ на $W \subset Y$, содержащее $\overline{V}$; CH^{-1} — регулярное V-вполне непрерывное отображение $\overline{V}$ в Y; T — взаимно однозначное отображение $x_1 + U$ в Y. Тогда $T(G)$ — открытое множество в Y.

Вводится допустимое семейство отображений T_t, $t \in [0,1]$, X в Y и устанавливается теорема 4: Пусть $T_0(x) = 0$ имеет точно m решений $x_1, \ldots, x_m$. Тогда существует в X m непрерывных кривых $x_i = x_i(t)$ таких, что $x_i(t) \neq x_j(t)$ для $i \neq j$, $t \in [0,1]$ и $T_t(x_i(t)) = 0$. Эти m кривых содержат все решения уравнения $T_t(x) = 0$.

Пусть T — непрерывное отображение X в Y. Точка $x \in X$ называется регулярной точкой T, если существует окрестность N точки x такая, что T—гомеоморфизм N на окрестность $T(x)$ в Y. Пусть R — множество регулярных точек; тогда дополнение $B = X - R$ называется множеством разветвления оператора T. Доказывается теорема 5: Пусть T — непрерывное замкнутое отображение X в Y, $M = T(R) - T(B)$ не пусто, $Y - T(B$-связно. Тогда T — покрывающее отображение множества $T^{-1}(M)$ на $Y - T(B)$ и, в частности, число решений x в R уравнения $T(x) = y$ одинаково для всех $y \in (Y - T(B))$. Другие предложения работы уточняют теорему 5. Библ. 27 назв. М. М. Вайнберг

1708. Приближенное решение линейного уравнения. Лежанский (Approximate solution of a linear equation. Leżański T.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 1, 5—6 (англ.; рез. русск.)

Пусть H и H_1 — гильбертовы пространства, A — линейный ограниченный оператор, действующий из H в H_1, $\overline{A}$ — оператор, сопряженный к A, $B = \overline{A}A$. Рассматривается уравнение $Ax = \varphi_0$ ($\varphi_0 \in H_1$ задано) в предположении, что оно имеет единственное решение $x^* \in H$. Обозначая

$$x(t) = e^{-tB}(x_0) + \int_0^t e^{-sB}(z_0)\,ds,$$

где x_0 — произвольно заданный элемент из H, $z_0 = \overline{A}\varphi_0$, $e^U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} U^n$, автор формулирует следующие результаты:

1) $\|Ax(t) - \varphi_0\|_1^2 \leqslant (2te)^{-1} \|x^* - x_0\|^2$;

2) $\|x(t) - x^*\| \to 0 \quad (t \to \infty)$;

3) если существует $m > 0$ такое, что $(x,x) \leqslant m(Bx, x)$, то

$$\|x(t) - x^*\|^2 \leqslant e^{-2mt} \|x^* - x_0\|^2.$$

Доказательства не приводятся. З. С. Агранович

1709. К приближенному решению нелинейных функциональных уравнений в банаховых пространствах. Альтман (On the approximate solutions of non-linear functional equations in Banach spaces. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 1, 19—24 (англ.; рез. русск.)

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1958, 3085, был предложен процесс для приближенного решения функционального уравнения $F(x) = 0$ в банаховом пространстве.

Здесь применяется метод мажорант Л. В. Канторовича (РЖМат, 1958, 3913) к решению указанного уравнения тем же процессом.

Вводится некоторая модификация условий Л. В. Канторовича, и доказывается следующая теорема.

Пусть $Q(z)$ $(z_0 \leqslant z \leqslant z')$ — дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция вещественного переменного и пусть выполнены следующие условия:

$$Q'(z_0) \neq 0, \quad B_0 = -\frac{1}{Q'(z_0)} > 0, \quad |F(x_0)| \leqslant Q(z_0),$$

$1/\|F'(x_0)\| \leqslant B_0$ и $\|F''(x)\| \leqslant Q''(z)$, если $\|x - x_0\| \leqslant z - z_0 \leqslant z' - z_0$.

Тогда, если уравнение $Q(z) = 0$ имеет вещественное решение в сегменте (z_0, z'), уравнение $F(x) = 0$ имеет решение x^* в шаре $S(x_0, r)$, где $r = z' - z_0$, и процесс, предложенный в указанной выше работе автора, сходится к решению x^*.

Из этой теоремы выводятся некоторые следствия. Из нее, в частности, следует теорема 1 указанной работы автора.

Е. И. Линьков

1710. О компактности множеств в полуупорядоченных пространствах. Клементьев З. И., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2. Томск, Томский ун-т, 1957, 3

Формулируются условия компактности множества в K-пространстве ограниченных элементов.

А. Н. Балуев

1711. Стоуновские пространства и пространства, являющиеся вторыми сопряженными к пространствам типа *AM*. Вада (Stonian spaces and the second conjugate spaces of *AM* spaces. Wada Junzo), Osaka Math. J., 1957, **9**, № 2, 195—200 (англ.)

Компактное пространство X называется стоуновским если полуупорядоченное пространство $C(X)$ непрерывных на X функций полно в структурном смысле.

Теорема 1. Пусть X — стоуновское пространство; если $X = R \times R$, где R — компактное пространство, то X конечно.

Далее, при некоторых дополнительных предположениях относительно стоуновского пространства X устанавливаются сложно формулируемые условия того, чтобы пространство $C(X)$ было структурно изоморфно и изометрично второму сопряженному к пространству типа *AM* с единицей (т. е. к пространству ограниченных элементов; см. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М. — Л., Гостехиздат, 1951). Если при этом X имеет счетный вес, то X есть чеховская компактификация счетного дискретного пространства.

Г. П. Акилов

1712. Об условиях представимости в виде интеграла непрерывной функции со значениями в абстрактном пространстве. Клементьев З. И., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящен. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2, Томск, Томский ун-т, 1957, 11

Формулируется теорема об условиях представимости функции $\lambda(u)$ со значениями в K-пространстве в виде

$$\lambda(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut}\, d\omega(t).$$

А. Н. Балуев

1713. Эргодическая теорема в линейных полуупорядоченных пространствах с абстрактной нормой. Винкельбауэр Карел, Чехосл. матем. ж. 1958, 8, № 1, 1—21 (рез. англ.)

Рассматривается K-пространство X, нормированное посредством некоторого K-пространства Y. Абстрактная норма $\|x\|$, помимо обычных аксиом нормы, подчинена следующим условиям: а) $\| |x| \| = \|x\|$; б) $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ для любых $x_1, x_2 \geqslant 0$; в) $x_n \xrightarrow{(o)} 0$ в X влечет $\|x_n\| \xrightarrow{(o)} 0$ в Y (непрерывность нормы).

Аддитивное взаимно однозначное отображение T K-пространства X на себя называется автоморфизмом, если $Tx > 0$ тогда и только тогда, когда $x > 0$. Автоморфизм T называется сохраняющим норму, если $\|Tx\| = \|x\|$ для любого $x \in X$.

Помимо (o)-сходимости в X рассматривается индивидуальная сходимость последовательности, введенная Накано (Nakano H., Ann. Math., 1948, **49**, 538 — 556), равносильная (o)-сходимости этой последовательности в максимальном расширении K-пространства X к пределу, принадлежащему самому X.

Теорема 1. Пусть X — K-пространство с единицей, а T — автоморфизм на X, сохраняющий норму, для которого единица является неподвижной точкой. Пусть еще из $x_n \nearrow +\infty$ следует, что $\|x_n\| \to +\infty$. Тогда для любого $x \in X$ существует $x^* = \operatorname{ind} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} T^i x$ и при этом $\|x^*\| \leqslant \|x\|$.

Теорема 2. Пусть K-пространство X — расширенное, а T — автоморфизм на X, сохраняющий норму, для которого единица является неподвижной точкой. Тогда для любого $x \in X$ существует

$$x^* = (o)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x \text{ и при этом } \|x^*\| = \|x\|.$$

В теореме 3 аналогичный результат устанавливается для K-пространства ограниченных элементов.

Б. З. Вулих

1714. Замечания о мерах в произведениях пространств. Динкуляну (Remarques sur les mesures dans les espaces produits. Dinculeanu N.), Collod. math., 1957, **5**, № 1, 51—54 (франц.)

Пусть K — множество индексов, $\{X_s\}$, $s \in K$ — система множеств и T_s — некоторая σ-алгебра подмножеств множества X_s. Пусть: $E = \Pi_{s\in K} X_s$; $E^I = \Pi_{s\in I} X_s$, где I — некоторая конечная система индексов из K; T^I — σ-алгебра, порожденная подмножествами вида $\Pi_{s\in I} A_s$, $A_s \in T_s$; $P(A)$ — мера, конечная на алгебре T цилиндрических множеств, σ-аддитивная на σ-алгебре $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^1)$. Каковы бы ни были конечное $I \subset K$, $t \in K$, существует условная мера $P(Z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$, определенная на $E^I \times T_t$ такая, что для любого $M \in T^I$

$$\int_M P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))\, P_I(dz^I) = P(\mathrm{pr}_I^{-1}(M) \cap \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t)),$$

где $z^I \in E^I$ и $P_I(A) = P(\mathrm{pr}_I^{-1}(A))$ для всех $A \in T^I$.

Условная мера $P(z^I, \mathrm{pr}^{-1}(A_t))$ называется регулярной по отношению к системе σ-алгебр (S^I, S_t), если существует функция $P(z^I, A_t)$, определенная на $E^I \times S_t$ и такая, что: а) $P(z^I, A_t)$ — (S^I)-измеримая функция от z^I при любом $A_t \in S_t$; б) $P(z^I, A_t)$ — σ-аддитивная функция A_t при любом $z^I \in E^I$; в) $P(z^I, X_t) = 1$; г) $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t)) = P(z^I, A_t)$ почти всюду (S^I), каково бы ни было $A_t \in S_t$. Как известно (Andersen E. Sparre, Jessen B., Danske vid. selsk. Math-fys. Medd., 1948, **25**, № 4), мера $P(A)$ может не быть σ-аддитивной на T.

Ионеску-Тулча доказал (Ionescu-Tulcea C. T., Atti Accad. naz. Lincei Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1949, 7, 208—211), что если $K = \{1,2,...\}$ и, каковы бы ни были $n \in K$, $I = \{1,...,n\}$, условная мера $P(zI, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ регулярна по отношению к $(T, {}^I T_{n+1})$, то $P(A)$ σ-аддитивна на T.

В реферируемой работе этот результат усиливается: если при любом конечном $I \subset K$ и $t \in K - I$ условная мера $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ регулярна по отношению к системе (τ^I, τ_t), какова бы ни была сепарабельная (т. е. порожденная счетной системой подмножеств) σ-алгебра $\tau_t \subset T_t$, то $P(A)$ σ-аддитивна на T. Л. М. Абрамов

1715. **О существовании мер с заданным образом.** Бауэр (Sur l'existence de mesures avec une image donnée. Bauer Heinz), C. r. Acad. sci., 1953 **246**, № 13, 1953—1955 (франц.)

Пусть X и Y — локально компактные пространства и φ — непрерывное отображение первого во второе Под мерой на X или на Y понимается положительная мера Радона. Если μ — такая мера на X, что, какова бы ни была непрерывная функция f на Y с компактным носителем, функция $f \circ \varphi$ (определяемая формулой $f \circ \varphi(x) = f(\varphi(x))$, $x \in X$) μ-интегрируема на X, то формула $\int f\, d\nu = \int f \circ \varphi\, d\mu$ определяет на Y меру ν, называемую φ-образом меры μ. В работе даются условия, достаточные для того, чтобы всякая мера на Y была образом некоторой меры на X. Например, достаточно, чтобы каждая точка $y \in Y$ обладала локальной секущей поверхностью (т. е. такой окрестностью V и таким отображением $\sigma: V \to X$, что $\varphi \circ \sigma: V \to V$ есть тождественное преобразование). Достаточно также, чтобы φ было отображением пространства X на все пространство Y и чтобы прообразы компактов были компактами. Для произвольного отображения пространства X на все пространство Y строятся локально компактное расширение $\widetilde{X}$ пространства X и непрерывное продолжение $\widetilde{\varphi}: \widetilde{X} \to Y$ отображения φ такие, что всякая мера на Y есть φ-образ некоторой меры на $\widetilde{X}$.

Доказательства не приведены. В. А. Рохлин

1716. **Образующие множества динамических систем.** Ривкинд Я. И., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 86—88

Пусть A — множество, лежащее в фазовом пространстве динамической системы с нормированной инвариантной мерой и пересекающееся с каждой траекторией системы ровно в одной точке. Пусть A_r — множество, описываемое множеством A за временной промежуток $0 \leqslant t < r$. Доказывается, что если множество A_r измеримо, то оно имеет положительную меру и замкнутые траектории образуют в фазовом пространстве множество полной меры. В. А. Рохлин

1717. **Теоремы сходимости в эргодической теории. Применение к случаю дифференцирования.** Бокле (Théorèmes de convergence en théorie ergodique. Application au cas de la différentiation. Boclé Jean), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 21, 1770—1772 (франц.)

Пусть S — пространство с вполне конечной мерой μ $(0 < \mu(S) < \infty)$, E — локально компактная топологическая группа с мерой Хара λ и I — фильтрующее множество со счетной базой. Пусть каждому $t \in E$ отнесено преобразование T_t пространства S, оставляющее инвариантной меру μ, притом так, что $T_e x = x$ $(x \in S$, e — единица группы $E)$, $T_r(T_s x) = T_{rs} x$ и выполнены обычные условия измеримости. Пусть $\psi(x)$ — неотрицательная измеримая функция и $\varphi(x; \iota)$, $\iota \in I$ — семейство неотрицательных измеримых функций на S.

Теорема 1. Если $\varphi_x(t; \iota) = \varphi(T_t x; \iota)$ для почти каждого $x \in S$ сходится (следуя I) по мере к $\psi_x(t) = \psi(T_t x)$ на всяком измеримом множестве $A \subset E$ конечной меры, то $\varphi(x; \iota)$ сходится по мере к $\psi(x)$ (на S).

Теорема 2. Если $\varphi(x; \iota)$ и $\psi(x)$ интегрируемы на u $\int_S \varphi(x; \iota)\, d\mu = \int_S \psi(x)\, d\mu$ $(\iota \in I)$ и $\varphi(x; \iota)$ сходится по мере к $\psi(x)$, то $\varphi(x; \iota)$ сходится в среднем к $\psi(x)$.

Теорема 3. Если $\varphi(x; \iota)$ сходится почти всюду к $\psi(x)$, то $\varphi_x(t; \iota)$ для почти каждого $x \in S$ сходится почти всюду к $\psi_x(t)$ на всяком измеримом множестве $A \subset E$ конечной меры.

Применение (теорема 6). Если $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на S и $\{И_\iota\}$, $\iota \in I$ — семейство измеримых множеств положительной конечной меры в E, сходящееся к e, то „эргодическое среднее"

$$\frac{1}{\lambda(И_\iota)} \int_{И_\iota} f(T_t x)\, d\lambda$$

сходится в среднем к $f(x)$. Доказательства не приведены.

Примечание референта. Теорема 2 есть частный случай известных общих теорем: см., например, книгу И. П. Натансона (РЖМат, 1958, 9700).

В. А. Рохлин

1718. **Квантовая механика и гильбертово пространство** Макки (Quantum mechanics and Hilbert space. Mackey George W.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8. Part 2, 45—57 (англ.)

Излагается строгое математическое обоснование понятий квантовой механики с точки зрения, несколько отличной от принятой в книге Нёймана (Neumann J. von, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik).

М. С. Лившиц

1719. **Новый метод вывода уравнений Дирака.** Борняс (O nouă methodă de stabilire a ecuaţiilor lui Dirac. Borneas M.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR. Baza Timişoara, 1954, 1, № 1-4, 31—34 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривая квадратную матрицу A порядка n, элементы которой названы операторами

$$A = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \ldots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \ldots & S_{2n} \\ - & - & \ldots & - \\ S_{n1} & S_{n2} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

и квадратную матрицу ψ порядка n, состоящую из одинаковых строк

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \ldots & \psi_n \\ \psi_1 & \psi_2 & \ldots & \psi_n \\ - & - & - & - \\ \psi_1 & \psi_2 & \ldots & \psi_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

автор определяет произведение $A \cdot \psi = 0$, где операция умножения производится как умножение строки на строку так, что

$$S_{11}\psi_1 + S_{12}\psi_2 + \ldots + S_{1n}\psi_n = 0$$
$$S_{21}\psi_1 + S_{22}\psi_2 + \ldots + S_{2n}\psi_n = 0 \tag{3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

С другой стороны, рассматривая систему уравнений Дирака в форме $A\psi = 0$, где $A = \sum_1^3 \left\{\alpha_k P_k\right\} + \left\{\alpha_4 P_4\right\} + \left\{\alpha_5 m_0 c\right\}$, автор доказывает, что операции (1), (2), (3) ведут к уравнениям Дирака. S. Vasilache

1720. **Структура расходящихся интегралов S-матрицы в α-представлении.** Филиппович Е. И., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 1, 84—89

Автор находит общую формулу для преобразования Фурье произведения регуляризованных причинных функций квантовой теории поля и формулирует некоторые свойства полученного выражения.

О. С. Парасюк

1721 К. Введение в теорию квантованных полей. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. М., Гостехиздат, 1957, 442 стр., илл., 18 р. 50 к.

Книга посвящена одному из наиболее актуальных разделов современной теоретической физики — теории квантованных полей. Авторам удалось дать изложение квантовой теории поля с единой точки зрения, совмещая внутреннюю логическую последовательность с полнотой материала. Особое внимание обращено в книге на математическую корректность рассуждений. Основным математическим аппаратом, пронизывающим изложение книги, является теория обобщенных функций, идея приложения которых к вопросам квантовой теории поля принадлежит Н. Н. Боголюбову (1951 г.). Изложение книги, начиная с главы третьей, построено, как правило, на базе оригинальных работ ее авторов.

Книга состоит из введения и 9 глав. Содержание книги по главам следующее:

Гл. I „Классическая теория свободных полей" содержит теорию классических, т. е. не квантованных полей. Авторы используют релятивистски ковариантный лагранжев формализм. Уравнения движения выводятся из вариационного принципа, а динамические переменные: энергия — импульс, заряд, тензор момента количества движения, спин и т. п. получаются на основании теоремы Нётер. Как и во всей книге, предполагается, что лагранжиан является локальным.

Общие принципы вывода уравнений движения и получения инвариантов поля применяются к конкретным полям: скалярному, векторному, электромагнитному и спинорному. Для каждого из них изучаются трансформационные свойства полевых функций, находятся решения уравнений движения и динамические переменные. В конце главы изучаются инварианты системы взаимодействующих полей.

Гл. II. „Квантовая теория свободных полей" содержит теорию свободных, но уже проквантованных полей. В отличие от классической теории свободных полей волновые функции приобретают операторный смысл и распадаются на операторы рождения и уничтожения частиц; при помощи их описываются совокупности частиц и процессы их взаимных превращений. Вводится общая для всех полей волновая функция — амплитуда состояния, на которую действуют операторные волновые функции. Правила квантования Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака выводятся из основных постулатов квантованных волновых полей: принципа соответствия, условия совместимости трансформационных свойств операторных полевых функций и амплитуд состояния, требования положительности энергии. Общие принципы квантования применяются затем к конкретным полям: скалярному, векторному, электронно-позитронному, электромагнитному. Находятся перестановочные функции и функции Грина различных полей. Вводится важное понятие нормального и хронологического произведения, и устанавливается теорема Вика для обычного произведения операторов. Изучаются особенности перестановочных и причинных функций; явное выделение их сингулярностей на световом конусе позволяет регуляризировать эти функции методом Паули — Вилларса. Показывается, что перестановочные и причинные функции являются обобщенными функциями.

В гл. III „Матрицы рассеивания" содержится теория S-матрицы Н. Н. Боголюбова. В этой главе авторы подходят к вопросу описания взаимодействующих полей. Считается, что взаимодействие адиабатически включается и выключается; а до и после включения взаимодействия частицы были свободными. Используется представление взаимодействия для операторных функций.

S-матрица вводится как оператор, переводящий амплитуду начального состояния $\Phi(-\infty)$ в амплитуду конечного состояния $\Phi(+\alpha)$,

$$S\Phi(-\infty) = \Phi(+\alpha).$$

Для определения S-матрицы авторы не обращаются к гамильтоновому формализму и уравнению Шрёдингера, а определяют S-матрицу из явно сформулированных физических условий причинности, релятивистской ковариантности и унитарности S-матрицы, а также принципа соответствия. Но общий вид S-матрицы не определяется лагранжианом взаимодействия. Оказывается, что для полного определения S-матрицы необходимо задать еще бесконечную цепочку квазилокальных операторов.

В связи с тем, что S-матрица определяется через лагранжиан взаимодействия при помощи хронологического произведения, доказывается теорема Вика, выражающая хронологическое произведение операторов через нормальные произведения со спариваниями.

Для случая взаимодействия электронно-позитронного и электромагнитного полей строятся диаграммы Фейнмана для вычисления матричных элементов матрицы рассеяния, определяются вероятности процессов рассеяния и эффективные сечения.

В качестве примера рассчитываются комптоновское рассеяние и аннигиляция пары электрон-позитрон.

Гл. IV „Устранение расходимостей из S-матрицы" содержит методику получения сходящихся выражений для коэффициентов степенных рядов для S-матрицы. Рассматриваются расходимости S-матрицы в спинорной электродинамике второго и третьего порядка. Авторы выясняют, что причиной появления расходимостей является формальное обращение с произведением причинных функций, которые являются обобщенными функциями. Показывается, что ответственность за появление расходимостей несут члены, пропорциональные δ-функции и ее производным; это указывает на возможность использования квазилокальных операторов для устранения расходимостей. На том же принципе, что и устранение расходимостей из членов S-матрицы второго и третьего порядка, основаны общие правила устранения расходимостей из членов S-матрицы любого порядка. Изучение общей структуры членов S-матрицы и дает возможность правильно сформулировать вычитательную процедуру и выделить расходимости из теории.

В гл. V „Приложение общей теории устранения расходимостей к конкретным случаям" рассматривается приложение теории, развитой в гл. IV. Рассматривается скалярное поле с нелинейным взаимодействием.

Основное внимание уделяется спинорной электродинамике, которая принадлежит к числу ренормируемых теорий. Расходящимися являются лишь четыре типа диаграмм; на основании ранее развитой методики устранения расходимостей выписывается общий вид контрчленов. Исследуются свойства градиентной инвариантности.

Но в процедуре получения свободной от бесконечностей градиентно-инвариантной S-матрицы содержится произвол, который можно записать в виде конечных добавок к исходному лагранжиану взаимодействия. Влияние этих конечных членов эквивалентно перенормировке массы и заряда фермиона. Если ввести полные функции Грина и вершинную часть, то введение конечных добавок эквивалентно перенормировке функции Грина и вершинной части, которая приводит к группе ренормировок. Полученные результаты применяются к вычислению радиационных поправок в некоторых эффектах спинорной электродинамики. Общая теория устранения расходимостей применяется затем к

псевдоскалярной мезонной теории. В этой же главе выводятся уравнения Швингера для функций Грина.

В гл. VI „Уравнения Шрёдингера и динамические переменные" рассматривается уравнение Шрёдингера для амплитуды состояния.

Необходимость введения такого уравнения определяется тем, что с помощью S-матрицы нельзя описывать связанных состояний, времен жизни, возбужденных состояний и т. п.

Выводятся релятивистские уравнения Томонага—Швингера, строятся динамические переменные системы взаимодействующих полей, формально вводятся операторные волновые функции.

Общая теория применяется к поляризации вакуума и к вычислению магнитного момента электрона. Исследуется уравнение Дирака с радиационными поправками, решается задача вычисления радиационного смещения уровней электронов в водородоподобном атоме (лэмбовский сдвиг).

В гл. VII „Метод функционального усреднения" излагается метод континуального интегрирования. С помощью этого метода строятся замкнутые выражения для полных функций Грина, включающих в себя все радиационные поправки.

Метод функционального интегрирования применяется к вопросу градиентных преобразований электродинамических функций Грина и к исследованию модели Блоха—Нордсика.

Гл. VIII „Ренормализационная группа" посвящена применению ренормализационной группы к улучшению формул теории возмущений. Идея метода состоит в преобразовании отдельных членов в рядах теории возмущений для функций Грина и вершинных частей, которые не являются инвариантными по отношению к ренормализационной группе, в ренормализационно-инвариантные (Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 2, 203—206). Использование группового характера мультипликативной ренормировки дает возможность написать функциональные уравнения группы, а также дифференциальные уравнения Ли, описывающие бесконечно малые преобразования группы. На основе дифференциальных уравнений Ли изучаются асимптотические свойства функций Грина и вершинных частей в ультрафиолетовой и инфракрасной областях. Ренормализационная группа может быть перенесена в любую перенормируемую теорию. Авторы применяют ее к двухзарядной псевдоскалярной мезонной теории.

Гл. IX „Дисперсионные соотношения" посвящена установлению соотношений между отдельными матричными элементами матрицы рассеяния на основании свойств аналитичности матричных элементов. Авторы показывают, что математической основой дисперсионных соотношений является интегральная формула Коши, физической же основой дисперсионных соотношений является требование причинности. Приводится обзор работ по дисперсионным соотношениям. Для вывода дисперсионных соотношений используется система аксиом, определяющих свойства S-матрицы в локальной теории поля.

На основании аксиом выводятся спектральные представления пионной и фермионной функций Грина. Дается вывод дисперсионных соотношений для рассеяния мезонов на нуклонах для случая рассеяния вперед. На основании фундаментальных теорем Н. Н. Боголюбова об аналитическом продолжении преобразований Фурье обобщенных функций дается строгий вывод дисперсионных соотношений для рассеяния мезонов на нуклонах на любой угол. О. С. Парасюк

См. также: 1344, 1351, 1376, 1391, 1425, 1426, 1467, 1477, 1479, 1492, 1495, 1509, 1609, 1679, 2011

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

1722. Исследования по истории теории вероятностей и статистики. V. Заметка об игральных картах. Кендалл (Studies in the history of probability and statistics. V. A note on playing cards. Kendall M. G.), Biometrika, 1957, **44**, № 1—2, 260—262 (англ.)

Игральные карты появились в западной Европе во второй половине XIV в.: о картах в середине XIV в. не упоминает ни Данте, ни Чосер, но уже в 1377 г. имеется упоминание о картах в Венеции и в 1380 г. — в Нюрнберге. Игральные карты в Европе возникли, по-видимому, самостоятельно, а не путем заимствования древнекитайских карт. Одна из самых старых карточных игр „таро" (во Франции tarot, в Италии tarocchi) восходит к XV в. Для игры "таро" применялась колода из 78 карт (56 обыкновенных, 21 козырных и 1 джокер). Эта колода впоследствии была упрощена и стала содержать 56 карт. Затем были выброшены еще 4 фигуры „шевалье" (в Испании — „дамы"), и колода приняла современный вид в 52 карты.

Что касается использования карт для азартных игр (слово hasard, как указывает автор, встречается у ряда авторов XII в.), то оно развивалось весьма медленно вследствие того, что подсчет вероятностей при игре в карты был гораздо сложнее, чем при игре в кости, и вследствие сравнительной дороговизны самих карт. Автор обращает внимание на то, что 56 есть число сочетаний граней трех костей, и допускает, что игральные кости оказали влияние на формирование карточной колоды. Г. П. Боев

1723. Заметка о вероятностной геометрии К. Менгера. Шпачек (Note on K. Menger's probabilistic geometry. Špaček Antonín), Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 1, 72—74 (англ.; рез. русск.)

F — пространство всех действительных функций над абстрактным пространством $X \times X$, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра измеримых множеств в F и μ — вероятностная мера на $\mathfrak{F}$. Случайная функция $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ (РЖМат, 1956, 3970) является метрикой с вероятностью 1, если $\bar{\mu}(T(A)) = 1$, где $\bar{\mu}$ — внешняя мера, индуцированная мерой μ, $A \subset X$ и $T(A)$ — множество всех функций из F, представляющих расстояния в A.

Приводятся, без доказательства, необходимые и достаточные условия для того, чтобы $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ было метрикой с вероятностью 1. M. Rosenblatt-Roth

1724. О логическом обосновании теории вероятностей. Гермес (Über eine logische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Hermes Hans), Math.-phys. Semesterber., 1957, **5**, № 3—4, 211—221 (нем.)

Приводится и кратко обсуждается система аксиом теории вероятностей, предложенная А. Н. Колмогоровым. Затем автор предлагает обоснование теории вероятностей с помощью понятия „пари". α — событие, относительно которого держится пари; $A(\alpha)$ — сумма, которую получает один из держащих пари (пари держат двое), если событие α выполняется; $B(\alpha)$ — сумма, которую получает тот же партнер, если событие α не выполняется; $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ могут быть и отрицательны, но всегда $A(\alpha) \cdot B(\alpha) \leqslant 0$, и исключено, что $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$.

Вводится коэффициент пари $q(\alpha)=\left|\frac{B(\alpha)}{S(\alpha)}\right|$, где $S(\alpha)=A(\alpha)-B(\alpha)\neq 0$; $0\leqslant q\leqslant 1$. Доказывается, что $q(\alpha)$ удовлетворяет системе аксиом теории вероятностей. Рассматривается случай, когда пари держится не относительно одного события α, а относительно n событий.

Л. Е. Майстров

1725. Некоторые аспекты вероятности и индукции. Ответ Беннетту (Дискуссия). Нил (Some aspects of probability and induction: A reply to Mr. Bennett (Discussion). Kneale William), Brit. J. Philos. Sci., 1957, 8, № 29, 57—63 (англ.)

Статья представляет ответ Беннетту, подвергшему критике занятую Нилом отрицательную позицию в отношении выставленной Кейнсом вероятностной трактовки индукции, связывающей индукцию с возрастанием вероятности данной гипотезы путем элиминации возможной альтернативы. Соглашаясь с некоторыми частными доводами Беннетта, Нил продолжает защищать занятую ранее позицию. Он отстаивает выдвинутое им понимание вероятности и пытается отвести замечание о том, что оно недостаточно учитывает основной смысл вероятности, выражаемый ее статистической трактовкой.

Отвечая на главное возражение Беннетта, Нил отмечает, что он вовсе не идентифицирует понятие необходимости, используемое в естествознании, с логической необходимостью, а лишь указывает на их общность, заключающуюся в наличии безальтернативной ситуации.

Л. П. Гокиели

1726. Распределение интервалов между последовательными максимумами в ряде случайных чисел. Палмер (The distribution of intervals between successive maxima in a series of random numbers. Palmer D. S.), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 524—526 (англ.)

Пусть $u(r)$ есть r-е по порядку число в ряде независимых случайных чисел. Числа $u(-1)$, $u(0)$, ..., $u(n+1)$ по своей величине могут размещаться $(n+3)!$ способами, и эти способы (перестановки) имеют одинаковую вероятность, независимо от распределения вероятности величины u. Рассматриваются те перестановки $n+3$ чисел по величине, при которых $u(0)$ есть относительный максимум. Другим максимумом может быть $u(n+1)$.

Пусть $Q(n)$ есть число таких перестановок. Пусть $q(m, n)$ — число перестановок, в которых последнее число, т. е. $u(n+1)$, по своей величине занимает m-е место. Например,

$q(3, 1)=2$: 2413, 1423.

$q(3, 2)=4$: 15423, 25413, 45123, 45213.

Тогда

$$q(m, n+1)=2^{m-2}\left(n+1-\frac{m-3}{2}\right)$$

$$Q(n)=\sum_{m=1}^{n+3} q(m, n)=2^{n+1}(n+1).$$

Подсчитывается вероятность того, что интервал между двумя максимумами равен n:

$$P(n)=\frac{Q(n-n)}{\frac{2}{3}(n+2)!}-\frac{Q(n)}{\frac{1}{3}(n+3)!}=\frac{3\cdot 2^n(n-1)(n+2)}{(n+3)!}$$

Г. П. Боев

1727. Проблема Паскаля для итерации событий. Людвиг (Die Pascalsche Fragestellung für Merkmalsiterationen. Ludwig Otto), Mitteilungsbl. math. Statist., 1957, **9**, № 1, 1—26 (нем.)

Известны две постановки проблемы итерации: 1. Какова вероятность $W_n(\nu)$ того, что в последовательности из n элементов имеется ν итераций? 2. Какова вероятность $W(k|\alpha)$ того, что k-й элемент есть α-я итерация? (Постановка Паскаля).

Так, в последовательности событий *aabbabbbba* имеется 3 итерации длины $\geqslant 2$; 8-й элемент есть 4-я итерация длины $\geqslant 1$, 3-я итерация дины $\geqslant 2$ и первая итерация длины $\geqslant 3$.

1) a-итерации длины $\geqslant 1$. Рассмотрим последовательность Бернулли для событий a (с вероятностью p) и $b=\bar{a}$ (с вероятностью $q=1-p$).

Теорема. При условиях, что число событий z равно 2, вероятность того, что α-я итерация длины $\geqslant 1$ элемента a появится при k-м испытании, есть

$$V(k|\alpha)=(-1)^{\varkappa}\, p^{\alpha}\, q^{\alpha-1}\sum_{h=0}^{\varkappa}\binom{-\alpha}{h}\binom{-\alpha+1}{\varkappa-h} q^h p^{\varkappa-h},$$

$\varkappa=k-(2\alpha-1)$.

Результат находится с помощью производящей функции $Q_\alpha(t)=\sum_{k=\alpha}^{\infty} V(k|\alpha)t^k$. При $p=q=\frac{1}{2}$ получается распределение Паскаля. $\binom{k-1}{2(\alpha-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

2) a-итерации длины $\geqslant m$. В тех же условиях, но при любом $m\geqslant 1$

$$V(k, \alpha)=p^{m\alpha}q^{\alpha-1}\sum_h(-1)^h\binom{\alpha-1+h}{h}\left[\binom{\varkappa+\alpha-1-hm}{\alpha+h-1}-p\binom{\varkappa+\alpha-2-hm}{\alpha+h-1}(p^m q)^h\right],$$

$$\varkappa=k-(m\alpha+\alpha-1),\quad Q_\alpha(t)=\frac{(p^m qt^{m+1})^{\alpha-1}(pt)^m(1-pt)}{(1-t+p^m qt^{m+1})^\alpha}.$$

Теорема. Вероятность того, что α-я итерация события a или b длины $\geqslant 1$ наступит при k-м испытании, равна

$$W(k|\alpha)=\begin{cases}(pq)^\beta\ (-1)^{\varkappa}\sum_0^{\varkappa}\binom{-\beta}{h}\binom{-\beta+1}{\varkappa-h}\left[q^h p^{\varkappa-h}+p^h q^{\varkappa-h}\right],\\ \text{при } \alpha=2\beta,\quad \varkappa=k-2\beta,\\ (pq)^\beta\ (-1)^{\varkappa}\sum_0^{\varkappa}\binom{-\beta}{h}\binom{-\beta}{\varkappa-h} q^h p^{\varkappa-h}\\ \text{при } \alpha=2\beta+1,\ \varkappa=h-2\beta-1.\end{cases}$$

Приводится аналогичный подсчет для любого числа z событий и любого m.

Г. П. Боев

1728. Метрики и нормы в пространствах случайных величин. Томасян (Metrics and norms on spaces of random variables. Thomasian A. J.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 512—514 (англ.)

Доказываются различные условия, необходимые и достаточные для того, чтобы в пространстве $\mathfrak{X}$ случайных величин, определенных на вероятностном пространстве Ω, можно было ввести метрику (норму), сходимость относительно которой эквивалентна сходимости почти везде (по вероятности). Основное условие состоит в том, что Ω должно быть счетной (конечной) суммой непересекающихся атомов (РЖМат, 1956, 2073).

М. И. Ядренко

1729. Расстояния и нормы в пространствах случайных величин. Томасян (Distances et normes sur les espaces de variables aléatoires. Thomasian A. J.), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 4, 447—448 (франц.)

Пусть $\mathfrak{X}$ — пространство действительных случайных величин, определенных на пространстве с вероятностной мерой $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Пусть f — действительная функция, определенная на $\mathfrak{X}$. Говорят, что „сходимость по f" эквивалентна сходимости почти наверное, если необходимое и достаточное условие для того, чтобы последовательность $\{X_n\}$ в $\mathfrak{X}$ сходилась почти наверное (или по вероятности), состоит в сходимости последовательности чисел $f(X_n)$ к нулю. Без доказательства приводятся следующие результаты:

Теорема 1. Следующие 4 условия, относящиеся к $(\Omega, \mathfrak{A}, P,)$, эквивалентны:

1) Существует функция f, определенная на $\mathfrak{X}$ так, что „сходимость по f" эквивалентна сходимости почти наверное.

2) Всякая последовательность $\{X_n\}$ в $\mathfrak{X}$, которая сходится по вероятности к нулю, сходится почти наверное к нулю.

3) Существует функция f, удовлетворяющая 1), такая, что $\alpha(X,Y)=f(X-Y)$ является расстоянием.

4) Существует конечное или счетное множество непересекающихся между собой атомов таких, что Ω является их соединением.

Теорема 2. Следующие 3 условия, относящиеся к $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, эквивалентны:

1) Существует функция f, определенная на $\mathfrak{X}$ так, что „сходимость по f" эквивалентна сходимости по вероятности, и $|f(cI_A)|=|c|\cdot|f(I_A$ I_A—характеристическая функция $A\in\mathfrak{A})$ для всякого действительного c и для всякого события A.

2) Существует норма f, определенная на $\mathfrak{X}$ так, что „сходимость по f" эквивалентна сходимости по вероятности.

3) Существует конечное число непересекающихся между собой атомов таких, что Ω является их соединением. M. Rosenblatt-Roth

1730. Несовместимость сходимости почти наверное и отклонения. Дюге (Incompatibilité de la convergence presque certaine et de l'écart. Dugué Daniel), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 6, 728—729 (франц.)

Доказывается, что если в пространстве случайных величин существуют последовательности X_n, сходящиеся к некоторому X по вероятности и не сходящиеся почти наверное, то невозможно определить неслучайную функцию $\varphi(X, X_n) \geqslant 0$ ($\varphi(X, X_n) = 0$, если и только если $X = X_n$) со свойством, $\lim_{n\to\infty} \varphi(X, X_n) = 0$, если и только если X_n сходится почти наверное к X.

При доказательстве не требуется ни неравенства треугольника, ни симметрии функции φ. M. Rosenblatt-Roth

1731. О распределении частиц, содержащихся в теле, на основе их распределений в его частях или проекциях. Сантало (Sobre la distribucion de los tamaños de corpusculos contenidos en un cuero a partir de la distribucion on sus secciones. o proyecciones. Santaló L. A.), Trab. estadist., 1955, **6**, № 3, 181—196 (исп., рез англ.)

Несколько авторов (P. Reid, E. Scheiel, R. L. Fullman, S. D. Wicksell) рассматривали следующую задачу.

Выпуклое непрозрачное тело содержит внутри некоторое множество шарообразных частиц, распределенных случайным образом. Радиусы этих шаров имеют функцию распределения. Если рассечь тело плоскостью, то получится множество кругов — сечений шаров, причем радиусы этих кругов будут иметь другую функцию распределения. Задача заключается в нахождении функции распределения радиусов шаров, если задана функция распределения радиусов кругов в плоском сечении.

Тот же вопрос возникает, если рассечь тело не плоскостью, а прямой линией и рассмотреть хорды, образующиеся при ее пересечении с шарами.

Автор обобщил эту задачу предположив, что частицы тела имеют форму не шаров, а выпуклых телец произвольной формы, но подобных друг другу, в силу чего размеры частиц зависят от одного параметра λ (коэффициент подобия), а функция распределения λ подлежит определению по заданной функции распределения площади областей, получающихся при рассечении произвольной плоскостью (или длины хорд, если сечение осуществляется прямой).

В случае, когда частицы не являются шарами, автор находит интегральное уравнение типа Абеля для решения этой задачи.

Далее автор изучает похожую задачу, когда рассматривается прозрачное тело с непрозрачными пластинами, площади которых имеют функцию распределения, которая подлежит определению, если известна функция распределения площадей фигур, получаемых проектированием этих пластин, на плоскость, расположенную случайным образом. По резюме автора

1732. Некоторые теоремы о суммах симметрично-зависимых случайных величин. Спарре-Андерсен (Some theorems on sums of symmetrically dependent random variables. Sparre Andersen Erik), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 291—296 (англ.)

Пусть X_i — последовательность случайных величин с действительными возможными значениями. Если число n этих случайных величин конечно, то они будут симметрично-зависимыми в том случае, когда закон их совместного распределения $F_n(x_1, \ldots, x_n)$ симметричен по $x_1, \ldots, x_n$. Если их бесконечное число, то они будут симметрично-зависимы, когда для любого $n = 2, 3, \ldots$, величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ симметрично-зависимы. Если случайное событие C инвариантно относительно перестановок $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно $x_1, x_2, \ldots$,), то оно симметрично по $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно по $x_1, x_2, \ldots$). Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, L_n — первый индекс i $(0 < i \leqslant n)$, для которого $S_i = \max_{0<k<n} S_k$, M_n — последний индекс i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, для которого $S_i = \min_{0<k<n} S_k$, N_n — число строго положительных сумм S_i $(0 < i < n)$. Приводятся без доказательства: 1) оценки для $P\{N_n = m \mid C_n\}$, $P\{L_n = m \mid C_n\}$, $P\{M_n = n - m \mid C_n\}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$, в случае, когда случайные величины $x_1, x_2, \ldots$ симметрично-зависимы и C_n — случайное событие, симметричное по $x_1, \ldots, x_n$; 2) оценки для $P\{N_n = n\}$ и $P\{N_n = 0\}$, в случае, когда $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины; 3) оценки для $P\{N_n^* = m\}$ (N_n^* — число индексов $j = 1, \ldots, n$ для которых $S_j > \frac{j}{n+1} S_{n+1}$), когда $X_1, \ldots, X_{n+1}$ симметрично-зависимы и их совместное распределение абсолютно непрерывно; 4) оценки для $P\{N_n = m \mid S_{n+1}\}$ в случае независимых одинаково распределенных случайных величин. M. Rosenblatt-Roth

1733. Класс двумерных случайных величин и функции распределения. Конейн (A class of two-dimensional random variables and distribution functions. Konijn H. S.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, **18**, № 1-2, 167—172 (англ.)

Рассматриваются совместные распределения линейных форм вида

$$Y_\theta = Y_0 \cos\theta + Z_0 \sin\theta,$$

$$Z_\theta = -Y_0 \sin\theta + Z_\theta \cos\theta,$$

где Y_θ и Z_θ — независимые случайные величины с совместной функцией распределения F_θ, и $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Устанавливаются некоторые просто доказываемые свойства совместной функции распределения F величин Y_θ и Z_θ. Например: при $\theta \neq 0$ F_θ — либо нормальное распределение с $\rho = 0$ и $\sigma^2(Y_\theta) = \sigma^2(Z_\theta)$, либо Y_θ и Z_θ — зависимые случайные величины.

В. П. Скитович

1734. О составных нормальных распределениях. Вадзики, Кавасиро, Ватанабэ (On the compound normal distributions. Wajiki Isamu, Kawashiro Teruaki, Watanabe Yoshikatsu), J. Gakugei Tokushima Univ. Natur. Sci. Math., 1956, 7, Dec., 53—65 (англ.)

Рассматривается вероятностная плотность $f(x)$, возникающая из нормальной плотности $f(x, a, \sigma)$, если параметры (a, σ) — случайные величины с совместной плотностью $\psi(a, \sigma)$. Пусть $\Psi_1(a)$ — интегральный закон для a; $f_2(x, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, a, \sigma)\, d\Psi_1(a)$.

Теорема 1. $f_2(x, \sigma)$ нормальна тогда и только тогда, когда $\psi(a, \sigma)$ нормальна по a. Далее сообщается, что при нормальности $\psi(a, \sigma)$ и $\Psi_1(a)$ по a, $f(x)$ может быть нормальна лишь в довольно специальных случаях. Приводятся примеры.

Ю. В. Линник

1735. О неограниченности безгранично делимых законов. Чаттерджи, Пакшираджан (On the unboundedness of infinitely divisible laws. Chatterjee S. D., Pakshirajan R. P.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, **17**, № 4, 349—350 (англ.)

Доказывается теорема: Ограниченная случайная величина не может быть безгранично делимой.

В. П. Скитович

1736. Инвариантность нормального распределения. Уэндел (Invariance of normal distributions. Wendel J. G.), Michigan Math. J. 1957, **4**, № 2, 173—174 (англ.)

Пусть g — некоторое взаимно однозначное преобразование n-мерного евклидова пространства самого на себя.

Пусть $N(u, U)$ — нормальное распределение со средним u и ковариационной матрицей U. Будем говорить, что g преобразует $N(u, U)$ в $N(v, V)$, если gX дает распределение $N(v, V)$ всякий раз, когда X распределена по закону $N(u, U)$. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — координатные орты пространства и U — некоторая произвольная особенная матрица, тогда, если g преобразует $N(u_j, U)$ в нормальное распределение $N(v_j, V_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то g — некоторое аффинное преобразование.

В. П. Скитович

1737. О характеризации устойчивого закона с конечным средним значением. Лаха (On a characterization of the stable law with finite expectation. Laha R. G.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 1, 187—195 (англ.)

Пусть x, ξ, η — три случайные величины с конечными средними значениями, причем x не зависит от пары (ξ, τ_i) и совместное распределение пары (ξ, η) такое, что регрессия η на ξ существует, линейна и имеет вид $E\{\eta(\tau_i) = \beta_0 \xi$.

В этих условиях доказывается, что регрессия $Y = cx + \eta$ на $X = \alpha x + \xi$ $(\alpha \neq 0)$ линейна и не зависит от распределения x, ξ, η, если $c = \alpha\beta$ (теорема 1).

В этих же условиях для того, чтобы регрессия Y на X была линейна для всех $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $0 \notin [\alpha_1, \alpha_2]$ и для всех c, для которых $c \neq \alpha\beta_0$ при всех $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, необходимо и достаточно, чтобы x и ξ были случайными величинами с устойчивыми распределениями и с конечными средними значениями (теорема 2).

В виде следствия получается обобщение теоремы Дармуа (Darmois G., C. Acad. sci., 1951, 232, 1999—2000): Если x, y — независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями и такие, что регрессия $Y = cx + dy$ $(d \neq 0)$ на $X = ax + by$ $(b \neq 0)$ существует и линейна для всех $a \in [a_1, a_2]$, $0 \notin [a_1, a_2]$, и для всех c, для которых $bc \neq ad$ для всех $a \in [a_1, a_2]$, тогда распределения x и y устойчивы с конечными математическими ожиданиями.

M. Rosenblatt-Roth

1738. О некоторых свойствах нормального и гамма-распределения. Лаха (On some properties of the normal and gamma distributions. Laha R. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 172—174 (англ.)

Доказывается, что если $x_1, \ldots, x_n$ — независимые одинаково распределенные нормальные случайные величины, то необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\sum_i^n x_i$ была независимо распределена по отношению к некоторой случайной величине $g(x_1, \ldots, x_n)$, состоит в том, чтобы $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1 + \lambda, \ldots, x_n + \lambda)$ были одинаково распределены для любого действительного λ.

Указывается, что таким же путем можно доказать аналогичную теорему в случае, когда вместо нормального распределения берется закон с плотностью $\frac{1}{\Gamma(p)} \times$ $\times e^{-x} x^{p-1}$ $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$; в этом случае вместо $g(x_1 + \lambda, \ldots, x_n + \lambda)$ придется брать $g(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

M. Rosenblatt-Roth

1739. Некоторые теоремы о разложении безгранично делимых законов. Линник Ю. В., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 4, 549—551

Пусть X — случайная величина с безгранично делимым (б. д.) законом $F(x)$. Ее характеристическая функция однозначно дается формулой

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2}\right) dM(x) +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2}\right) dN(x).$$

В заметке рассматриваются только б. д. законы с положительным пуассоновым спектром, т. е. $dM(x) = 0$. Если X_1 и X_2 — независимые случайные величины и $X = X_1 + X_2$, то будем говорить о разложении случайной величины X на компоненты. Если I — класс б. д. законов, то I_0 $(I_0 \subset I)$ — класс б. д. законов, которые разлагаются только на б. д. компоненты. Оказывается, что компоненты законов из I_0 имеют тот же вид, что и сами эти законы. Вводится понятие рационального пуассонова спектра и формулируются теоремы, устанавливающие условия, при которых некоторые б. д. законы принадлежат классу I_0. Например,

Теорема 1. Пусть F — закон с ограниченным положительным рациональным конечным или счетным пуассоновым спектром и с $\gamma > 0$. Для того чтобы $F \in I_0$, необходимо и достаточно, чтобы пуассоновы частоты μ_n совпадали с убывающим рядом чисел

$$\mu, \frac{\mu}{k_1}, \frac{\mu}{k_1 k_2}, \ldots, \frac{\mu}{k_1 k_2 \ldots k_s}, \ldots,$$

где $\mu > 0$; $k_1, k_2, \ldots, k_s$ — какой-либо набор натуральных чисел.

Указаны методы доказательства таких теорем.

В. П. Скитович

1740. Теоремы о представлении функций распределения суперпозициями. Малхолленд, Роджерс (Representation theorems for distribution functions. Mulholland H. P., Rogers C. A.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 30, 177—223 (англ.)

Изучается строение выпуклых подсемейств семейства K всех функций распределения (в смысле теории вероятностей) $F(x)$, подчиненных „моментным условиям"

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\,dF(x) = 0\ (r = 1, \ldots, k),$$

где $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ — данные всюду конечные измеримые по Борелю функции (иначе говоря, по терминологии, идущей от Чебышева и Маркова, решаются задачи о предельных величинах интегралов). Функция из подсемейства K называется крайней, если она не представляется полусуммой различных функций этого подсемейства.

Два примера полученных теорем:

Теорема 2. Каждая функция $F(x)$ из K представима в виде интеграла Лебега

$$F(x) = \int_0^1 H_t(x)\,dt\ (-\infty < x < \infty), \qquad (1)$$

где для каждого t из $[0,1]$ $H_t(x)$ есть крайняя функция из K.

Крайние функции K можно охарактеризовать как ступенчатые функции из K с $\varkappa(1 \leqslant \varkappa \leqslant k+1)$ скачками в точках $x_1, \ldots, x_\varkappa$, для которых вектора $(1, f_1(x_j), \ldots, f_k(x_j))$ $(j = 1, \ldots, \varkappa)$ линейно независимы.

Теорема 2 распространяется и на многомерные распределения.

Теорема 5. Пусть K_L — подсемейство функций из K, представляющихся свертками функций распределения с фиксированной функцией распределения $L(x)$, а E_L — подсемейство K_L сверток $L(x)$ со ступенчатыми функциями из K_L, для которых вектора

$$\left(1, \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x+x_j)\,dL(x), \ldots, \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x+x_j)\,dL(x)\right)$$

$(j = 1, \ldots, \varkappa)$ линейно независимы.

Каждая функция из K_L представима лебеговым интегралом (1), где для каждого t из $[0,1]$ $H_t(x)$ есть функция из E_L.

Каждая линейная функция из K_L принадлежит E_L, если $L(x)$ такова, что каждая функция из K_L представляется лишь единственной сверткой функции распределения с $L(x)$, то E_L состоит только из крайних функций K_L.

Подобные разложения в суперпозицию естественно позволяют свести проблему максимизации линейного функционала на подсемействах K к максимизации на подсемействах суперпозируемых функций.

Г. Н. Сакович

1741. О сходимости ряда независимых случайных величин. Прекопа (Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájáról. Prékopa András), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, 6, № 2, 191—198 (венг.)

Автор дает два условия, обеспечивающих сходимость, безотносительно к порядку суммирования, ряда независимых случайных величин

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k. \qquad (1)$$

Первое условие: Ряд (1) сходится с вероятностью 1, безотносительно к порядку суммирования, если и только если множество функций распределения $\{F(x,A), A \in T\}$, (где T — множество всех конечных подмножеств множества натуральных чисел и $F(x,A) = \mathrm{P}\left(\sum_{k\in A}\xi_k < x\right)$) компактно.

Второе условие: Предположим, что можно найти два числа λ_1, λ_2, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, таких, что множества квантилей $Q(\lambda_1, A)$ и $Q(\lambda_2, A)$

$$\left(P\left(\sum_{k\in A}\xi_k \geqslant Q(\lambda_i, A)\right) \geqslant 1-\lambda_i \text{ и}\right.$$

$$\left.P\left(\sum_{k\in A}\xi_k \leqslant Q(\lambda_i, A)\right) \geqslant \lambda_i,\ i = 1,2\right)$$

$Q_1 = \{Q(\lambda_1, A), A \in T\}$, $Q_2 = \{Q(\lambda_2, A), A \in T\}$ ограничены. Тогда ряд (1) сходится с вероятностью 1, безотносительно к порядку суммирования. Из первой части статьи ясно, что это условие также необходимо. P. Révész

1742. Об одной мере дисперсии распределения направлений. Симаика Я., Бюл. Польской АН, 1957, отд. 3, 4, № 11, 745—748

Вместо понятия средней $\mathfrak{M}\Theta = \int_0^{2\pi} \theta\,dF(\theta)$, где $F(\theta)$ — функция распределения направлений $\theta\ (0 < \theta < 2\pi)$, вводится понятие типического значения $\mathfrak{T}\theta$, определяемого формулой

$$\frac{\sin \mathfrak{T}\theta}{\mathfrak{M}\sin\theta} = \frac{\cos \mathfrak{T}\theta}{\mathfrak{M}\cos\theta} = \frac{1}{+\sqrt{\mathfrak{M}^2\sin\theta + \mathfrak{M}^2\cos\theta}}.$$

Величина $\mathfrak{T}\theta$ инварианта относительно смещения начала отсчета θ. Вместо дисперсии вводится величина $\mathfrak{D}\theta$, определенная формулой

$$\cos \mathfrak{D}\theta = +\sqrt{\mathfrak{M}^2\sin\theta + \mathfrak{M}^2\cos\theta};$$

1) $\mathfrak{D}\theta$ есть дуга единичной окружности;

2) $\mathfrak{D}\theta$ существует при всяком законе распределения;

3) $0 \leqslant \mathfrak{D}\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, причем $\mathfrak{D}\theta = 0$ тогда и только тогда, когда θ почти достоверно, и $\mathfrak{D}\theta = \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{T}\theta$ неопределенно;

4) $\mathfrak{D}\theta$ не зависит от выбора начала координат;

5) для независимых величин функция $\ln\cos\mathfrak{D}(\theta)$ аддитивна.

Доказывается, что типическое значение и дисперсия совокупности направлений спрямляемой кривой зависят только от ее длины и положения концов, если вероятность направления элемента ds пропорциональна ds.

Если Φ — случайное направление в трехмерном пространстве, иначе говоря, случайная точка (L, M, N) единичной сферы, то дисперсия $\mathfrak{D}\Phi$ определяется формулой $\cos\mathfrak{D}\Phi = +\sqrt{\mathfrak{M}^2 L + \mathfrak{M}^2 M + \mathfrak{M}^2 N}$ и обладает свойствами, аналогичными 1)—5). Г. П. Боев

1743. Закон больших чисел для зависимых случайных величин. Чуку (Legea numerelor mari pentru variabile aleatore legate. Ciucu Gh.), Comun. Acad. RPR, 1955, **5**, № 9, 1253—1256 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $S_{(n\nu)}=\sum_{j=1}^{\nu} x_{nj}$, где $x_{nj}(1\leqslant j\leqslant n;\ n=1,2,\ldots)$ — случайные величины с нулевыми средними значениями и конечными дисперсиями. Если $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\{M[M_{S_{(n,i-1)}}(x_{ni})]^2\right\}^{1/2}=0$(C), то доказывается, что при $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}M(x^2_{ni})=0$ последовательность $(S_{(n,n)})_{1\leqslant n<\infty}$ сходится, по вероятности, к нулю.

Указывается, что при условии (C), если

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} M(S^2_{(n,i)})>\beta>0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(S^2_{(n,n)})}{\sum_{i=1}^{n}M(x^2_{ni})}=1.$$

M. Rosenblatt-Roth

1744. О предельном распределении максимального члена для одного случая однородных цепей Маркова. Гартштейн Б. Н., Научн. зап. Ужгородск. ун-та, 1957, **18**, 195—200

Рассматривается последовательность испытаний, связанных в простую однородную цепь Маркова. В предположении, что функция $F(x,y)=P\{\xi_{k+1}<x \mid \xi_k=y\}$, где ξ_k — результат k-го испытания, есть функция разности $x-y$, получено предельное распределение максимального члена вариационного ряда. В. В. Петров

1745. О рекуррентных по интервалам суммах независимых случайных величин. Спицер (On interval recurrent sums of independent random variables. Spitzer Frank), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 164—171 (англ.)

Пусть X_i $(i=1,2,\ldots)$ — бесконечная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. Предполагается, что: A) для некоторого α $(1\leqslant\alpha\leqslant 2)$ случайная величина $S_n\cdot n^{-\frac{1}{\alpha}}$ распределена по устойчивому закону с параметром α; B) закон распределения X_i определяется с помощью некоторой плотности вероятности $f(x)$, причем $f(x)\in L^p(-\infty,\infty)$ для некоторого $p>1$.

Теорема 1. Пусть $\{S_n\}$ удовлетворяет условиям A) и B).

Пусть

$$C(n,\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ \alpha\cdot\sin\frac{\pi}{\alpha}\cdot n^{\frac{1}{\alpha-1}} & \text{при } 1<\alpha\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}\ \pi(\log n)^{-1} & \text{при } \alpha=1\end{cases}$$

и $E_p(z)$ обозначает функцию Миттаг-Лефлера

$$E_p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+pn)}.$$

Тогда для любого $-\infty<\alpha<\infty$

$$\lim_{n\to\infty}P_n\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}\mid S_k-\alpha\mid\leqslant x\cdot C(n,\alpha)\right\}=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 1-E_{1-\frac{1}{\alpha}}(-x) & \text{при } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Теорема 2. Если $\{S_n\}$ удовлетворяет тем же условиям, как в теореме 1, и $\{\alpha_n\}$ является невозрастающей последовательностью положительных чисел, то

$$P_r\{\mid S_n-\alpha\mid\leqslant n^{\frac{1}{\alpha}}\alpha_n \quad \text{для бесконечного множества значений } n\}=\begin{cases}0, & \text{если } \sum_1^{\infty}\alpha_n \text{ сходится},\\ 1, & \text{если } \sum_1^{n}\alpha_n \text{ расходится}.\end{cases}$$

M. Rosenblatt-Roth

1746. Одна центральная предельная теорема и некоторое условие усиленного смешивания. Розенблатт (A central limit theorem and a strong mixing condition. Rosenblatt M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 1, 43—47 (англ.)

Рассматривается последовательность зависимых между собой случайных величин X_i $(i=1,2,\ldots)$. Пусть A — цилиндрическое множество, т. е. $\{a_{k_r}<X_{k_r}\leqslant b_{k_r};\ r=1,2,\ldots s;\ k_1<k_2<\ldots<k_s\}$, и $I(A)$ — интервал $[k_1,k_s]$. Если B — такое же множество, то обозначим через $\alpha(A,B)$ расстояние между интервалами $I(A)$ и $I(B)$ ($\alpha(A,B)$ не удовлетворяет неравенству треугольника).

Условие усиленного смешивания:

$$\mid P(A\cap B)-P(A)\cdot P(B)\mid<f(\alpha(A,B)) \qquad (1)$$

для всех A,B указанного типа, где $f(n)$ определена для $n=0,1,\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}f(n)=0$.

Если $EX_i\equiv 0$, то условия действительности центральной предельной теоремы состоят в приведенном условии усиленного смешивания (1), причем

$$E\left|\sum_{j=a}^{b}X_j\right|^2\sim h(b-a), \text{ если } b-a\to\infty, \text{ где } \lim_{m\to\infty}h(m)=\infty \text{ и}$$

$$E\left|\sum_{j=a}^{b}X_j\right|^{2+\delta}=o[(h(b-a))^{1+\frac{\delta}{2}}]$$

для некоторого $\delta>0$.

Полученные результаты обобщают результаты Хэфдинга и Робинса (Höffding W., Robbins H., Duke Math. j., 1948, **15**, 773—780). M. Rosenblatt-Roth

1747. Центральная предельная теорема для «заменяемых» случайных величин. Бюльманн (Le problème «limite central» pour les variables aléatoires échangeables. Bühlmann Hans), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 4, 534—536 (франц.)

Назовем случайные величины $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ „заменяемыми“ (échangeables), если совместное распределение n любых из них $X_{j_1},\ldots,X_{j_n}$ такое же, как распределение $X_1,\ldots,X_n$ (обозначим его $F_n(x_1,\ldots,x_n)$).

Автор анализирует теорему Б. Финетти: Можно найти строгое подполе C поля событий, по отношению к которому заменяемые случайные величины условно независимы и одинаково распределены:

$$F_n^{C}(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{j=1}^{n}F_1^{C}(x_j).$$

Пусть далее существуют $M(X_i^2)=\sigma^2$, $M(X_i)=0$. Высказываются следующие утверждения:

Теорема 3. Предельные распределения нормированных сумм заменяемых случайных величин с конечными дисперсиями определяются характеристическими функциями вида

$$\int\exp\left(-\frac{u^2\sigma^2}{2}\right)dF(\sigma^2)$$

(„взвешенные нормальные распределения“).

Слабая сходимость имеет место всегда. Кроме того,

Теорема 4. Если $B_n=na$, то $\sum_{i=1}^n X_i/B_n \to M\bar{C}(X_1|a)$ почти наверное. Для полной сходимости с $B_n=o(n)$ необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^n X_i/n\to 0$ почти наверное и $B_n/\sqrt{n}\to a$, $0<a<\infty$. (Исключается тривиальный лучай $M(X_i^2)=0$).

Теорема 5. Если $B_n=\sqrt{n}$, то

$$F(\sigma^2)=P\{MCX_i^2<\sigma^2\}=P\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n X_i^2/n<\sigma^2\right\}.$$

Доказательства не даны. Случай бесконечных дисперсий предполагается рассмотреть особо. Г. Н. Сакович

1748. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений. Розанов Ю. А., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 2, 275—281 (рез. англ.)

Рассматривается последовательность независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots$, принимающих только целые значения и удовлетворяющих условиям: 1) $\sum_{k=1}^u D\xi_k\to\infty$ при $u\to\infty$ и 2) $(D\xi_k)^{-1}\sum_{|j-M\xi_k|<N}(j-M\xi_k)^2P\{\xi_k=j\}\to 1$ при $N\to\infty$. Дается следующее необходимое и достаточное условие применимости локальной предельной теоремы в усиленной форме (определение этого понятия см. у Ю. В. Прохорова (РЖМат, 1955, 3858)) к таким последовательностям:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[\max_{0\le m<h} P\{\xi_k\equiv m(\mathrm{mod}\,h)\}\right]=0 \text{ при любом } h\ge 2.$$

Этот результат охватывает результат Прохорова (см. цит. выше) для равномерно ограниченных величин ξ_k и результат Б. В. Гнеденко (Успехи матем. наук, 1948, 3, вып. 3, 187—190) для одинаково распределенных ξ_k.

В. Рихтер

1749. О второй предельной теореме исчисления вероятностей. Дюге (Sur le second théorème limite du calcul des probabilités. Dugué Daniel), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 4, 444—445 (франц.)

Для того чтобы закон распределения случайной величины $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^n X_i$, X_i — независимые случайные величины, сходился к предельному закону распределения с характеристической функцией $e^{\Psi(t)}$, необходимо и достаточно: 1) сколь мало ни было бы ε, можно найти $M(\varepsilon)$ и N так, что $\sum_{i=1}^n\{1-F_i(\sqrt{n}\,M(\varepsilon))+F_i(-\sqrt{n}\,M(\varepsilon))\}<\varepsilon$ для всякого $n>N$, 2) для всякого t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\int_{-\sqrt{n}\,M_n}^{+\sqrt{n}\,M_n}\left(e^{\frac{it}{\sqrt{n}}x}-1\right)dF_i(x)=\Psi(t),$$

где $\lim_{n\to\infty}M_n=\infty$ и $F_i(x)$ является законом распределения X_i. Дается пример, когда вторые моменты X_i не существуют, но тем не менее сходимость имеет место. Доказательства не даются. M. Rosenblatt-Roth

1750. Предельная теорема Крамера и ее обобщения. Огава (A limit theorem of Cramér and its generalizations. Ogawa Junjiro), J. Elisha Mitchell Scient. Soc., 1957, 73, № 2, 261—267 (англ.)

Дается новое строгое доказательство одной предельной теоремы Г. Крамера (Математические методы статистики, М., 1948, § 22. 6), после чего формулируется некоторое обобщение этой теоремы. Другое обобщение видоизменяет одну теорему Г. Рубина, цитированную в статье Андерсона (Anderson T. W., The asymptotic distribution of certain characteristic roots and vectors. Second Berkeley Symposium, 1951). В. Рихтер

1751. Предельная теорема для максимума нормированной суммы независимых случайных величин. Дарлинг, Эрдёш (A limit theorem for the maximum of normalized sums of independent random variables. Darling D. A., Erdös P.), Duke Math. J., 1956, 23, № 1, 143—155 (англ.)

Пусть X_i ($i=1,2,\ldots$) — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет нулевое среднее значение и единичную дисперсию, причем третие абсолютные моменты равномерно ограничены.

Если $S_k=\sum_{i=1}^k X_i$ и $U_n=\max_{1\le k\le n}\frac{S_k}{k^{1/2}}$, то доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty}P_r\left\{U_n<(2\log\log n)^{1/2}+\frac{\log\log\log n}{2(2\log\log n)^{1/2}}+\frac{t}{(2\log\log n)^{1/2}}\right\}=\exp(-e^{-t}/2\pi^{1/2}),\qquad -\infty<t<\infty$$

Этот результат сначала получается для гауссовых X_i затем, в общем случае, доказывается, что предельное распределение для U_n существует и не зависит от распределения X_i, т. е. применяется принцип инвариантности Эрдёша—Каца (Erdös P., Kac M., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 292—302).

В тех же условиях, без доказательства, утверждается, что при $V_n=\max_{1\le k\le n}\frac{|S_k|}{k^{1/2}}$

$$\lim_{n\to\infty}P_r\left\{V_n<(2\log\log n)^{1/2}+\frac{\log\log\log n}{2(2\log\log n)^{1/2}}+\frac{t}{(2\log\log n)^{1/2}}\right\}=\exp\left(-\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-t}\right).$$

Указывается, что доказательство получается таким же путем, как и предыдущий результат.

M. Rosenblatt-Roth

1752. Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений. Рихтер В., Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 1, 107—114 (рез. нем.)

Пусть задана последовательность $X^{(1)},X^{(2)},\ldots$ независимых одинаково распределенных m-мерных случайных векторов с общей функцией распределения $V(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{x}=(x_1,\ldots,x_m)\in R_m$. Пусть существуют все смешанные вторые моменты вектора $X^{(l)}$,

$$\sigma^{kj}=E(X_k^l-EX_k^{(l)}X_j^{(l)}-EX_j^{(l)}),\quad \mathfrak{B}_2=\|\sigma^{kj}\|.$$

Предположим, что $\Delta=\det\mathfrak{B}_2\neq 0$. Введем следующие обозначения: $\mathfrak{x}=(x_j)$, $\mathfrak{v}=(v_j)$, $\mathfrak{t}=(t_i)\ldots$ — m-мерные векторы (строки), $|\mathfrak{x}|$ — длина вектора $\mathfrak{x}$, $dt=$

$= dt_1 \ldots dt_m$, $< \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} > = \sum_{j=1}^{m} v_j k_j$ — скалярное произведение векторов $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{x}$.

Теорема 1. Пусть $EX^{(j)} = \mathfrak{v}$, $Z_n = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X^{(j)}}{\sqrt{n}}$ и пусть выполнены следующие условия:

(A) существует натуральное число n_0 такое, что Z_{n_0} имеет ограниченную плотность $p_{z_{n_0}}(\mathfrak{x})$;

(B) существует положительное α такое, что для всех m-мерных векторов $\mathfrak{v} \in R_m$, $|v_j| < \alpha$, сходится интеграл

$$\int_{R_m} e^{<\mathfrak{a}\mathfrak{x}>} dV(\mathfrak{x}).$$

Тогда для достаточно большого n дается формула обращения, и если $|x_j| > 1$ и $|x_j| = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$, $j = 1,2,\ldots,m$, то имеет место соотношение

$$\frac{p_{z_n}(\mathfrak{x})}{\varphi(\mathfrak{x})} = \exp\left[n \sum_{k=3}^{\infty} Q_k\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1 + o\left(\frac{|\mathfrak{x}|}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Здесь $\varphi(\mathfrak{x})$ обозначает плотность m-мерного собственного нормального распределения

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{x}'\right]}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}},$$

$Q_x(\mathfrak{x})$ — полилинейная форма k-й степени, коэффициенты которой однозначно определяются по заданному закону $V(\mathfrak{x})$. Ряд $\sum Q_k(\mathfrak{v})$ сходится для всех $\mathfrak{v}$ достаточно малой длины.

В случае решетчатых случайных векторов имеет место

Теорема 2. Предположим для простоты, что $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ могут принимать только целочисленные значения $\mathfrak{k}$ (векторы из R_m с целочисленными координатами). Пусть $p(\mathfrak{k}) = \mathbf{P}(X^{(j)} = \mathfrak{k})$ и $P_n(\mathfrak{k}) = \mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{m} X^{(j)} = \mathfrak{k}\right\}$ и пусть выполнены следующие условия:

(A) распределение векторов $X^{(j)}$ однорешетчатое, т. е. общий наибольший делитель объемов m-мерных симплексов, все $m+1$ вершин которых лежат в целочисленных точках $\mathfrak{k}$, для которых $p(\mathfrak{k}) > 0$, умноженных на $m!$, равен единице;

(B) существует такое положительное α, что для всех $\mathfrak{v}$, $|v_j| < \alpha$, сходится ряд $\sum_{\mathfrak{k}} p(\mathfrak{k}) e^{<\mathfrak{a},\mathfrak{k}>}$.

Если положить $\mathfrak{x} = \dfrac{\mathfrak{k} - n\mathfrak{a}}{\sqrt{n}}$ $\alpha = EX(i)$, и если $|x_j| > 1$, $|x_j| = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$; $j = 1,2,\ldots,m$, то имеет место соотношение

$$\frac{n^{\frac{m}{2}} p_n(\mathfrak{k})}{\varphi(\mathfrak{x})} = \exp\left[n \sum_{k=3}^{\infty} Q_k\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1 + o\left(\frac{|\mathfrak{x}|}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\varphi(\mathfrak{x})$ и $Q_k(\mathfrak{x})$ такие же, что и в теореме 1.

Резюме автора

1753. Винеровские случайные поля от нескольких параметров. Ченцов Н. Н., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 4, 607—609

Винеровское случайное поле от двух параметров определяется как случайная функция двух действительных переменных s, t, определенная на единичном квадрате и заданная нормальным распределением с плотностью вероятности

$$\Pi_{ij} [2\pi \Delta v_{ij}]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(\Delta x_{ij})^2}{2 \Delta v_{ij}}\right\},$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = 1$; $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = 1$; $x(t_i, 0) \equiv 0$, $x(0, s_i) \equiv 0$, $\Delta x_{ij} = x(t_i, s_j) - x(t_{i-1}, s_j) - x(t_i, s_{j-1}) + x(t_{i-1}, s_{j-1})$, $\Delta v_{ij} = (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1})$. Это определение отлично от определения броуновского движения с n параметрами.

Для любого случайного поля (не обязательно винеровского) доказывается, что если $M |\Delta x|^{\gamma} < k |\Delta v|^{1-\varepsilon}$ ($\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$), $x(0, s) = x(t, 0) \equiv 0$, то с вероятностью 1 поле непрерывно. Этим обобщается известное условие А. Н. Колмогорова для непрерывности случайного процесса. Винеровское случайное поле удовлетворяет данному условию. Определения и результаты распространяются на случай p параметров. M. Rosenblatt-Roth

1754. Об одной теореме Н. Винера. Фукс (Sur un théorème de N. Wiener. Fuchs Aimé), C. r. Acad. sci. 1955, **240**, № 13, 1396—1398 (франц.)

Теорема 1. Если $a(t, x)$ и $b(t, x)$ — действительные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

1) $a(t, x) \leqslant k_1 < \infty$, $|b(t, x)| \leqslant k_2 < \infty$,

2) $E\{|\sqrt{a[u, X(u)]} - \sqrt{a[u, X(t)]}|^2 \mid X(t) = x\} \leqslant k(u - t)^{\eta}$, $\eta > 0$, $t < u$, то всякое решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = b[t, X(t)]\, dt + \sqrt{a[t, X(t)]}\, d\Xi$$

(Ξ обозначает случайную функцию процесса Винера—Леви) почти наверное непрерывно.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 при $\eta > 1$ с вероятностью 1 имеет место неравенство

$$|X(t+h) - X(t)| \leqslant c\sqrt{2h \log 1/h} \text{ при } c > \sqrt{k_1},$$

причем равномерно относительно $t \in [T_0, T_1]$.

Теорема 1 обобщает известный результат Винера, а теорема 2 — результат Форте (J. math. pures et appl., 1943, 177). M. Rosenblatt-Roth

1755. Мера поверхности, внутренней по отношению к блужданию Пойа. Хаммерсли (The area enclosed by Polya's walk. Hammersley J. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, № 1, 78—87 (англ.)

Блужданием Пойа в евклидовой плоскости называется движение точки, совершающей независимые перемещения длины 1 параллельно координатным осям, причем вероятность всякого перемещения равна 1/4. В результате n перемещений получается некоторая ломаная T_n. Внутренностью T_n называется множество всех тех точек, которые не лежат на T_n и которые невозможно соединить с бесконечно удаленной точкой, не пересекая T_n по крайней мере один раз. Пусть A_n — мера внутренности T_n. Для каждого блуждания w определяется, таким образом, последовательность случайных чисел $\{A_n(w)\}$.

Каждое блуждание типа Пойа может представляться в виде $0, i_1 i_2 \ldots$, где $i_j = 0,1,2,3$ в зависимости от того, происходило ли j-е перемещение направо, вверх, налево или вниз. Так блуждания представляются точками в единичном интервале Ω.

Доказывается, что для всякого w $0 \leqslant A_n(w) \lesssim \frac{1}{16} n^2$.

Доказывается также, что если $c_1 < \frac{\pi}{128}$ и $c_2 > 4$ суть данные постоянные числа, тогда для почти всех в смысле меры Лебега $w \in \Omega$ существует число $n_0(w) < \infty$ такое, что

$$\frac{c_1 n}{\log n} < A_n(w) < c_2 n \log\log n$$

при $n \geqslant n_0(w)$.

Указывается, без доказательства, результат Леви о том, что вместо $c_2 > 4$ можно брать $c_2 > \frac{1}{4\pi}$, причем этот результат нельзя улучшить. M. Rosenblatt-Roth

1756. Оператор сдвига для нестационарных стохастических процессов. Гетур (The shift operator for nonstationary stochastic processes. Getoor R. K.), Duke Math. J., 1956, 23, № 1, 175—187 (англ.)

Случайная функция $x(t)$, $t \geqslant 0$, называется функцией нормального типа, если: 1) $x(t)$ непрерывна в среднем квадратическом, $t \geqslant 0$; 2) оператор сдвига V_s (т. е. $V_s x(t) = x(t+s)$) определен для всякого $t > 0$, 3) существует полугруппа нормальных операторов N_t, $t > 0$, определенных на некотором расширении L замкнутой линейной оболочки элементов $x(t)$, $t \geqslant 0$, причем область определения D_t каждого N_t плотна в L, а $N_t x$ слабо непрерывна как функция от $t > 0$ для всякого $x \in D = \bigcap_{t>0} D_t$.

Доказывается, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, был нормального типа, состоит в существовании конечной меры α на борелевских множествах плоскости, такой, что $R(t,s) = \int e^{\lambda t}\, e^{\bar{\lambda} s}\, \alpha(d\lambda)$, $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, где $R(t,s)$ — корреляционная функция процесса и $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$.

Другое необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы функция $R\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}\right)$ была непрерывной при $p \geqslant 0$, $|q| \leqslant p$ и для любых комплексных $a_1, \ldots, a_n$, $p_i \geqslant 0$, $|q_i| < \frac{p_i}{2}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ для любого n имело место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \bar{a}_j R\left(\frac{p_i + p_j}{2}, \frac{q_i - q_j}{2}\right) \geqslant 0.$$

Если, в частности, N_t — унитарные операторы, то получаются результаты относительно стационарных в широком смысле процессов (в смысле Хинчина), и если N_t — самосопряженные операторы, — результаты Лоэва (см. Lévy P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris, 1948).

Примечание референта. Операторы V_t были изучены Брамом. (РЖМат, 1957, 6486).

M. Rosenblatt-Roth

1757. Соображения о некоторых точечных процессах и о присоединенных случайных функциях. Блан-Лапьер (Considérations sur certains processus ponctuels et sur des fonctions aléatoires associées. Blanc-Lapierre A.), Colloq. analyse statist. CBRM, Bruxelles, 1954. Paris, 1955, 25—55 (франц.)

Рассматриваются случайные точечные процессы $x(t)$, т. е. процессы, связанные с последовательностью t_i $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ случайных моментов времени. Определяется класс „процессов без памяти" $\{t_i\}$ таких, что будущее относительно момента α не зависит от прошлого и от того, принадлежит α или нет к $\{t_i\}$. Доказывается, что этот класс совпадает с классом пуассоновских процессов. Приводятся разные примеры точечных процессов, которые можно строить, исходя из пуассоновского, путем случайного или периодического вычеркивания точек t_i, путем взятия серединных точек интервалов (t_{i-1}, t_i), способом случайного сдвига точек t_i.

К точечным процессам $\{t_i\}$ можно присоединить случайные процессы $x(t;\, t_i\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Даются примеры процессов, в которых x зависит только от первого $t_i < t$ или только от $t_{i-1} < t_i < t$, и других, в которых x зависит от всех $t_i < t$. Подробно изучаются эти примеры. M. Rosenblatt-Roth

1758. О границах, определенных стохастическими матрицами. Феллер (On boundaries defined by stochastic matrices. Feller William), Appl. Probability. New York—Toronto—London, McGraw—Hill Book Co., 1957, 35—40 (англ.)

Кратко излагаются исследования автора, посвященные естественному определению границы для случайного процесса. При этом, как отмечает автор, счетный случай поучителен потому, что здесь отсутствует топология на границе, определенная независимо от оператора процесса. Пусть E — множество точек 1, 2, 3 . . . . Обозначим $\mathbf{X} = (x(s); x(2), \ldots)$ и $\| \mathbf{X} \| = \sup_i |x(i)|$.

Пусть Π — матрица с неотрицательными элементами $\Pi(i,j)$ и $\sum_j (\Pi_{i,j}) \leqslant 1$. Обозначим через $\mathfrak{P}$ множество всех неотрицательных решений уравнения $\mathbf{X} = \Pi\mathbf{X}$ таких, что $\| \mathbf{X} \| \leqslant 1$. $\mathfrak{P}$ представляет собой положительный конус. Такой конус вполне определяется своими крайними элементами в смысле Крейна—Мильмана. Далее строятся эти крайние элементы и дается их вероятностная интерпретация.

Пусть $\Gamma \subset E$. Обозначим $\Pi(i, \Gamma) = \sum_{j \in \Gamma} \Pi(i,j)$;

$$\Pi_\Gamma(i,j) = \begin{cases} \Pi_{ij}, & \text{если } j \in \Gamma \\ 0, & \text{если } j \notin \Gamma, \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_\Gamma(i) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_\Gamma^{(n)}(i,\Gamma), & \text{если } i \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } i \notin \Gamma, \end{cases}$$

и $S_\Gamma(i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_j \Pi^{(n)}(i,j) \cdot \mathfrak{S}_\Gamma(j)$.

Множество Γ называется устойчивым, если $S_\Gamma(i)$ не все равны нулю. Для случайного процесса, связанного с Π_{ij}, $\mathfrak{S}_\Gamma(i)$ есть вероятность того, что частица, начиная движение из точки $i \in \Gamma$, никогда не покинет Γ. $S_\Gamma(i)$ есть вероятность того, что частица, начиная движение из произвольного i, после конечного числа шагов попадает в Γ и останется там навсегда. Если цепь возвратна и неприводима, то E — единственное устойчивое множество. Функция $S_\Gamma(i)$ (вероятность устойчивого множества) совпадает с крайней точкой в смысле Крейна—Мильмана.

Пусть все состояния цепи невозвратны и пусть Γ — устойчивое множество. Тогда существует монотонно убывающая последовательность множеств $\Gamma_n \subset \Gamma$, сходящихся к пустому множеству, такая, что $S_{\Gamma_n}(i) \equiv S_\Gamma(i)$. Последовательность вложенных друг в друга множеств

Γ_n описывает „маршрут ухода на бесконечность". Далее автор конструирует границу для случая, когда уравнение $\mathbf{X} = \Pi\mathbf{X}$ имеет ровно N линейно независимых решений. В этом случае существует N исключающих друг друга маршрутов ухода на бесконечность и частица движется по одному из них; граница состоит из N изолированных точек. Каждое из множеств Γ_n есть окрестность соответствующей граничной точки.

Однако $\mathfrak{P}$ может содержать континуум независимых решений, и граница может иметь очень сложную топологическую структуру. Чтобы дать точное определение границы для общего случая, необходимо рассматривать $\mathfrak{P}$ как структуру и определить границу как пространство максимальных идеалов. Такое построение имеется в другой работе автора (РЖМат, 1958, 7974).

В работе установлено соотношение эквивалентности между стохастическими матрицами. При этом „большая и лучшая" граница получается, если рассматривать решения уравнения $\Pi\mathbf{X} = \mathbf{X}$ относительно множества всех матриц, эквивалентных П. Это соответствует рассмотрению неограниченных решений этого уравнения.

Далее автор строит другую границу для П. А именно, пусть $A = (a(1), a(2), \ldots)$ является решением уравнения $A = A\Pi$. Введем матрицу $\Pi^*_{ij} = \Pi_{ij}\frac{a(j)}{a(i)} \cdot \Pi^*_{ij}$ — строго стохастическая матрица. Ее граница называется присоединенной. Частица в случайном процессе, определенном по П, движется по направлению к построенной раньше границе. Присоединенная граница — та, от которой движется частица в том же случайном процессе.

Далее автор указывает, что построенные границы позволяют описать процессы с непрерывным временем, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям Колмогорова. Р. З. Хасьминский

1759. О неоднородном процессе рождения и гибели. Ламенс (Sur le processus non homogène de naissance et de mort à deux variables aléatoires. Lamens A.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 10, 711—719 (франц.)

Продолжение другой статьи (РЖМат, 1958, 10074), в которой для однородного процесса рождения и гибели был установлен метод решения, основанный на уравнении с обращенным временем, выводимом из интегрального уравнения. В статье показывается, что эти приемы полностью распространяются на случай, когда в совокупности можно различить два типа индивидуумов. В приложении этого процесса к демографии необходимо принимать в расчет относительную вариацию в числе мужчин и женщин, которой нельзя пренебрегать. Стохастический аспект проблемы впервые был рассмотрен Кендаллом (Kendall D. G., J. Roy. Statist. Soc., 1949, **B11**, 230—264), а затем для однородного случая детально разработан Джоши (РЖМат, 1958, 10071) и Гудманом (РЖМат, 1954, 3768), чьи одновременные, но независимые работы дополнили друг друга.

Работа, пожалуй, является первой, которая относится к неоднородному случаю. По резюме автора.

1760. Предельная теорема для процессов со стационарными независимыми приращениями. Козин (A limit theorem for processes with stationary independent increments. Kozin Frank), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 5, 960—963 (англ.)

Пусть $X(t)$ — случайный процесс со стационарными независимыми приращениями; в таком случае характеристическая функция $\varphi_t(u) = M[\exp(iuX(t))]$ будет иметь вид $\varphi_t(u) = \exp[th(u)]$, где можно считать, что $h(0) = 0$. Доказывается следующая теорема: Если $[X(t); 0 \leqslant t \leqslant 1]$ — процесс со стационарными независимыми приращениями, имеющий характеристическую функцию $\exp(th(u))$ и такой, что существует $M[X(t)^4]$ и $h^{IV}(0) = 0$, а $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, — совокупность разбиений интервала $[0,1]$, удовлетворяющая условию $\lim_{n\to\infty}\Delta t_{max} = 0(n^{-2})$, где $\Delta t_{max} = \max_k(t_k - t_{k-1})$, то с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n}[X(t_k) - X(t_{k-1})]^2 = -h''(0).$$

Эта теорема обобщает один недавний результат Бакстера (РЖМат, 1958, 9033), в котором в качестве точек деления выбирались фиксированные точки $t_k = \frac{K}{2^n}$, а также известный результат Леви (Amer. J. Math., 1940, 62, 487—550), касающийся случайного процесса броуновского движения (процесса Винера). А. М. Яглом

1761. О виде функции $K(x, y)$ Пойа, связанной с критерием Вальда. Мерик (Sur une expression de la fonction $K(x, y)$ de Pólya, liée au test de Wald. Méric Jean), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 19, 1255—1257 (франц.)

Через T обозначим совокупность точек первого квадранта на плоскости (x, y), удовлетворяющих неравенствам $-k_1 < ax - by < k_2$, k_1 и k_2 — положительные постоянные и $b \geqslant a$. Точка P, выходящая из начала координат, проходит за один шаг случайного блуждания отрезок, параллельный оси x или y длиною 1. Через $K(x, y)$, $(x, y) \in T$, обозначим число тех путей, которые идут из $(0, 0)$ до точки (x, y), не выходя за пределы области T.

Автор дает некоторое комбинаторное выражение для $K(x, y)$; при этом $K(x, y)$ будет выражаться через числа путей, которые ведут к определенным точкам (лежащим на границе области). I. Vincze

1762. Стремление явлений, претерпевающих марковскую эволюцию, к устойчивому состоянию равновесия. Фукс, Вижье (Tendance vers un état d'équilibre stable de phénomènes soumis à une évolution markovienne. Fuchs Aimé, Vigier Jean-Pierre), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 9, 1120—1122 (франц.)

Пусть $X(t)$ — случайная марковская функция, однородная по времени, и пусть для $t \geqslant 0$ и измеримого на прямой множества E $F(t, x, E)$ — вероятность перехода, $\Phi(t, E)$ — безусловное распределение вероятностей.

Пусть $p(t; x, y)$ — подынтегральная функция в представлении Радона — Никодима $F(t; x, E)$ по отношению к положительной ограниченной мере $\varphi(E)$.

Гипотеза $\mathfrak{H}$: Существует функция φ указанного типа и борелевское множество C такие, что одновременно $\varphi(C) > 0$ и $p(t_0; x, y) \geqslant \delta$ для любого x, любого $y \in C$ и достаточно большого t_0.

Утверждается, что если $X(t)$ удовлетворяет гипотезе $\mathfrak{H}$, то существует закон распределения $\wedge(E)$, не зависящий от начального закона распределения, такой, что

$$|\Phi(t, E) - \wedge(E)| < he^{-kt}. \quad (1)$$

(h, k — положительные не зависимые от E постоянные). При этом для всякого $t \geqslant 0$

$$\wedge(E) = \int_{-\infty}^{\infty}\wedge(dx)F(t; x, E).$$

Пусть $X(t)$ неоднородна по времени и $F(t, x; \tau, E)$ — вероятность перехода. Предполагаем существование строго положительного $\wedge(E)$ (не обращается в нуль для множеств E ненулевой меры), для которого $\wedge(E) = \int_{-\infty}^{\infty}\wedge(dx)F(t, x; \tau, E)$ при $t, \tau \geqslant 0$, $t < \tau$.

Гипотеза $\mathfrak{Z}'$: Существует борелевское множество C такое, что при достаточно большом t_0 одновременно $\wedge(C) > 0$ и $F(t, x; t_0, E) \geqslant \delta \wedge(E)$ для любых t, E и для всякого $x \in C$ ($\delta > 0$).

Утверждается, что если в этих условиях процесс удовлетворяет $\mathfrak{Z}'$ и существует $\wedge(E)$ указанного типа, то (1) имеет место. Указывается принцип доказательства. M. Rosenblatt-Roth

1763. О некоторых линейных операторах, связанных с действительными процессами Маркова. Фукс (Sur certains opérateurs linéaires associés aux processus réels de Markoff. Fuchs Aimé), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 14, 1506—1508 (франц.)

Пусть $X(t)$ — действительнозначная случайная марковская функция, $F(t, x; \tau, E) = P(x(\tau) \in E \mid X(t) = x)$ ($t < \tau$, E — измеримое множество на прямой). Оператор $T_{t,\tau}$ имеет вид $\psi(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(dx) F(t, x; \tau, E)$, $\varphi \in M$, M — банахово пространство счетноаддитивных функций множеств с ограниченной абсолютной вариацией, определенных на теле измеримых множеств на прямой, причем $\|\varphi\|_M$ — абсолютная вариация $|\varphi(E)|$ на $(-\infty, +\infty)$.

Оператор $\overline{T}_{\tau,t}$ имеет вид $\overline{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(\lambda) \cdot F(t, x; \tau, d\lambda)$ ($t < \tau$), $\overline{\varphi} \in \overline{M}$, $\overline{M}$ — банахово пространство ограниченных измеримых функций, определенных на $(-\infty, +\infty)$, причем $\|\overline{\varphi}\|_{\overline{M}} = \sup |\overline{\varphi}(x)|$. $X(t)$ называется локально непрерывной в точке t (C), если $F(t, x; t + \Delta t, E)$ при $\Delta t \to 0$ сходится в среднем порядка 1 и равномерно по x к 1 при $x \in E$ и к 0 при $x \notin E$.

Теорема 1. Локальная непрерывность (C) в точке t влечет за собой непрерывность $T_{t,\tau}$ и $T_{\tau,t}$ в смысле равномерной топологии.

Теорема 2. Пусть $R(t, \tau, h) = T_{t-h,\tau} - T_{t,\tau+h}$ ($t < \tau$, $h > 0$). Если оператор $T_{t,\tau}$ ($t < \tau$) непрерывен в смысле равномерной топологии по t и по τ, то необходимым и достаточным условием для существования $A(t) = \lim_{h \to 0} \frac{T_{t-h,t} - I}{h}$ в смысле равномерной топологии является существование $\lim_{h \to 0} \int_\alpha^\beta \left[R(t, \tau, h)/h \right] d\tau$ в том же смысле. В однородном случае это условие тривиально.

Теорема 3. Пусть имеется локальная непрерывность (C) и пусть условия теоремы 2 выполняются. Пусть предел $\lim_{h \to 0} \frac{T_{t,t+h} - I}{h}$ существует и равен $A(t$

В этих условиях утверждается, что F удовлетворяет двум уравнениям А. Н. Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(t, x; \tau) = A(\tau) F(t, x; \tau),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, \ldots, \tau, E) = -\overline{A}(t) F(t, \ldots, \tau, E),$$

где $A(t)$ действует на F как элемент из M и $\overline{A}(t)$ — на F как элемент из $\overline{M}$.

Надо заметить, что $\varphi[\overline{T}_{\tau,t}\overline{\varphi}] = [T_{t,\tau}\varphi]\overline{\varphi}$. Доказательств не приведено. M. Rosenblatt-Roth

1764. Теорема об асимптотическом поведении марковских цепей, непрерывных по времени. Родяну (O teoremă privind comportarea asimptomică a lanturilor Markov continue in timp. Rodeanu R.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» si Politehn. Bucuresti. Ser. stiint. natur, 1955, № 8, 39—42 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть E — множество возможных состояний марковского процесса, непрерывного по времени t, A — некоторое подмножество E, $P(t, x; s, A)$ — вероятность перехода; доказывается

Теорема. Если существует последовательность чисел $\alpha(t_j)$, для которых $\sum_j \alpha(t_j) = \infty$ (при $t_1 < t_2 < \ldots < t_j < \ldots$), и для всякого разложения $A_1 \cup A_2 = E$ имеет место соотношение $P(t, x; s, A_i) \geqslant \alpha(s)$ при $i = 1$ или при $i = 2$ ($x \in E$, $s \in \{t_j\}$), то

$$\lim_{s \to \infty} |P(t, x; s, A) - P(t, y; s, A)| = 0,$$

причем сходимость равномерна по x, y, A для всякого конечного t. M. Rosenblatt-Roth

1765. Об одном классе предельных теорем для цепей Маркова. Скороход А. В., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 5, 781—784

Рассматривается последовательность серий случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова

$$\xi_{n0} = 0, \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}, \tag{1}$$

и пусть $P_n(x, A) = P\{\xi_{n,h+1} \in A \mid \xi_{nh} = x\}$. С каждой последовательностью (1) связывается случайная ломаная

$$\xi_n(t) = \xi_{n\,[t(n+1)]}, \tag{2}$$

$t \in [0,1]$, $\xi_n(1) = \xi_{nn}$ ($[\alpha]$ — целая часть α). Рассматривается также однородный марковский процесс $\xi(t)$, $t \in [0,1]$, с вероятностью перехода $P(t, x, A)$, причем: П 1) $\xi(0) = 0$, П 2) для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ выражение $\left[T_t \varphi\right](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) P(t, x, dy)$ непрерывно по x при данном t и непрерывно по t при данном x; П 3) для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$, ограниченной вместе со своими двумя первыми производными, величины $\frac{1}{h}\left[[T_h \varphi](x) - \varphi(x)\right]$ ограничены в совокупности для $h > 0$ и существует предел

$$[A\varphi](x) = \lim_{h \to 0} \frac{[T_h \varphi](x) - \varphi(x)}{h} = \frac{b(x)}{2} \varphi''(x) + a(x) \varphi'(x) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(y) - \varphi(x) - \varphi'(x) \frac{y - x}{1 + (y - x)^2} \right] d_y M(x, y), \tag{3}$$

где $b(x)$, $a(x)$, $M(x, y)$ — целесообразно подобранные функции. П1), П2), П3) образуют условие П. Условие Ц: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) P_n(x, dy)$ непрерывен по x для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$. Условие С: Для всякой функции $\varphi(x)$, для которой (3) является непрерывной ограниченной функцией, $[A_n \varphi](x) = n \int [\varphi(y) - \varphi(x)] P_n(x, dy)$ ограничены в совокупности и $\lim_{n \to \infty} [A_n \varphi](x) = [A\varphi](x)$ для всех x.

Пусть K — пространство всех функций $x(t)$, $t\in[0,1]$, имеющих в каждой точке конечные пределы слева и справа и непрерывных справа. Если $x(t)\in K$ и $\varepsilon>0$, то пусть

$$x^{\varepsilon}(t)=\sum_{\substack{\tau\leqslant t\\ |x(\tau)-x(\tau-0)|>\varepsilon}}[x(\tau)-x(\tau-0)];$$

$$\overline{x}^{\varepsilon}(t)=x(t)-x^{\varepsilon}(t).$$

Последовательность $x_n(t)$ $\mathfrak{Z}$-сходится к $x(t)$ (т. е. $x_n(t)\to x(t)$), если: 1) для почти всех (по мере Лебега) ε $x_n^{\varepsilon}(t)\to x^{\varepsilon}(t)$ в каждой точке непрерывности $x^{\varepsilon}(t)$ при $n\to\infty$;

2) $\lim_{\varepsilon\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\{\sup_{t\in[0,1]}|\overline{x}_n^{\varepsilon}(t)-\overline{x}^{\varepsilon}(t)|\}=0$.

Пусть на пространстве K процессу $\xi(t)$ соответствует мера μ, для любого множества $\mathfrak{A}\subset K$, для которого определена вероятность $P\{\xi(t)\in\mathfrak{A}\}=\mu(\mathfrak{A})$.

Теорема. Если величины (1) и процесс $\xi(t)$ удовлетворяют условиям П, Ц, С, а функционал $F[x(t)]$, определенный на K, непрерывен почти всюду по мере μ в топологии $\mathfrak{Z}$, то для последовательности случайных величин $F[\xi_n(t)]$ существует предельное распределение, совпадающее с распределением величины $F[\xi(t)]$, т. е. для почти всех α

$$\lim_{n\to\infty}P\{F[\xi_n(t)]<\alpha\}=P\{F[\xi(t)]<\alpha\}.$$

Даются некоторые следствия этой теоремы.

Имеются следующие опечатки: 1) на стр. 782, 5-я строка сверху, вместо $\frac{[T_n\varphi](x)-\varphi(x)}{h}$ надо читать $\frac{[T_h\varphi](x)-\varphi(x)}{h}$; 2) на стр. 783, 28-я строка сверху, вместо $x^{\varepsilon}(t)=x(t)-x^{\varepsilon}(t)$ надо читать $\overline{x}^{\varepsilon}(t)=x(t)-x^{\varepsilon}(t)$.

M. Rosenblatt-Roth

1766. О корреляционном эффекте для стационарных случайных процессов. Браун (On a cross-correlation property for stationary random processes. Brown John L., Jr), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 1, 28—31, 81 (англ.)

Для двух стационарных случайных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обозначим через $p(x_1, x_2)$ плотность их совместного вероятностного распределения, которая зависит от $\tau=t_1-t_2$. В дальнейшем используется разложение $p(x_1, x_2)$ в двойной ряд по системе двух множеств ортонормальных полиномов с весовыми функциями $p_1(x_1)$ и $p_2(x_2)$ соответственно, где

$$p_1(x_1)=\int p(x_1, x_2)\,dx_2,\quad p_2(x_2)=\int p(x_1, x_2)\,dx_1.$$

Корреляционный эффект заключается в следующем: если один из двух процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ подвергается искажению в нелинейном устройстве, то корреляционная функция после искажения пропорциональна первоначальной корреляционной функции. Математически это выражается так:

$$\Phi_{12}(\tau)=K(f)\,\psi_{12}(\tau),$$

где

$$\Phi_{12}(\tau)=\iint[f(x_1)-M\{f(x_1)\}][x_2-M\{x_2\}]\,p(x_1, x_2)\,dx_1dx_2,$$

$$\psi_{12}(\tau)=\iint[x_1-M\{x_1\}][x_2-M\{x_2\}]\,p(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

$K(f)$ есть линейный функционал, который зависит от функции $f(x)$, характеризующей данное нелинейное устройство, и не зависит от времени τ. В работе исследуются условия, при которых возможен корреляционный эффект. Найденное необходимое и достаточное условие дается в виде требований, наложенных на коэффициенты разложения. Полученная теорема включает в себя, в частности, случаи, когда совместное распределение $x_1(t)$ и $x_2(t)$ гауссовское или когда матрица коэффициентов разложения диагональна.

В заключение исследуются условия, при которых константа пропорциональности в корреляционном эффекте равна „эквивалентному приращению“ для нелинейного устройства. Необходимое и достаточное условие, чтобы эти две константы были равны, формулируется также в требованиях, наложенных на коэффициенты разложения $p(x_1, x_2)$.

Указывается возможное обобщение полученных результатов на нестационарный случай.

Б. М. Клосс

1767. Понятие энтропии в теории вероятностей. Хинчин (Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Chintschin A. J.), Math.-Forschungsber., 1957, **4**, 7—25 (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1954, 3771).

1768. О мере информации, доставляемой экспериментом. Линдли (On a measure of the information provided by an experiment. Lindley D. V.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 4, 986—1005 (англ.)

Статья посвящена применению понятия информации одного случайного объекта относительно другого к задаче сравнения статистических экспериментов и сопоставлению этого приема с ранее имевшимся. Эксперимент задается четверкой $\varepsilon=\{X, B, \Theta, P\}$, где X — пространство элементарных событий, B — σ-алгебра в нем, Θ — пространство параметров (полагаемых случайными), P — набор условных мер $p(x\mid\theta)$. Эксперимент должен доставить сведения о параметре $\theta\in\Theta$. $p(x)=\int_{\Theta}p(x|\theta)\,p(\theta)d\theta$, где $\int\ldots d\theta$ — знак интегрирования по доминирующей мере, а p — знак плотности вероятности (не всегда одной и той же), дает распределение наблюдений $x\in X$.

При априорном знании о θ, и $p(\theta)$, количество информации систематического эксперимента о параметрах определяется по Шеннону:

$$g(\varepsilon, p(\theta))=g(\varepsilon)=\iint p(x,\theta)\lg\frac{p(x,\theta)}{p(x)\,p(\theta)}\,dx\,d\theta$$

(в указанных условных обозначениях). Приводятся различные формулы, облегчающие вычисление $g(\varepsilon, p(\theta))$. Вводится понятие суммы экспериментов $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$: пусть наблюдение x для ε — упорядоченная пара наблюдений (x_1, x_2), $x_i\in X_i$ $(i=1,2)$); B_i — σ-алгебра, индуцированная в X_i из X преобразованием $x_i=x_i(x)$, P_i — множество условных мер $p(x_i\mid\theta)$. $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ называется суммой экспериментов ε_1 и ε_2, где $\varepsilon_i=(X_i, B_i, \Theta, P_i)$. $(i=1,2;\ \Theta$ — одно и то же для ε_1 и $\varepsilon_2)$. Далее, пусть $g(\varepsilon_2\mid\varepsilon_1)$ означает усреднение $g(\varepsilon_2(x_1), p(x_1\mid\theta))$ по x_1 Доказывается теорема: $g(\varepsilon_1)+g(\varepsilon_2\mid\varepsilon_1)=g(\varepsilon)$, и следствие: если x_1 — достаточная статистика для x в смысле Неймана — Фишера, то $g(\varepsilon_1)=g(\varepsilon)$. Эксперименты ε_1 и ε_2 с $\Theta_1=\Theta_2=\Theta$ называются независимыми, если $p(x_1, x_2\mid\theta)=p(x_1\mid\theta)\,p(x_2\mid\theta)$ для каждого $\theta\in\Theta$. Доказывается теорема: Если ε_1 и ε_2 независимы, то $g(\varepsilon_2\mid\varepsilon_1)\leqslant g(\varepsilon_2)$, со знаком равенства тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 независимы. Далее, $g(\varepsilon_1)+g(\varepsilon_2)\geqslant g(\varepsilon)$ (знак равенства при тех же условиях). Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ — серия независимых одинаковых экспериментов и пусть $\varepsilon^{(1)}=\varepsilon_1$; $\varepsilon^{(2)}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon^{(n)}=(\varepsilon^{(n-1)}, \varepsilon_n)$; тогда име-

ет место следующая теорема: $g(\varepsilon^{(n)}) = j_n$ — возрастающая вогнутая (снизу) функция n. Смесью опытов ε_1 и ε_2 с $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ называется опыт, в котором ε_1 производится с вероятностью λ и ε_2 — с вероятностью $1-\lambda$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Смесь обозначается через $(\lambda\,\varepsilon_1 + (1-\lambda)\,\varepsilon_2)$; при этом $g(\lambda\varepsilon_1 + (1-\lambda)\,\varepsilon_2) = \lambda g(\varepsilon_1) + (1-\lambda)\,g(\varepsilon_2)$. В этой терминологии предыдущая теорема принимает вид: $g(\lambda\,\varepsilon^{(k)} + (1-\lambda)\varepsilon^{(m)}) \leqslant g(\varepsilon^{(n)})$, если $n = \lambda h + (1-\lambda)\,m$ (взятие выборки смешанного объема n информационно выгоднее смешения двух выборок). Пусть ε_1 и ε_2 — два эксперимента с $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$. ε_1 называется не менее информативным, чем ε_2 $(\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2)$, если $g(\varepsilon_1, p(\theta)) \geqslant g(\varepsilon_2, p(\theta))$ для всех $p(\theta)$. Не все эксперименты информативно сравнимы. Отдельные случаи разбираются в некоторых теоремах, как, например: если ε_1, ε_2, ε_3 — три эксперимента с одинаковым Θ и ε_3 не зависит от ε_1 и ε_2, то из $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ следует $(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Далее информативная сравнимость сопоставляется со сравнимостью по Боненблусту — Шапли — Шерману: $\varepsilon_1 \supset \varepsilon_2$, если, грубо говоря, всякая функция потери, достижимая при ε_2 достижима и при ε_1; по Д. Блекуэллу: $\varepsilon_1 \xi \varepsilon_2$, если с помощью некоторого случайного приема, производя опыт ε_1, можно достигнуть результата, эквивалентного выполнению ε_2. Теорема 9: Если $\varepsilon_1 \xi \varepsilon_2$ то $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$. Приводится пример биномиальной дихотомии $(X = \{0,1\}$; $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$; $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 1$; $p(x=1 \mid \theta_i) = 1 - p(x=0 \mid \theta_i) = \theta_i)$, показывающий, что область информативной сравнимости покрывает большую часть треугольной области параметров $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 1$, если сравнивать все опыты с определенным $\theta_1 = \frac{1}{4}$, $\theta_2 = \frac{3}{4}$. Далее рассматриваются примеры с непрерывным пространством параметров Θ. Для x нормального (θ, σ); θ нормального (μ, τ), $g(\varepsilon(\sigma_1), p(\theta)) > g(\varepsilon(\sigma_2), p(\theta))$, если $\sigma_1 < \sigma_2$. Для многомерного нормального случая $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ со средними $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ и корреляционной матрицей C, $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ нормального со средним μ и корреляционной матрицей C, $g(\varepsilon(C), p_A) = \frac{1}{2} \lg \frac{\det(A+C)}{\det C}$ (p_A — плотность θ). Здесь не всегда имеем информативную сравнимость: $g(\varepsilon(C_1), p_A) > g(\varepsilon(C_2), p_A)$, если $\det(1 + A^{-1}C_1)\det C_2 > \det(1 + A^{-1}C_2)\det C_1$ (область сравнимости); если элементы $A^{-1}C_i$ малы, то приблизительная область сравнимости есть $\det C_2 > \det C_1$. Далее рассматривается информационная постановка эксперимента: независимые и одинаковые опыты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ производятся до тех пор, пока не получится заданное количество информации о параметре θ. Пусть ставится задача дихотомии $(\Theta = (\theta_1, \theta_2)$; $X, B, P)$ общего вида; пусть $p_n(\theta_i) = p(\theta_i \mid x_1, \ldots, x_n)$. Для того чтобы получить количество информации не меньшее, чем δ, необходимо и достаточно производить эксперимент до тех пор, пока не нарушится хотя бы одно из неравенств $1 - A < p_n(\theta_1) < A$ или же, что все равно,

$$\frac{(1-A)\,p(\theta_2)}{A\,p(\theta_1)} < \frac{p(x_1, \ldots, x_n \mid \theta_1)}{p(x_1, \ldots, x_n \mid \theta_2)} < \frac{A \cdot p(\theta_2)}{(1-A)\,p(\theta_1)},$$

где $A \log A + (1-A)\log(1-A) = \delta$, т. е. приходим к известной последовательной схеме Вальда. Другие (несколько искусственные) примеры касаются непрерывного множества параметров.

Опечатка: на стр. 1061 следует читать $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ вместо $(\theta_i, \ldots, \theta_k)$. Ю. В. Линник

1769. Индивидуальная эргодическая теорема в теории информации. Брейман (The individual ergodic theorem of information theory. Breiman Leo), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 809—811 (англ.)

Рассматривается стационарный эргодический источник

$$x = (\ldots x_{-1}, x_0, x_1, \ldots),$$

где x_i принимают конечное число значений $a_1, \ldots a_s$. Макмиллан (РЖМат, 1953, 1731) доказал, что последовательность

$$-\frac{1}{n} \log p(x_0, \ldots, x_{n-1})$$

$(p(x_0, \ldots, x_{n-1})$ означает вероятность случайной цепочки $x_0, \ldots, x_{n-1})$ при $n \to \infty$ стремится в среднем (L^1) к некоторой постоянной. В реферируемой работе показывается, что эта последовательность при $n \to \infty$ сходится с вероятностью 1. Доказательство основано на одном неравенстве для мартингалов. Цзян Цзэ-пей

1770. Вопросы диагностики и аксиоматика информаций. Шютценбергер (Les problèmes de diagnostic et l'axiomatique des informations. Schützenberger P.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1955, 62, № 7-8, 222—226 (франц.)

В качестве меры информации вероятностного поля $X_1, X_2, \ldots$ предлагается величина $\sum_i P(X_i)\,D \log P(X_i)$, где D обозначает некоторый линейный оператор. Рассматриваются частные случаи: $D = \text{const}$ и $D = -\partial^2/\partial\Theta^2$.

M. Rosenblatt-Roth

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1771. О книге Фишера «Статистические методы и научные выводы». Барра («Statistical methods and scientific inference». Sir R. A. Rischer. Barra J. R.), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, 6, № 1, 3—10 (франц.)

Изложение основных идей последней книги Фишера «Статистические методы и научные выводы».

Н. В. Смирнов

1772. Задачи индуктивного вывода. Нейман (The problem of inductive inference. Neyman Jerzy), Trans. Sympos. Appl. Math., 1954. 2. New York—London, 1955, 13—45 (англ.)

Перепечатано из Communs. Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 1, 13—45

1773. Индуктивная логика и статистический метод. Андерсон (Induktive Logik und statistische Methode. Anderson Oskar), Allgem. statist. Arch., 1957, 41, № 3, 235—241 (нем.)

Обсуждается вопрос: когда высказывание об одном или нескольких случаях можно распространить на все случаи совокупности. Кратко касаясь истории этого вопроса, автор указывает, в частности, что метод индукции Милля для исследований нигде не применим. Автор считает, что ответ на обсуждаемый вопрос может дать только вероятностно-статистический метод.

Л. Е. Майстров

1774. Выбор интервалов группирования данных. Шаркади (Osztályközök megválasztása minták elemeinek osztálybasorolásánál. Sarkadi Károly), Magyar tud. akad. alkalm. mat. közl., 1953, 2, 299—306 (венг.; рез. русск., англ.)

Доказывается следующее утверждение: Пусть случайная величина имеет плотность вероятности $f(x)$. Среднее квадратическое отклонение между выборочной средней, вычисленной из группированных данных, и „истин-

ной" средней минимально, если удовлетворяются соотношения

$$\alpha_i = \frac{\int_{c_{i-1}}^{c_i} xf(x)dx}{\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx} \quad (i=1,2,\ldots,k),\ c_i = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$$

$$(i = 1,2,\ldots,k-1),$$

где c_i — концевые точки интервалов группирования ($-\infty=c_0<c_1<\ldots<c_{k-1}<c_k=+\infty$). Рассматривается единственность решения. В случае нормального распределения даются таблицы. Отмечается, что эти формулы согласуются с формулами расстояния планет от Солнца, выведенными согласно космогонической теории Шмидта.

T. Liptak

1775. Упорядоченная и неупорядоченная оценки в бесповторных выборках. Муртхи (Ordered and unordered estimators in sampling without replacement. Murthy M. N.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 18, № 3-4, 379—390 (англ.)

Под упорядоченной оценкой понимают оценку, составленную по выборке с учетом порядка следования выбранных единиц. Рассматривается бесповоротная неупорядоченная выборка (s) объема n из конечной совокупности объема N. Число таких выборок равно $\binom{N}{n}$. Каждой такой выборке соответствуют $n!$ упорядоченных выборок (s_i).

Пусть x_{s_i} ($s=1,2,\ldots,\binom{N}{n}$; $i=1,2,\ldots,M(=n!)$) есть оценка параметра Θ совокупности, основанная на упорядоченной выборке (s_i). Схема отбора такая, что вероятность p_s получить неупорядоченную выборку (s) равна сумме вероятностей p_{s_i} появления упорядоченных выборок (s_i). т, е. $p_s = \sum_{i=1}^{M} p_{s_i}$. Доказывается следующая

Теорема 1. Если $\hat{\Theta}_0 = x_{s_i}$ и $\hat{\Theta}_U = \sum_{i=1}^{M} x_{s_i} p'_{s_i}$ (где $p'_{s_i} = p_{s_i}/p_s$) являются оценками параметра Θ совокупности, то $M(\hat{\Theta}_U) = M(\hat{\Theta}_0)$ и $D(\hat{\Theta}_U) \leqslant D(\hat{\Theta}_0)$. Из этой теоремы автор получает следствия: 1) Средняя квадратическая ошибка $\hat{\Theta}_U$ не больше средней квадратической ошибки $\hat{\Theta}_0$. 2) Если $\hat{D}_0(\hat{\Theta}) = d_{s_i}$ есть упорядоченная оценка для $D(\hat{\Theta}_0)$ то $\hat{D}_U(\hat{\Theta}_0)$ — неупорядоченная оценка для $D(\hat{\Theta}_0)$, которая имеет меньшую среднюю квадратическую ошибку, чем средняя квадратическая ошибка оценки $D_0(\hat{\Theta}_0)$

$$\hat{D}_U(\hat{\Theta}_U) = \hat{\Theta}_U - \sum_{i=1}^{M} (x^2_{s_i} - d_{s_i}) p'_{s_i} \qquad (3)$$

$$M(\hat{\Theta}_U - M\hat{\Theta}_U)^{2k} \leqslant M(\hat{\Theta}_0 - M\hat{\Theta}_0)^{2k} \qquad (4)$$

Далее рассматриваются начальные вероятности извлечения единиц из совокупности: $\{p_j\}$ ($j=1,2,\ldots,N$), $p_j>0$, $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$. Схема отбора единиц в частных выборках зависит от уже взятых единиц в прежней выборке и не зависит от порядка, по которому следовали эти единицы. Пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — значения единиц, расположенных в порядке отбора, и

$$x_{s_{i1}} = \frac{y_1}{p_1}, x_{s_{i2}} = y_1 + \frac{y_2}{p_2}(1-p_1), \ldots, x_{s_i n} = y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{p_n}(1-p_1-\ldots-p_{n-1}).$$

Тогда имеет место

Теорема 2. Неупорядочивание упорядоченной оценки $\hat{\Theta}_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{s_i j}$ $\left(\sum_{j=1}^{n} c_j = 1\right)$ порождает неупорядоченную оценку, которая не зависит от c_j и равна $\frac{\sum_{l=1}^{n} y_l P(s|l)}{P(s)}$, где $P(s|l)$ — условная вероятность получить неупорядоченную выборку (s), если l-я единица была извлечена в начальной выборке, а $P(s)$ — безусловная вероятность получить (s). Далее показывается применение полученных результатов к простой безповторной случайной выборке и к безповторной выборке объемом в две единицы с изменяющимися вероятностями. В конце статьи разбирается числовой пример.

М. К. Камалов

1776. Сравнительная анатомия преобразований. Тьюки (On the comparative anatomy of transformations. Tukey John W.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 602—632 (англ.)

Указывается, что в статистике часто используются простые семейства преобразований. С накоплением употребляемых преобразований возникла необходимость их более систематического изучения и номографирования. Изучается качественная структура некоторых общих преобразований, а также простейшего семейства преобразований. вида $z=(y+c)^p$. Так как на практике преобразования с $p \leqslant 1$ используются много чаще, чем при других значениях p, то этому случаю в работе уделено большое внимание.

Работа относится к области промежуточной между номографией и теорией обработки наблюдений.

Б. Ш. Флейшман

1777. Описание построения и теста множества случайных нормальных уклонений. Литл (A description of the generation and testing of a set of random normal deviates. Lytle Ernest J., Jr), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 234—248 (англ.)

Если воспользоваться преобразованием

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

извлечь выборку значений Y из таблицы случайных чисел, то множество соответствующих значений x будет выборкой из нормальной совокупности.

В качестве таблицы чисел Y использована таблица Derived Number Table of One Million Digits, Rand Corporation, Santa Monica, California, а соответствующие им значения x из таблицы Rand's, 5D Gaussian Error Function Table (той же корпорации).

При помощи их получена таблица нормальных уклонений, содержащая 100 страниц с 10 колонками на странице. Колонка содержит 25 чисел. На каждой странице внизу даны значения Σx, Σx^2 и ранга для каждой колонки. Кроме того, вычислены Σxy и коэффициенты корреляции между x и y, где x ость элемент колонки с нечетным номером а y — соответствующий элемент в следующей колонке с чнтным номером.

Произведены тесты нормальности и случайности. Для тестов используются средние значения, суммы квадратов, ранги, экстримальные значения.

Введение тестов, если считать цитированные таблицы верными, вызвано тем, что при использовании таблиц с необходимостью применялась аппроксимация (в том числе и интерполяция). Тесты показывают, что построенные таблицы в основном могут быть признаны удовлетворительными. Б. В. Финкельштейн

1778. **Об отношениях между подразмахами. Тамура** (On the ratios between subranges. Tamura Ryoji), Симанэ дайгаку ронсю (сидзэн кагаку), Bull. Shimane Univ. (Natur. Sci.), 1957, № 7, 8—13 (англ.)

Рассматривается упорядоченная выборка $X_1 < X_2 < \ldots < X_n$ из совокупности, в которой случайная переменная X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{для } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{для } x < 0, \end{cases}$$

и дается функция распределения статистики

$$R = \frac{X_n - X_m}{X_n - X_l} \quad (n > m > i),$$

причем случаи $i=1, 2, 3$, $m=n-1$, $n-2$ считается полезным для практического применения.

Показано, что между функциями распределений $F_i^{(n)}(r)$ и $F_i'^{(n)}(r)$ величин $R_i = \dfrac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X}$ и $R_i' = \dfrac{X_n - X_{n-2}}{X_n - X_i}$ ($i=1, 2, 3$) соответственно существует рекуррентная зависимость

$F_i^{(n-1)}(r) = F_{i+1}^{(n)}(r)$ и $F'_i{}^{(n-1)}(r) = F'_i{}^{(n)}_{+1}(r)$.

При n достаточно большом для $i=1$ приводятся точные и асимптотические распределения величин R_1 и R'_1, а также предельные распределения величин $T_i = R_i \lg n (i = 1,2)$.

В конце статьи помещены две таблицы для функции распределений $P(R_1 \geqslant r) = \alpha$ и $P(R_2 \geqslant r) = \alpha$, которые дают различные значения r в зависимости от различных значений α и $n=3, 4, \ldots, 15$. М. К. Камалов

1779. **Сходимость некоторых функций, определенных на выборочных пространствах. Уэйсс** (The convergence of certain functions of sample spacings. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 778—782 (англ.)

Рассматривается непрерывная монотонно неубывающая положительная функция $g(u_1, \ldots, u_k)$ положительных аргументов такая, что для любого данного числа $K (0 < K < \infty)$ найдется число $R(K)$ $(0 < R(K) < \infty)$ такое, что $g(u_1, \ldots, u_k) < K$, если $u_1 + \ldots + u_k < R(K)$.

Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — случайные величины с совместной плотностью вероятности $\exp\{-(u_1 + \ldots + u_k)\}$. Вводятся следующие обозначения: $U(t) = P\{g(U_1, \ldots, U_k) \leqslant t\}$ — функция распределения, $\rho(v)$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$ — ограниченная неотрицательная функция с конечным числом разрывов.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые, одинаково распределенные величины с функцией распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, где плотность $f(x)$ — ограниченная функция с конечным числом разрывов.

Через $Y_1, \ldots, Y_n$ обозначаются упорядоченные значения $X_1, \ldots, X_n$, причем $T_i = Y_{i+1} - Y_i (i = 1, \ldots, n-1)$ и $R_n(t)$ означает частоту величин

$$\rho\left(\frac{1}{n}\right) g(T_1, \ldots, T_k), \rho\left(\frac{2}{n}\right) g(T_2, \ldots, T_{k+1}), \ldots, \rho\left(\frac{n-k}{n}\right) \times$$

$\times g(T_{n-k}, \ldots, T_{n-1})$, не превосходящих t/n^r.

Обозначим

$$\overline{U}\left[(tf^r(x)/\rho(F(x))\right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) = 0, \\ U[tf^r(x)/\rho(F(x))], & \text{если } f(x) > 0 \text{ и } \rho(F(x)) > 0, \\ 1, & \text{если } \rho(F(x)) = 0, \end{cases}$$

при любых значениях t, причем

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{U}\left[tf^r(x)/\rho(F(x))\right] f(x)\,dx$$

и

$$V(n) = \sup_{t \geqslant 0} |R_n(t) - S(t)|.$$

Доказывается, что с ростом n $V(n)$ с вероятностью, равной единице, сходится к нулю. Б. Ш. Флейшман

1780. **О дисперсии оценки для дисперсии. Тионе** (Sur la variance de l'estimation d'une variance. Thionet Pierre), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 25, 2168—2170 (франц.)

Рассматривается генеральная совокупность, состоящая из N элементов, и случайная бесповторная выборка объема n из нее. Вычисляется дисперсия одной оценки для дисперсии выборочного среднего. Новых результатов статья не содержит. В. В. Петров

1781. **Обобщение выборочной дисперсии на случай извлечения из урны. Тионе** (Une généralisation de la variance d'échantillonnage dans le cas tirages exhaustifs d'une urne. Thionet Pierre), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 26, 2464—2467 (франц.)

Для случая бесповторных выборок из конечной генеральной совокупности предлагаются меры потери информации от незнания всей совокупности, выражающиеся через моменты выборочных характеристик. В. В. Петров

1782. **Середина размаха выборки как оценка середины размаха генеральной совокупности. Райдер** (The midrange of a sample as an estimator of the population midrange. Rider Paul R.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 280, 537—542 (англ.)

Изучается распределение середины размахов выборок из пяти различных симметрических совокупностей ограниченного размаха, а также относительная эффективность середины размаха и среднего значения при оценке середины размаха, среднего значения и медианы генеральной совокупности (для симметрического распределения эти величины, конечно, тождественны.) Для рассматриваемых совокупностей находится, что срединное значение размаха более эффективно, чем среднее и что эта эффективность возрастает с убыванием $\alpha_4 (= \mu_4/\sigma^4)$ нормированного четвертого момента. Значения α_4 для пяти изучаемых совокупностей следующие 2,19; 2,14; 1,8; 1, 19 и 1. Резюме автора

1783. **Распределения отношений некоторых квадратичных форм. Гейссер** (The distribution of the ratios of certain quadratic forms in time series. Geisser Seymour), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 724—736 (англ.)

Перечисляется ряд известных ранее результатов и даются их некоторые обобщения. В. П. Скитович

1784. **Зависимость фидуциального аргумента от выборочного правила. Анскомб** (Dependence of the fiducial argument on the sampling rule. Anscombe F. J.), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 464—469 (англ.)

Разбираются два примера, показывающие зависимость фидуциального аргумента в смысле Фишера (реф. 1771) от выборочного правила. Р. Х. Дивеев

1785. **Применение многомерных поликеев к теории несмещенных оценок по отношению. Робсон** (Applications of multivariate polykays to the theory of unbiased ratio-type estimation. Robson D. S.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 280, 511—522 (англ.)

Многомерные поликеи получаются при незначительном обобщении результатов Тьюки (Ann. Math. Statistics 1956, 27, 37—54) для одномерных поликеев.

Указывается связь между системой многомерных поликеев и системой многомерных симметрических средних; выводятся формулы умножения.

В качестве дальнейшей иллюстрации полезности многомерных поликеев дается применение этих результатов к построению несмещенных оценок по отношению и оценок дисперсий для конечных совокупностей.

Резюме автора

1786. Несмещенные оценки с минимальной вариацией в классе дискретных распределений. Рой, Митра (Unbiassed minimum variance estimation in a class of discrete distributions. Roy Jogabrata, Mitra Sujit Kumar), Санкия, Indian J. Statist., 1957, **18**, № 3-4, 371—378 (англ.)

Рассматривается распределение случайной переменной X

$$P\{X=x\}=\frac{a(x)\,\theta^x}{f(\theta)},$$

где $x=0,\ 1,\ 2,\ldots$; $\theta>0$ — неизвестный параметр, $a(x)>0$ не зависит от θ и $f(\theta)=\sum_{x=0}^{\infty}a(x)\,\theta^x$. Это распределение включает в себя как частный случай пуассоновское, отрицательное биномиальное и логарифмическое распределения. Для параметра θ этого распределения выводятся несмещенные оценки с равномерно минимальной дисперсией и дисперсии этих оценок. Аналогичные оценки для θ усеченного распределения получаются из оценок полного распределения при помощи разностной операции. В качестве иллюстрации рассматриваются усеченное пауссоновское и отрицательное биномиальное распределения. Р. Х. Дивеев

1787. О комбинировании междублочной и внутриблочной оценок. Фрейзер (On the combining of interblock and intrablock estimates. Fraser D. A. S.), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 3, 814—816 (англ.)

В работе показано, что комбинирование междублочной и внутриблочной оценок, основанное на методе максимума правдоподобия, более эффективно, чем использование весовых функций, так как в последнем случае не учитываются смешанные моменты второго порядка. Обычно веса выбираются обратно пропорциональными дисперсиям. Б. Ш. Флейшман

1788. Таблицы для оценки функций нормального распределения посредством нормит-анализа. Часть I. Описание и применение таблиц. Часть II. Сравнение между оценкой минимума нормит-χ^2 и оценкой максимального правдоподобия. Берксон (Tables for use in estimating the normal distribution function by normit analysis. Part I. Description and use of tables. Part II. Comparison between minimum normit χ^2 estimate and the maximum likelihood estimate. Berkson Joseph), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 411—435 (англ.)

Для функции нормального распределения

$$P(x)=1-Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{N(x)}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du,$$

величина $N(x)=\frac{x_i-\mu}{\sigma}=\alpha+\beta x,$ называемая нормитом величины вероятности $P(x)$, часто используется для вычисления вероятности $P(x)$ того, что на данную дозу агента x отреагирует каждый испытываемый индивидуум; а плотность

$$Z(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

рассматривается как мера гипотетического сопротивления индивидуумов действию агента. В биологических исследованиях часто интересуются значением дозы x агента, соответствующим 50%-ному ответу на дозу. Это значение теоретически равно $-\frac{\alpha}{\beta}$. По результатам наблюдений определяют число r_x индивидуумов, давших ответ, среди n_x индивидуумов, подвергавшихся действию агента с дозой x. Основываясь на этих данных, требуется оценить параметры α и β. Оценки этих параметров автор получает методом нормит-анализа, по которому они получаются из условия обращения в минимум суммы

$$\chi^2(\text{нормит})=\sum_x n_x w_x(N(x))-\hat{N}(x))^2, \qquad (1)$$

где $\hat{N}(x)=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x$ — оценка $N(x)=\alpha+\beta x$, $w_x=\frac{Z^2(x)}{p_x q_x}$, $\frac{r_x}{n_x}=p_x$ — оценка для $P(x)$ $(q_x=1-p_x)$. Сумма (1) имеет асимптотическое распределение χ^2, и поэтому автор ее называет нормит-χ^2, а оценкой нормит-анализа он называет оценку минимума нормит-χ^2. Применяя к равенству (1) способ наименьших квадратов, автор получает формулы:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_x n_x w_x N(x)x-\sum_x n_x w_x N(x)\sum_x n_x w_x x/\sum_x n_x w_x}{\sum_x n_x w_x x^2-\left(\sum_x n_x w_x x\right)^2/\sum_x n_x w_x},$$

$$\hat{\alpha}=\bar{N}-\hat{\beta}\,\bar{x},\quad \bar{N}=\sum n_x w_x N(x)/\sum_x n_x w_x,$$

$$\bar{x}=\sum_x n_x w_x x/\sum_x n_x w_x.$$

Кроме того, приводятся формулы для оценок дисперсии величин $\bar{x}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ и $\hat{\alpha}/\hat{\beta}$. Вычисления всех этих оценок непосредственно связаны с w_x и $w_x N(x)$. В статье даются две таблицы, первая из которых дает значение w_x и $w_x N(x)$ в зависимости от значений n и r для $n=2,\ 3,\ldots,\ 50$ и для $r=0,\ 1,\ 2,\ldots,25$., Вторая таблица дает те же значения w_x и $w_x N(x)$, но в зависимости от $p_x=\frac{r_x}{n_x}$ для $p<0{,}50$ при $w_x N(x)<0$ и для $p>0{,}50$ при $w_x N(x)>0$.

Во второй части работы автор экспериментальным путем показывает, что для малых выборок средняя квадратическая ошибка оценки минимума нормит-χ^2 меньше, чем средняя квадратическая ошибка оценки максимального правдоподобия. В начале этой части со всей подробностью описаны проведенные опытные исследования, результаты вычисления и сравнения их.

М. К. Камалов

1789. Почти несмещенная оценка функций частот. Холдейн (Almost unbiassed estimates of functions of frequencies. Haldane J. B. S.), Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 3, 201—208 (англ.)

Если выборка в n элементов содержит a элементов с признаком A, то a/n есть удовлетворительная оценка вероятности p того, что следующий случайно выбранный элемент будет с признаком A. Несмещенной оценкой величины p^m $(m<n)$ служит $\frac{a!\,(n-m)!}{n!\,(a-m)!}$. Ставится проблема: найти такую функцию $f(a,\ m)$, чтобы

$\left[\frac{f(a,m)}{f(n,m)}\right]^m$ было приближенно несмещенной оценкой p^m в случае, когда m не есть целое положительное.

Автор берет $f(a,\ m)=\left[\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m+1)}\right]^{\frac{1}{m}}$ и исследует математическое ожидание этой величины при различных значениях m (нулевом, целом, отрицательном); в частности, если a следует биномиальному распределению, то $E\,[f^m(a,m)]-p^m f^m(n,m)$ стремится к 0 быстрее, чем любая отрицательная степень n; поэтому $\left[\frac{f(a,m)}{f(n,m)}\right]^m$ есть почти несмещенная оценка p^m.

Доказывается, что $E\,[\ln f(a,0)]-\ln f(n,0)-\ln p$ стремится к 0, как $\frac{1}{n^4}$ или быстрее; однако строго доказать, что эта величина стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени n, не удается.

В качестве любопытного факта автор указывает, что k^a есть несмещенная оценка величины $(q+kp)^n$.

Г. П. Боев

1790. Анализ регрессии с применением метода инвариантности. Фрейзер (A regression analysis using the invariance method. Fraser D. A. S.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 517—520 (англ.)

Пусть $p(y)=1$ для $|y|\leqslant\frac{1}{2}$ и $p(y)=0$ для $|y|>\frac{1}{2}$,

Центр тяжести $(f,\ g)$ множества точек $(a,\ b)$ таких, что $p(y_i-a-b\,x_i)=1,\ i=1,\ldots,\ n$, является наилучшей инвариантной оценкой параметров $(\alpha,\ \beta)$ в соотношении регрессии $Y_i=\alpha+\beta_{x_i}+U_i$, где U_i — независимые случайные величины с плотностью вероятности $p(y)$. Предполагается: $\sum x_i=0$, группа преобразований $y_i'=y_i+a+b\,x_i$, функция потери

$$W(f,g;\ \alpha,\beta)=p_1(f-\alpha)^2+p_2(g-\beta)^2,\ p_1,\ p_2\geqslant 0.$$

Метод можно применить и в случае более сложных соотношений регрессии и других законов распределения погрешностей U_i. J. Hájek

1791. Более короткие интервалы для параметра биномиального распределения и распределения Пуассона. Стивенс (Shorter intervals for the parameter of the binomial and Poisson distributions. Stevens M. L.), Biometrika, 1957, 44, № 3-4, 436—440 (англ.)

В работах Стерна (РЖМат, 1956, 7498) и Кроу (РЖМат, 1958, 6988) были построены доверительные интервалы для неизвестного параметра биномиального распределения, которые являются более короткими, чем ранее найденные. Иногда, однако, требуется дополнительно найти вероятности каждого из следующих двух событий в отдельности: 1) значение параметра меньше левой границы доверительного интервала, 2) значение параметра больше правой границы. Указывается способ решения этой задачи при помощи интерполяции в существующих таблицах. В. В. Петров

1792. Оценивание по методу максимального правдоподобия в случае мультиномиального распределения. Рао (Maximum likelihood estimation for the multinomial distribution. Rao C. Radhakrishna), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 18, № 1-2, 139—148 (англ.)

Пусть имеется k зон, которым соответствуют вероятности попадания $\pi_1(\theta),\ldots,\pi_k(\theta)$ и наблюденные относительные частоты $p_1,\ldots,p_k$. Оценка максимального правдоподобия для мультиномиального распределения определяется как такое значение $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_k)$, для которого функция правдоподобия достигает максимума. Доказаны следующие результаты. 1) Оценка максимального правдоподобия для мультиномиального распределения при отсутствии каких бы то ни было условий регулярности является состоятельной. 2) Оценка максимального правдоподобия для θ является состоятельной при условии, что

$$I(\theta_0,\theta)=-\sum\pi_i(\theta_0)\log\frac{\pi_i(\theta)}{\pi_i(\theta_0)}\geqslant c>0,$$

если $|\theta-\theta_0|>\delta$ для каждого $\delta>0$, где θ_0 — истинное значение параметра θ. 3) При некоторых дополнительных условиях, налагаемых на $\pi_i(\theta)\ (i=1,\ldots,k)$ доказаны существование, единственность и состоятельность корня $\hat\theta$ уравнения правдоподобия и тождественность $\hat\theta$ с оценкой максимального правдоподобия с вероятностью, стремящейся к единице при неограниченном увеличении объема выборки. В. В. Петров

1793. Нижняя граница для вероятности отношения Стьюдента. Банерджи (A lower bound to the probability of Student's ratio. Banerjee Saibal Kumar), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 18, № 3-4, 391—394 (англ.)

Пусть имеется выборка объема n из ненормальной генеральной совокупности с неизвестным средним m и известным коэффициентом эксцесса γ_2. Получена нижняя граница для вероятности

$$P\left\{\bar x-\frac{ts}{\sqrt n}\leqslant m\leqslant\bar x+\frac{ts}{\sqrt n}\right\},$$

где $\bar x$ — выборочное среднее, s — выборочное стандартное отклонение. Указанная нижняя граница зависит только от n, t и γ_2. Случай $t=3$ иллюстрируется таблицей. В. В. Петров

1794. Некоторые задачи минимаксной оценки. Трыбула (Some problems of simultaneous minimax estimation. Trybula Stanislaw), Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 1, 245—253 (англ.)

Оценкой, обладающей свойством минимакса, функции $w(F)$ от неизвестной функции распределения $F\in\mathfrak{F}$ случайной величины X называется статистика $f_0(X)$, для которой $v(f)=\sup_{F\in\mathfrak{F}}E\{L\,[w(F),f(X)]/F\}$ минимально, где $L\,[w(F),f(x)]\geqslant 0$ — известная функция. В данной статье в качестве $L\,[w(F),f(x)]$ берется взвешенная линейная комбинация квадратов разностей действительных и оценочных значений параметров. Получены минимаксные оценки параметров многомерного гипергеометрического распределения, а также математических ожиданий m измеримых ограниченных функций $g_1(x),\ g_2(x),\ldots,g_m(x)$, имеющих минимум в точке x', а максимум — в точке x'' ($x',\ x''$ принадлежат множеству значений x). С. С. Кислицын

1795. Таблицы для критических областей типа А. Уэйнгартен (Tables for type A critical regions. Weingarten Harry), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 4, 1052—1053 (англ.)

Приводятся таблицы, связанные с тестом гипотез, распространяющие таблицы, данные в работе Джонсона (Johnson N. I., Ann. Math. Statistics, 1940, 11, 227).

Эти таблицы дают значения A, являющиеся решением уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{A-Bu^2}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2\right)du\,dv=\alpha,$$

где α и B — данные числа. Б. В. Финкельштейн

1796. Идемпотентные матрицы и квадратичные формы в общих линейных гипотезах. Грейбилл, Ма

салья (Idempotent matrices and quadratic forms in the general linear hypothesis. Graybill Franklin A., Marsaglia George), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 678—686 (англ.)

Общая теория линейных гипотез касается проверки статистических гипотез относительно компонент n-мерного вектора β, входящего в n-мерное нормальное распределение, задаваемое первыми моментами $X\beta$ и смешанными моментами второго порядка $\sigma^2 I_n$, где X — известная матрица, I_n — единичная матрица, а β и σ^2 неизвестны. Проверка гипотез осуществляется по вектору „наблюдений" Y, имеющему указанное распределение. Критерий основывается на рассмотрении квадратичной формы $Y'Y$, относительно которой доказывается теорема: Если Y имеет n-мерное нормальное распределение, задаваемое первыми моментами μ и смешанными моментами второго порядка I_n, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы $Y'AY$ имело нецентральное распределение хи-квадрат $\chi^2(k,\lambda)$ с k степенями свободы и параметром смещения $\lambda = \frac{1}{2}\mu' A\mu$, является идемпотентность матрицы A ($A^2 = A$) ранга k.

Теорема используется для обобщения теоремы Кохрана на случай сумм квадратов случайных величин, имеющих нецентральное распределение хи-квадрат.

Б. Ш. Флейшман

1797. Эффективность критерия Брауна-Муда, относящегося к регрессии. Де Мюнтер (Efficacités du test de Brown-Mood relatif à la régression. De Munter Paul), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 11, 838—846 (франц.)

Пусть t_i ($i = 1,2,...,cm$; c,m — целые) — значения неслучайного параметра t, $\bar{t} = \frac{1}{cm}\sum_i t_i$. Каждому значению t_i соответствует n независимых случайных переменных x_{ij} ($j = 1,2,...,n$) с непрерывной функцией распределения $G_i(x)$, $\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_j x_{ij}$ и $\bar{x} = \frac{1}{cmn}\sum_{ij} x_{ij}$.

Статистика

$$F = \frac{\frac{n}{cm}\sum_i (\bar{x}_i - \mu_{i0})^2}{\frac{1}{cm(n-1)}\sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x})^2}$$

имеет распределение Фишера, если $G_i(x)$ нормальна (μ_{i0},σ), и нецентральное распределение Фишера с параметром нецентральности $\lambda = \frac{n}{\sigma^2}\sum_i (\mu_i - \mu_{i0})^2$, если $G_i(x)$ нормальна $(\mu_i\,\sigma)$ и $\mu_i \neq \mu_{i0}$. Таким образом мощность критерия, построенного на статистике F для отличия гипотезы $H_0(\mu_{i0},\sigma)$, от гипотезы $H(\mu_i,\sigma)$, легко определяется. С помощью критерия F можно, в частности, проверить гипотезу H_0 о линейной зависимости $\mu_{i0} = \alpha_0 + \beta_0(t_0 - \bar{t})$ с фиксированными α_0 и β_0.

Для произвольных непрерывных функций распределения $G_i(x)$, имеющих медианы $\nu_{i0} = \alpha_0 + \beta_0(t_i - \bar{t})$ (гипотеза H_0) или медианы $\nu_i = \alpha + \beta(t_i - \bar{t})$ (гипотеза H), отличие гипотезы H_0 от гипотезы H проверяется на основе аналогичного критерия Брауна-Муда, который использует статистику

$$k = \sum_r \frac{\left(u_r - \frac{mn}{2}\right)^2}{\frac{mn}{2}}.$$

Для получения значений u_r поступают следующим образом: значения t_i располагают в возрастающем порядке t_i^* и разбиваются на c интервалов квантилями $\tau_s = \frac{t^*_{ms-1} + t^*_{ms}}{2}$ ($s = 1,2,..., c-1$), после чего подсчитывается число x_{ij}, попавших внутрь r-го интервала и значения которых менее $\nu_{i0} = \alpha_0 + \beta_0(t_i - \bar{t})$ для значения t_i.

Статистика k распределена асимптотически по закону χ^2 с c степенями свободы (верна H_0) и распределена по закону нецентрального χ^2 (верна H) с параметром нецентральности $\lambda = \sum_r a^2_r$, где $a_r = E\left[\frac{u_r - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{mn}{2}}}\right]$.

В заключение дается сравнение эффективности критериев Фишера и Брауна-Муда $\left(\frac{n_{(F)}}{n_{(K)}}\right)$, когда $G_i(x)$ нормальна и конкурирующие гипотезы суть:

H_1: $\mu_i = \alpha + \beta_0(t_i - \bar{t})$;

H_2: $\mu_i = \alpha_0 + \beta(t_i - \bar{t})$;

H_3: $\mu_i = \alpha_0 + \beta_0(t_i - \bar{t})^2 + \gamma(t_i - \bar{t})^2$.

В работе имеются опечатки. П. А. Строганов

1798. О критериях смещений. I. Общие типы критерия смещения и критерий смещения для нормального распределения. Дорнбос, Принс (On slippage tests. I. A general type of slippage test and a slippage test for normal variates. Doornbos R., Prins H. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 1, 38—46; Indagationes math., 1958, **20**,, № 1, 38—46 (англ.)

Дается общий критерий для принятия решения о том, будет ли случайная величина (или группа случайных величин) смещенной от некоторой точки. Он сводится к следующему: Пусть $F(\boldsymbol{y}_1,..., \boldsymbol{y}_k|\theta)$ — функция распределения случайных векторов, зависящая от неизвестных параметров $\theta_1,...,\theta_k$ ($\theta = (\theta_1,...,\theta_k)$); при этом компоненты y_{ij} ($j = 1,...,n_i$) — одинаково распределенные величины с функцией распределения, зависящей от θ_i. Проверяется гипотеза H_0: $\theta_1 = ... = \theta_k$ против k альтернатив H_i: θ_i смещено вправо ($i = 1,2,...,k$) или же против k альтернатив H_i: θ_i смещено влево. Для того чтобы избавиться от неизвестных параметров θ_i, используются новые одномерные случайные величины $X_1,...,X_k$, являющиеся функциями от первоначальных величин и при гипотезе H_0 имеющие совместную функцию распределения $F(x_1,...,x_k)$. Пусть $x_1,...x_k$ будут наблюденные значения $X_1,...,X_k$ соответственно. Тогда тест на смещение вправо определяется следующим образом: Пусть $d_j = P(X_j \geqslant x_j)$ ($j = 1,...,k$). Если $d_m = \min_j d_j \leqslant \alpha/k$ (α — назначенный уровень значимости), то гипотеза H_0 отвергается и принимается, что вектор $\boldsymbol{y}_m$ имеет смещение вправо. Если же $e_j = P(X_j \leqslant x_j)$ и $e_m = \min_j e_j \leqslant \alpha/k$, то отвергается H_0 и принимается, что вектор $\boldsymbol{y}_m$ имеет смещение влево.

Далее вычисляются ошибки первого рода и доверительные границы для H_0. Кроме того, подробно рассматривается критерий смещения первых k нормальных совокупностей с различными неизвестными средними значениями и с общей неизвестной дисперсией.

М. К. Камалов

1799. О критериях смещения. II. Критерии смещения для дискретных величин. Дорнбос, Принс (On slippage tests. II. Slippage tests for discrete variates. Doornbos R., Prins H.), Proc. koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 1, 47—55; Indagationes math., 1958, 20, № 1, 47—55 (англ.)

Ч. I см. реф. 1798.

Доказывается следующая теорема: Если $X_1,\ldots,X_k$ — независимые случайные величины с целочисленными значениями и

$$\frac{P\left\{\sum X_l - X_i - X_j = a\right\}}{P\left\{\sum X_l - X_i - X_j = a+1\right\}},$$

где a — целое, есть неубывающая функция a, то

$$P\left\{X_l \geqslant x_l \text{ и } X \geqslant x_j \,\middle|\, \sum X_l = N\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{X_l \geqslant x_i \,\middle|\, \sum X_l = N\right\} \cdot P\left\{X_j \geqslant x_j \,\middle|\, \sum X_l = N\right\}$$

для каждой пары целых чисел x_i, x_j и каждого целого $N \geqslant 0$. Условиям этой теоремы удовлетворяют, в частности, случайные величины, распределенные по закону Пуассона, биномиальному или отрицательно-биномиальному закону. В случае, когда X_l имеет распределение Пауссона со средним μ_l $(i = 1,\ldots,k)$, при помощи доказанной теоремы строится критерий для проверки гипотезы H_0:

$$\frac{\mu_i}{\sum_j \mu_j} = p_i \qquad (i = 1,\ldots,k),$$

где p_i заданы, при альтернативной гипотезе

$$H_{1i}: \frac{\mu_i}{\sum_j \mu_j} = cp_i, \quad \frac{\mu_l}{\sum_j \mu_j} =$$

$$= \frac{1-cp_i}{1-p_i}\, p_l \,(l \neq i),\ 1 < c < \frac{1}{p_i}$$

(c не известно) для одного неизвестного значения i или гипотезе H_{2i}, отличающейся от H_{1i} только тем, что $0 < c < 1$ (c неизвестно).

Для проверки H_0 при альтернативе H_{1i} по выборке $x_1,\ldots, x_k \left(\sum x_l = N\right)$ вычисляются $r_i = \sum_{m=x_i}^{N} C_N^m p_i^m \times$ $\times (1-p_i)^{N-m}$; H_0 отвергается, если $\min_i r_i \leqslant \frac{a}{k}$. При $p_1 = \ldots = p_k$ этот критерий является в известном смысле оптимальным.

В случае, когда X_l имеет биномиальное распределение с числом испытаний n_i и вероятностью успеха p_i, построен критерий для проверки гипотезы $H_0: p_1 = \ldots = p_k$ при альтернативной гипотезе $H_{1i}: p_1 = \ldots = p_{i-1} = p_{i+1} = \ldots = p_k = p$, $p_i = cp \left(1 \leqslant c \leqslant \frac{1}{p}\right)$ для одного неизвестного значения i или $H_{2i}: p_1 = \ldots = p_{i-1} = p_{i+1} = \ldots = p_k = p$, $p_i = cp$ $(0 \leqslant c < 1)$ для одного неизвестного значения i.

В. В. Петров

1800. Критерий χ^2 и критерии согласия. Тьягу-ди-Оливейра (O ensaio χ^2 e os ensaios de concordância. Tiago de Oliveira J.), Gaz. mat., 1957, 18, № 68—69, 6—9 (порт.)

1801. Когда различные пары гипотез имеют одно и то же семейство областей для критерия по отношению правдоподобия. Савидж (When different pairs of hypotheses have the same family of likelihood-ratio test regions. Savage Leonard J.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 4, 1028—1032 (англ.)

Если $l(x)$ и $l'(x)$ — логарифмы отношений правдоподобия, причем критическая область, определяемая неравенством $\sum_{i=1}^{n} l(x_i) \leqslant A$, совпадает с областью $\sum_{i=1}^{n} l'(x_i) \leqslant$ $\leqslant A'$ при некоторых A и A' и некотором $n \geqslant 3$, то $l'(x) = \alpha\, l(x) + \beta$, где α и β — постоянные $(\alpha > 0)$, и $A' = \alpha A + n\beta$. Указывается, что если однопараметрическое семейство распределений $P(x, \Theta)$ порождает трехпараметрическое семейство последовательных критериев по отношению правдоподобия, то

$$dP(x, \Theta) = \exp\{r(\Theta)\, A(x) + s(\Theta)\, B(x)\}\, dw(x).$$

В. В. Петров

1802. Об эффективности метода Вальда выравнивания прямыми линиями. Тейл, Изерен (On the efficiency of Wald's method of fitting straight lines. Theil H., Yzeren J. van), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1—3, 17—26 (англ.; рез. франц.)

Имеется n наблюдений (x_i, y_i) над линейно связанными парами случайных величин x и y: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, причем случайные переменные u_i имеют математические ожидания, равные нулю. Задача заключается в оценке параметра β. Для решения этой задачи Вальд предложил упорядочить наблюденные данные по порядку возрастания и разбить их на две равные группы с центрами тяжести $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$. Полученная таким образом оценка β будет $\frac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}$. Недостатком этого метода является потеря эффективности оценки. Автор, сохраняя простоту метода Вальда, решает ту же задачу с наименьшей потерей эффективности. Оказывается, что решение этой задачи зависит от вида распределения x. Приводится решение при произвольном распределении с плотностью $f(x)$, а затем для равномерного, симметрического, треугольного, нормального и бета-распределений. Для бета-распределений все наблюдения после упорядочивания делятся на три группы, отбрасывается средняя группа и к двум крайним группам применяется метод оценки Вальда. При этом деление на три группы производится так, чтобы средняя группа содержала 40 % всех наблюдений, а две крайние группы по 30%.

В конце статьи автор разбирает пример для иллюстрации последней процедуры, в котором он обнаруживает 30% потери эффективности оценки, в то время как метод Вальда дает 50% потери.

М. К. Камалов

1803. Неоднородность дисперсии ошибок в плане случайного блока. Грейбилл, Фолкс (Heterogeneity of error variances in a randomized block design Graybill Franklin A., Folks John Leroy), Biometrika, 1957, **44**, № 1-2, 275—277 (англ.)

Строится критерий для проверки гипотезы о равенстве средних значений для случая, когда наблюденные величины располагаются в r блоков по p величин в каждом, и в каждом блоке n_1 величин имеют дисперсию σ_1^2, n_2 имеют дисперсию σ_2^2, ... и n_g — дисперсию σ_g^2 ($\sum_{i=1}^{g} n_i = p$).

Предлагаемый критерий проще критерия, ранее предложенного Грейбиллом для того же случая. (Biometrics, 1954, **10**, №4, 516—520)

Б. Н. Гартштейн

1804. Практическое вычисление степеней свободы в анализе дисперсии. Матерн (A routine for computing the degrees of freedom in analysis of variance. Matérn Bertil), Biometrics, 1957, **13**, № 4, 541—543 (англ.)

Описывается простой способ вычисления степеней свободы параллельно с суммами квадратов в анализе дисперсий, известный многим статистикам. Этот способ проиллюстрирован на одном примере факториального опыта 3×2 в двух блоках.

М. К. Камалов

1805. Современное развитие анализа дисперсии. Хартли (Some recent developments in analysis of variance. Hartley H. O.), Communs pure and Appl. Math., 1955, **8**, № 1, 47—72 (англ.)

Автор рассматривает вопросы множественного решения и сравнения, а также сокращенные процедуры статистического вывода, основанные на подстановочной мере дисперсии.

Описывается последовательный F-тест значимости оценок дисперсий для множественного решения, ошибки первого рода при этой процедуре, мощность последовательного теста и последовательный интервальный тест для сравнения средних по факторам. Дается приближение к распределению „наиболее значимого" F-отношения.

Кратко приводятся различные подходы для оценки последовательных средних доверительными интервалами (процедура Дункана, одновременные доверительные интервалы Тьюки и Шеффе).

Автор отмечает, что с целью облегчения вычислительного труда и контроля над средними квадратами в анализе дисперсии применяется сокращенная мера — выборочный размах. Изучается эффективность замены выборочной дисперсии размахом для малых выборок. Исследуя коэффициент корреляции между оценкой дисперсии s^2 и заменяющими ее мерами (среднее абсолютное отклонение $\frac{1}{n}\sum_i |x_i - \bar{x}|$, размах $x_{\max} - x_{\min}$, средняя разность Джини $g = 2\sum_{i<j} |x_j - x_i| / n(n-1)$ и среднее значение последовательных разностей

$$d = \frac{1}{n-1}\sum_i |x_{i+1} \quad),$$

автор заключает, что пользование размахом вместо выборочной дисперсии для малых выборок эффективнее по сравнению со всеми другими указанными мерами.

М. К. Камалов

1806. О характеризации некоторых проблем, связанных с линейными структурными зависимостями. Лаха (On some characterization problems connected with linear structural relations. Laha R. G.), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 2, 405—414 (англ.)

Рассматриваются соотношения вида

$$x_0 = a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2 + \ldots + a_{0p}\xi_p + \eta_0,$$

$$x_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1p}\xi_p + \eta_1,$$

. . . . . .

$$x_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{np}\xi_p + \eta_n,$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — некоторые случайные величины, $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_n$ — случайные величины, связанные линейной зависимостью, и $\{a_{ij}\}$ — набор констант. При различных предположениях изучаются свойства этих соотношений. Приводится обзор имеющихся ранее результатов и даются некоторые их обобщения.

В. П. Скитович

1807. Непараметрические эмпирические байесовские процедуры. Джонс (Non-parametric empirical Bayes procedures. Johns M. V., Jr), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 649—669 (англ.)

Для счетного множества чисел $\chi = \{x\}$ пусть $\mathfrak{F} = \{F(x|\omega);\ \omega \in \Omega\}$ является классом всех функций распределения на χ, где $\Omega = \{\omega\}$ — некоторое абстрактное множество.

Пусть μ — априорная вероятностная мера, определенная на σ-алгебре подмножеств Ω, и пусть Y — случайная величина, определенная на Ω. Рассматриваются независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_r$ с функцией распределения $F(x|\omega)$ при фиксированном $Y = \omega$. Для данной измеримой функции $h(x)$ определяется случайная величина $\Lambda = \Lambda(Y) = E(h(X)|Y)$, причем случайная величина X имеет то же распределение, что и X_j. Предполагается, что априорная вероятностная мера μ такова, что $E\,h^2(X) < \infty$.

Рассматривая вектор $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_r)$ как вектор „наблюдений", автор ставит задачу оценки значения λ случайной величины Λ. При этом функция потерь, связанная с оценкой $t = \varphi(\boldsymbol{x})$ значения λ, берется в виде $L(t, \lambda) = (t - \lambda)^2$; функция риска при использовании $\varphi(x)$ определяется, как обычно, в форме

$$R(\varphi) = E\,L(\varphi(\boldsymbol{X}), \Lambda) = E\,[\varphi(\boldsymbol{X}) - \Lambda]^2.$$

Байесовской оценкой $\varphi_\mu(\boldsymbol{x})$ называется оценка, минимизирующая функцию риска $R(\varphi)$. Она находится в форме $\varphi_\mu(\boldsymbol{x}) = E(\Lambda|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$ для $\boldsymbol{x} \in \chi^* = \{\boldsymbol{x};\ P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) > 0\}$.

Для получения байесовской оценки должна быть известна априорная вероятностная мера μ. Часто на практике она неизвестна. Тогда действуют следующим образом.

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины на Ω, имеющие то же распределение, что и Y. Далее, пусть даны векторы наблюдений $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ir+1})$ $(i = 1, \ldots, n)$, где X_{ij} — независимые одинаково распределенные при фиксированном i случайные величины с функцией распределения $F(x|\omega_i)$ при $Y_i = \omega_i$. Значения X_{ij} используются вместо априорных сведений о $\boldsymbol{X}$. При этом предполагается, что совместное распределение $\boldsymbol{X}_i^{(r)} = (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ir})$ и $E(h(X_{ir+1})|Y_i)$ то же, что и совместное распределение $\boldsymbol{X}$ и Λ для $\boldsymbol{x} \in \chi^*$.

Эмпирическая байесовская процедура оценки определяется следующим образом. Пусть $\boldsymbol{x}(q)$, $q = 1, 2, \ldots, m(\boldsymbol{x})$ — $m(\boldsymbol{x})$ различных векторов наблюдений, получающихся перестановкой компонент $x_1, \ldots, x_r$ в $\boldsymbol{x}$. Ясно, что для любого $\boldsymbol{x}$ имеем $1 \leqslant m(\boldsymbol{x}) \leqslant r!$.

Определяются случайные величины

$M_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\bar{M}_n(\boldsymbol{x})$

$$M_i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ если существует такое } q\ (1 \leqslant q \leqslant m(\boldsymbol{x})), \\ \qquad \text{что } \Lambda^r{}_i = \boldsymbol{x}(q), \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\bar{M}_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\boldsymbol{x}).$$

Эмпирическая байесовская оценка $\varphi_n(x)$ имеет вид:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{M_n(x)} \sum_{i=1}^{n} M_i(x)\, h(X_{ir+1}), & \text{при } M_n(x) > 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема: Если $E\,h^2(X) < \infty$, то $\lim_{n\to\infty} R(\varphi_n) = R(\varphi_\mu)$.

Этот результат является непараметрическим в том смысле, что неизвестная априорная вероятностная мера μ принадлежит классу $\mathfrak{F}$ всех функций распределения на множестве χ.

Ро́инс рассмотрел случай параметрического подмножества $\mathfrak{F}$. Далее в работе делается обобщение теоремы на случай континуального множества χ. Развиваются аналогичные методы выбора между двумя гипотезами при аналогичной ситуации. Б. Ш. Флейшман

1808. **Непараметрические оценки и реализация математических ожиданий. Рихтер** (Parameterfreie Abschätzung und Realisierung von Erwartungswerten. Richter Hans), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1957, 3, № 2, 147—162 (нем.)

Решается обобщенная проблема нахождения точной верхней грани для $(n+1)$-го момента всех распределений вероятностей на данном множестве A, если их моменты порядка $1, 2, \ldots, n$ фиксированы. Пусть A — борелевское множество на прямой, $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ — измеримые на A функции и $\mathfrak{F}_A$ — множество всех функций распределения, для которых $\int_A dF(x) = 1$. Принято говорить, что вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ реализуется в $F \in \mathfrak{F}_A$ (относительно функций $l_1(x), \ldots, l_n(x)$), если $\lambda_\nu = \int_A l_\nu(x)\, dF(x)$ для всех $\nu = 1, \ldots, n$; пусть $\mathfrak{L}$ — множество всех $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, которые реализуются в некоторой $F \in \mathfrak{F}_A$. Доказывается, что всякий вектор $\lambda \in \mathfrak{L}$ реализуется в некоторой простой функции из $\mathfrak{F}_A$ с не более чем $(n+1)$ скачком. Если A — интервал и если $l_\nu(x)$ непрерывны на A, то требуемое число скачков $\leqslant n$, и если, кроме того, $l_\nu(x)$ — полиномы не больше чем n-й степени, то требуемое число скачков $\leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Для измеримой функции $k(x)$ символ K означает множество всех векторов $(\lambda, \varkappa) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \varkappa)$, которые реализуются в некоторой $F \in \mathfrak{F}_A$ (относительно функций $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, $k(x)$), и для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{L}$ символ $\varphi(\lambda)$ означает точную верхнюю грань для $\int_A k(x)\, dF(x)$ при условии $\int_A l_\nu(x)\, dF(x) = \lambda_n (\nu = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. $\varphi(\lambda) = \sup_{(\lambda, \varkappa) \in K} \varkappa$. Наконец, пусть $h(\lambda) = \inf_{(c_0, \ldots, c_n) \in C} (c_0 + \sum_\nu c_\nu \lambda_\nu)$ для всякого $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где C означает множество всех $(c_0, \ldots, c_n)$ таких, что $c_0 + \sum_\nu c_\nu l_\nu(x) \geqslant k(x)$ на A. Доказывается, что $g(\lambda) \leqslant h(\lambda)$ для всех $\lambda \in L$ и $g(\lambda) = h(\lambda)$ для всех внутренних $\lambda \in \mathfrak{L}$. Если A — компакт и $l_\nu(x)$, $k(x)$ непрерывны на A, то $\mathfrak{L}$ и K также компактны, $g(\lambda) = h(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathfrak{L}$ и вектор $(\lambda, (\varphi(\lambda))$ всегда реализуется, т. е. $g(\lambda)$ является максимумом. При помощи теорем о реализации изучаются простые функции распределения, для которых получается этот максимум.

Примечание референта. В теореме 9, абзац α) надо заменить $(n+1)$ на $(n+2)$, так как здесь имеем дело с $(n+1)$-мерным вектором $(\lambda g(\lambda))$. M. Jiřina

1809. **Об одном непараметрическом критерии однородности k выборок. Гихман И. И.**, Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 3, 380—384 (рез. нем.)

Рассматривается k групп независимых в совокупности измерений численностей $n_1, \ldots, n_k$ с одной и той же непрерывной функцией распределения $F_i(x)$ $(i = 1, 2 \ldots, k)$ в каждой группе.

Для каждой группы строится эмпирическая функция распределения $\hat{F}_i(x)$ $(i = 1, \ldots, k)$, а также общая эмпирическая функция распределения для всех групп

$$\hat{F}_0(x) = \frac{n_1 \hat{F}_1(x) + n_2 \hat{F}_2(x) + \ldots + n_k \hat{F}_k(x)}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}.$$

Для проверки гипотезы H_0:

$$F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x) = F(x)$$

предлагается статистика D_k:

$$D_k^2 = \max_{-\infty < x < \infty} \sum_{i=1}^{k} n_j \left\{ \hat{F}_i(x) - \hat{F}_0(x) \right\}^2,$$

совпадающая при $k = 2$ с критерием Н. В. Смирнова:

$$D_2 = \max_{-\infty < x < \infty} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} |\hat{F}_1(x) - \hat{F}_2(x)|.$$

В работе доказано, что предельное распределение $\Phi_k(x)$ статистики D_k

$$\Phi_k(x) = \lim_{n_1, n_2, \ldots, n_k \to \infty} P\left\{D_k < x\right\}, x > 0,$$

дается формулой $\Phi_k(x) =$

$$= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(2x^2\right)^{\frac{k-1}{2}}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_s^{k-3}}{[J_{\frac{k-3}{2}}^{1}(\mu_s)]^2} e^{\frac{-\mu_s^2}{2x^2}}, \quad x > 0$$

где μ_s — s-й положительный нуль функции Бесселя $J_{\frac{k-3}{2}}(z)$. Для четных k выражение упрощается. Например:

$$\Phi_4(x) = 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} (1 - 4n^2 x^2)\, e^{-2n^2 x^2}.$$

В. П. Швальб

1810. **Оценка спектральной плотности стохастического процесса. Ломницкий, Заремба** (On estimating the spectral density function of a stochastic process. Lomnicki Z. A., Zaremba S. K.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 13—37. Discuss., 47—63 (англ.)

Рассматривается процесс $\{x_t\}$ в предположении о представимости x_t в виде $x_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \varepsilon_{t-i}$ где $\{h_i\}$ и $\{\varepsilon_t\}$ — последовательности соответственно неслучайных и случайных некоррелированных величин с нулевыми средними. Предполагается, что $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 < \infty$.

Откуда корреляционная функция процесса имеет вид:

$$R_k = \sigma^2 \sum_{t=-\infty}^{\infty} h_t h_{t+k} (h_2 = 0 \text{ при } t < 0,\ \sigma^2 = E(\varepsilon_t^2)).$$

Спектральная плотность рассматриваемого процесса имеет вид:

$$F'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k \cos 2\pi k \omega \left(-\frac{1}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

Функция $Z'_N(\omega)$, аппроксимирующая $F'(\omega)$ (т. е. оценка $F'(\omega)$) ищется в форме

$$Z'_N(\omega) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{kN} C_{kN} \cos 2\pi k\omega,$$

где $\{\lambda_{kN}\}$ — неотрицательные константы $\leqslant 1$, удовлетворяющие соотношению

$$\lambda_{kN} = \lambda_{-kN} \text{ и } C_{kN} = \frac{1}{N-|k|} \sum_{t=1}^{N-|k|} x_t x_{t+|k|}.$$

Задача оценки состоит в определении элементов матрицы $\|\lambda_{kN}\|$, минимизирующей математическое ожидание интеграла

$$E \int_{-1/2}^{1/2} [F'(\omega) - Z'_N(\omega)]^2 d\omega.$$

Показано, что указанный минимум наступает при

$$\lambda_{kN} = \frac{R^2 k}{E(C^2{}_{kN})}$$

Рассмотрены и другие виды оценок. В качестве иллюстрации рассматривается так называемый марковский процесс первого порядка, когда $x_{t+1} - \sqrt{\rho}\, x_t = \varepsilon_{t+1}$ и $R_k = \rho^{k/2}(1-\rho)$.

Приводятся численные расчеты. Б. Ш. Флейшман

1811. О некоторых встречающихся в технике функционалах, заданных на процессах. Хусу А. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 1, 89—100

Пусть $x(t)$ на $[0, T]$ — непрерывная реализация вещественного стационарного нормального процесса с нулевым средним и с непрерывной корреляционной функцией $B(\tau)$.

Через H_{ck}, H_{ca} обозначаются соответственно среднее квадратичное и арифметическое отклонения $x(t)$ от оси t, $n(u)$ — число пересечений $x(t)$ с прямой, параллельной оси t и лежащей от нее на расстоянии u, m — число максимумов $x(t)$ в $[0, T]$.

Доказываются соотношения $EH_{ca} \simeq 0{,}8\, H_{ck}$ и

$$En(u) = \frac{1}{4} \sqrt{-\frac{B''(0)}{B(0)}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2B(0)}} T, \qquad (1)$$

$$Em = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-B^{(4)}(0)}{B''(0)}} \cdot T. \qquad (2)$$

Выводится также оценка среднего значения числа максимумов $x(t)$, расположенных над указанной прямой.

Указывается использование этих результатов на практике для количественной оценки микрошероховатости обработанной поверхности. Приводятся результаты численных расчетов для профилограмм, шлифованных поверхностей, показавшие хорошее согласие наблюденных значений параметров с математическими ожиданиями, вычисленными по соответствующим формулам.

Автор указывает, что (1), (2) используются в теории флуктуационных шумов (Бунимович В. И., Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Советское радио, М., 1951; Райс С., Теория флуктуационных шумов; Сб. переводов под ред. Н. А. Железнова; Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Изд-во ин. лит., М., 1953). M. Rosenblatt-Roth

1812. О методах последовательного анализа, максимизирующих сумму n наблюдений. Брадт, Джонсон, Карлин (On sequential designs for maximizing the sum of n observations. Bradt R. N., Johnson S. M., Karlin S.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 4, 1060—1074 (англ.)

Рассматриваются две биномиальные совокупности: X с вероятностью успеха p и Y с вероятностью успеха q. Параметры p и q неизвестны, но известна их совместная функция распределения $F(p, q)$. Ставится задача: найти такой способ последовательного анализа (определить оптимальную стратегию), чтобы максимизировать математическое ожидание суммы n наблюденных значений, каждое из которых берется либо из X, либо из Y согласно стратегии S. Более подробно рассмотрен случай, когда параметр p имеет распределение $F(p)$, а значение параметра q известно.

Доказывается существование функции $Q = Q(n, F)$, по которой возможно определить оптимальную стратегию S так: если $q > Q(n, F)$, то используется Y во всех n испытаниях; если $q \leqslant Q(n, F)$, используется X в первом испытании, после чего вычисляется F' — апостериорная функция распределения для p, и q сравнивается с $Q(n-1, F')$, следуя вышеизложенному правилу выбора для второго испытания и т. д.

Выведена формула для вычисления $Q(n, F)$ (очень громоздкая).

Если $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = +\infty$ (где $\mu_i = \int_0^1 p^i dF(p)$),

то оказывается возможным брать вместо Q функцию $L(n,F) = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}{1 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n-1}}$ с аналогичными свойствами. Указывается (без строгого доказательства), что если для данного n и F $q \leqslant \frac{\int_0^1 p(1-p)^{n-1} dF}{\int_0^1 (1-p)^{n-1} dF}$, то Y никогда не нужно будет использовать. Обсуждается возможность применения видоизменения метода для контроля продукции. В. П. Швальб

1813. Некоторые свойства обобщенного последовательного критерия. Кифер, Уэйсс (Some properties of generalized sequential probability ratio tests. Kiefer J., Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 1, 57—74 (англ.)

Обобщенный последовательный критерий для выбора между двумя альтернативными гипотезами отличается от обычного последовательного критерия, основанного на отношении правдоподобия, лишь тем, что вместо определенных пределов A и B на i-й стадии берутся числа A_i и B_i, зависящие от i. Рассматривается вопрос об оптимальности в известном смысле критериев такого рода и ряд других их свойств. С. С. Кислицын

1814. Последовательные доверительные интервалы для среднего нормальной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией. Рей (Sequential confidence intervals—for the mean of a normal population with unknown variance. Ray W. D.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 133—143 (англ.)

Приведенное последовательное построение доверительного интервала данной длины $2d$ для среднего нормальной генеральной совокупности является некоторым видоизменением процедуры Анскома (РЖМат, 1955, 1399). Задается некоторое $0 < \alpha < 1$ и на первом шаге выбираются случайно 3 значения. На каждом из сле-

дующих шагов выбираются 2 значения и процедура заканчивается в тот момент, когда в первый раз получится неравенство $\frac{s_n^2 t_{n-1,\alpha}}{n} \leqslant d^2$, где n — число всех полученных значений, s_n^2 — обыкновенная несмещенная оценка дисперсии и $t_{n-1,\alpha} - \frac{\alpha}{2}$ - квантиль распределения Стьюдента. В качестве доверительного интервала берется тогда $(Y_n - d, Y_m + d)$, где Y_n — выборочное среднее. Выводится формула для точного вычисления коэффициента доверия. Эта формула зависит от значения $c = \frac{\alpha}{\sigma}$ (где σ — дисперсия генеральной совокупности), и, следовательно, точное значение коэффициента доверия зависит от σ; но для разумных значений c оно приблизительно равно $1 - \alpha$. Описывается также подобная процедура для оценки среднего с данной стандартной ошибкой. M. Jirina

1815. Преобразование основных соотношений в последовательном анализе. Бласбалг (Transformation of the fundamental relationships in sequential analysis. Blasbalg H.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 4, 1024—1028 (англ.)

Рассматривается однопараметрическое семейство распределений

$$dP(x, \theta) = \exp\{r(\theta) A(x) + s(\theta) B(x)\} dw(x), \qquad (1)$$

содержащее, в частности, нормальное распределение и распределение Пуассона. Для проверки гипотезы $H_0 : \theta \leqslant \theta_0$ при альтернативной гипотезе $H_1 : \theta \geqslant \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$ в последовательном анализе составляют логарифм отношения правдоподобия, который является функцией θ_0 и θ_1 (и выборочных значений). Области решения для последовательного критерия, использующего отношение правдоподобия, определяются в общем случае четырьмя параметрами θ_0, θ_1, α и β, где α и β суть соответственно вероятности ошибок первого и второго типа. Показано, что для специального класса распределений (1) области решения для указанного критерия определяются лишь тремя параметрами, просто выражающимися через θ_0, θ_1, α и β. В. В. Петров

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

1816. Однородные игры. Исбелл (Homogeneous games. Isbell J. R.), Math. Student, 1957, 25, № 3-4 123—128 (англ.)

Игра нескольких лиц называется простой, если в множестве всех игроков могут быть выделены подмножества, называемые выигрывающими множествами. Выигрывающие множества должны удовлетворять двум следующим требованиям: 1) непересекающиеся подмножества игроков не могут быть оба выигрывающими, 2) всякое подмножество выигрывающего множества есть выигрывающее множество.

Простая игра называется однородной, если для любых игроков A и B можно указать перестановку игроков, переводящую все выигрывающие множества в выигрывающие и A в B. Наконец, простая игра называется строгой (strong), если невозможно разбить множества всех игроков на два подмножества, из которых ни одно не является выигрывающим.

Исследуются простые строгие однородные игры n лиц, получен, например, следующий результат: простые строгие однородные игры n лиц существуют для всех n, половина или более простых множителей которых — нечетные числа. Для n вида 2^k и для $n = 12$ подобных игр не существует. И. А. Ибрагимов

1817. Метод Монте-Карло в применении к тактическим играм. Улам (Applications of Monte Carlo methods to tactical games. Ulam S.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 63—79 (англ.)

Предлагается общая схема игры двух лиц, удобная для применения методов Монте-Карло. Пусть E — множество целых чисел, конечное или счетное, а W — его подмножество. (E — все позиции игры, W — положения выигрыша). Каждому целому i приписывается множество $F(i) = (n_1, \ldots, n_k)$. Игра ведется следующим образом: A выбирает i_1, тогда B выбирает i_2 из $F(i_1)$, далее A выбирает число из $F(i_2)$ и т. д. Первый игрок, который достигнет элемента W, выигрывает. Аналогично можно определить игру n игроков. Утверждается, что проведена алгебраическая классификация таких игр: определены эквивалентность, гомоморфизм, отношение включения, сумма, произведение и итерация таких игр.

Обсуждаются схемы аппроксимации оптимальных стратегий, когда имеется распределение вероятностей, влияющее на выбор элемента в $F(i)$. Ю. Г. Епишин

1818. Аналитическое изучение военной игры. Антосевич (Analytic study of war games. Antosiewicz H. A.), Naval Res. Logist. Quart., 1955, 2, № 3, 181—208 (англ.)

Проводится математическое исследование некоторой модели военной игры типа Ланчестера (РЖМат, 1957, 7243). Стратегические переменные x, y, z, u, v, w: $x(t)$ $[u(t)]$ — величина наступающих действующих сил $A[B]$, $y(t)$ $[v(t)]$ — скорость производства A $[B]$, $z(t)$ $[w(t)]$ — величина сил обороны A $[B]$.

Модель описывается системой шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей восемнадцать констант — стратегических параметров, выбираемых игроками. Упрощающими систему предположениями получают и подробно анализируют систему

$$\dot{x} = y - bk_1 xu,$$

$$\dot{y} = \tau^{-1}(P - y) - (1 - b)\, k_2 yu,$$

$$\dot{u} = v - ak_1 ux,$$

$$\dot{v} = \tau^{-1}(P - v) - (1 - a)\, k_2 vx,$$

где a, b, τ, P, k_1, k_2, — стратегические параметры.

Дается определение победы: A побеждает B, если

$$x(t) > u(t),\ y(t) \geqslant v(t) \quad \text{или} \quad x(t) \geqslant u(t),\ y(t) > v(t)$$

для всякого $t \geqslant t_0$.

Теорема. Если $\lim_{t\to\infty} u(t) = u_\infty$ конечен и отличен от нуля, то A побеждает B, когда удовлетворяются неравенства: $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $1 \leqslant a + b \leqslant 1 + 1/\tau k_2 v_\infty$.

Для $a = b = 1$ теоремой 2 устанавливается необходимое и достаточное условие победы $x(t_0) - u(t_0) > \tau[v(t_0) - y(t_0)]$ для некоторого t_0. Приводятся примеры. Ю. Г. Епишин

1819. Применение теории игр к оценке эффективности специального оружия. Хейл, Уикк (An application of game theory to special weapons evaluation. Hale J. K., Wicke H. H.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, 4, № 4, 347—356 (англ.)

Бой наступающих подразделений против обороняющегося противника с применением атомного оружия рассматривается как игра с конечным числом стратегий. Принимается исходное количество сил каждой стороны. Огневая мощь линейно зависит от численности. На первом этапе боя применяется атомное оружие. Уцелевшие войска продолжают бой. Убывание численности при этом оценивается в соответствии с линейным

законом Ланчестера. Бой продолжается до полного истребления войск одной из сторон. Численность уцелевших войск победившей стороны принимается в качестве функции выигрыша. Рассмотрены три примера. Все они приводят к смешанным стратегиям. Чистые стратегии заключаются в выборе калибра и числа бомб и в эшелонировании сил. Наступающий всегда применяет максимальное число бомб наименьшего калибра и смешанную стратегию эшелонирования. Обороняющийся всегда оставляет силы сосредоточенными и смешивает стратегии по выбору калибров.

Несмотря на нереалистичность постановки задачи, решение позволяет сделать интересные выводы и продвинуться в постановке более сложных задач.

И. А. Полетаев

1820. Симплекс-метод для начинающих. Уагнер (The simplex method for beginners. Wagner Harvey M.), Operat. Res., 1958, **6**, № 2, 190—199 (англ.)

Элементарное введение в симплекс-метод решения задач линейного программирования. В. Н. Комлева

1821. Элементарное исследование системы производства-потребления. Ван (An elementary treatment of an input-output system. Wong Y. K.), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 4, 321—326 (англ.)

Рассматривается система уравнений вида

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = h_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$(a_{ij} \geqslant 0,\ a_{ii} < 1,\ h_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1)$, описывающая экономическую модель Минковского-Леонтьева.

Доказывается, что необходимым и достаточным условием существования и единственности положительного решения при $h_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ является $\det (I - A) \neq 0$.

В. Н. Соколова

1822. Основная теорема, касающаяся проблемы объединения при анализе производства-потребления. Фэй (A fundamental theorem for the aggregation problem of input-output analysis. Fei John Ching-Han), Econometrica, 1956, **24**, № 4, 400—412 (англ.)

Пусть дана матрица A^*, которая является результатом применения операции объединения к некоторой матрице A. Тогда в качестве приближения к матрице A может быть взята матрица $A^*_* = H_\omega A^* G$ (где H_ω и G — определенным образом построенные матрицы). Основная теорема содержит утверждение, что приближение $(I - A^*_*)^{-1}$ к матрице $(I - A)^{-1}$ представимо в виде: $(I - A^*_*)^{-1} = I - I_* + (I - A^*)^{-1}_*$ (звездочка внизу соответствует оператору, состоящему в умножении матрицы слева на H_ω и справа на G). И. Н. Соколова

1823. Линейные функции расходов. Фриш (Linear expenditure functions. Frisch Ragner), Econometrica, 1954, **22**, № 4, 505—510 (англ.)

Рассматривается случай, когда расходы на каждый приобретаемый товар являются линейными функциями доходов и также цен приобретаемых товаров. Определяются соотношения между коэффициентами этих линейных функций при некоторых дополнительных условиях. Н. М. Митрофанова

1824. Линейная модель нефтеперерабатывающей промышленности США. Манн (A linear programming model of the U. S. petroleum refining industry. Manne Alan S.), Econometrica, 1958, **26**, № 1, 67—106 (англ.)

Описана произведенная работа по построению математической модели нефтеперерабатывающей промышленности. Приведены некоторые результаты произведенных вычислений (требовалось решить задачу линейного программирования с 1063 переменными).

В приложении даны таблицы, содержащие числовой материал, который был использован при создании модели. Л. И. Горьков

1825. Применение линейного программирования к задачам планирования. Фенек, Акривос (The application of linear programming to design problems. Fenech Eugene J., Acrivos Andrew), Chem. Engng. Sci., 1956, **5**, 93—98 (англ.)

Обращается внимание инженеров-химиков на возможность применения линейного программирования при выборе производственных процессов, обеспечивающих максимальную прибыль при ограниченном количестве сырья. В. Н. Соколова

1826. Анализ социально-экономического программирования (и его математические основы). Верин (Samhällsekonomisk programmeringsanalys. Werin Lars), Ekon. tidskr., 1958, **60**, № 1, 32—50 (шведск.)

1827. К задаче о поставщике. Прагер (On the Caterer problem. Prager William), Manag. Sci., 1956, **3**, № 1, 15—23 (англ.)

Указывается, что анализ Джейкобса (РЖМат, 1958, 10129) недостаточно проясняет особенности задачи о поставщике, делающие возможным точное ее решение, и устанавливается эквивалентность этой задачи проблеме распределения Хичкока (J. Math. and Phys., 1941, **20**, 224—230), в рамках которой осуществляется синтетический подход к решению задачи о поставщике, использующий весьма специальный вид стоимостной матрицы. Аналитическое описание показывает, что окончательная программа оказывается тождественной с программой Джейкобса. Автор ограничивается частным случаем, рассмотренным Джейкобсом, но замечает, что синтетический подход имеет практическое превосходство над подходом последнего. Он легко обобщается за рамки упомянутого частного случая. Последнее иллюстрируется примером. О. В. Шалаевский

1828. К решению задачи о поставщике. Гаддум, Гофман, Соколовский (On the solution of the Caterer problem. Gaddum J. W., Hoffman A. J., Sokolowsky D.), Naval. Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 3, 223—229 (англ.)

Рассматривается следующая абстрактная линейная программа (по поводу ее интерпретации см. РЖМат, 1958, 10129). Пусть $t_1, \ldots, t_m; r_1, \ldots, r_n$ — данные постоянные, $r_i \geqslant 0$, X — переменное и $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — вектор с координатами $0 \leqslant z_i \leqslant r_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — векторы в n-мерном пространстве, каждая координата которых есть либо 0, либо 1, причем: 1) для A_i, $i = 1, \ldots, m$, существуют такие целые $a_i, b_i > 0$, что все координаты A_i от a_i-й (включительно) до b_i-й (включительно) суть единицы, а остальные — нули; 2) если все координаты A_i от a_i-й до b_i-й и все координаты A_j от a_j-й до b_j-й равны единице, а остальные координаты в A_i и A_j равны нулю и если $a_i < a_j$, то $b_i \leqslant b_j$. Для любого данного $\lambda \geqslant 0$ требуется найти переменную X и вектор z, удовлетворяющий еще добавочному условию $t_i - X \leqslant (A_i, z)$ (скалярное произведение) $i = 1, \ldots, m$, которые минимизируют форму $\lambda X + \sum_{i=1}^{n} z_i$. Эта задача обобщает задачу, рассмотренную в РЖМат, 1958, 10129. О. В. Шалаевский

1829. Задача о поставщике. Джейкобс (The Caterer problem. Jacobs Walter), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, 154—165 (англ.)

Задача о поставщике — здесь некоторая военная проблема, возникающая в связи с оценкой потребностей авиации в запасных частях машин. В статье эта проблема переведена в форму задачи линейного программирования и некоторым преобразованием получено точное решение задачи для одного частного случая. J. Kiefer.

Перевод из Math Revs, 1955, **16**, № 4, 386.

1830. Вычислительные методы для выбора портфеля ценных бумаг (Резюме). Марковиц (Computing

procedures for portfolio selection (Abstract. Markowitz Harry M.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, 4, № 1, 87—88 (англ.)
См. РЖМат, 1958, 10134.

1831. Влияние ошибок в структурной матрице на оценки связи между отраслями. Эванс (The effect of structural matrix errors on interindustry relations estimates. Evans W. Duane), Econometrica, 1954, 22, № 4, 461—480 (англ.)

Система уравнений линейной экономической модели в матричной форме имеет вид: $AX + Y = X$, где $(E-A)$ — леонтьевская матрица, а Y — известный столбец. Рассматривается влияние неслучайных ошибок в A и Y на X. При некоторых упрощающих предположениях получены также приближенные значения дисперсий и коэффициентов вариации компонент X для случая, когда элементы матрицы A случайны. С. С. Кислицын

1832. Исследование программы снабжения или производства. Руа (Recherche d'un programme d'approvisionnement ou de production. Roy B.), Rev. rech. opérat., 1957, 1, № 4, 172—184 (франц.)

Потребность в продукции является случайной величиной с функцией распределения $F(x)$ в повторяющиеся одинаковые промежутки времени. В начале каждого периода планируется изготовить u единиц продукции стоимостью a каждая. Если $x > u$, то стоимость изготовления остальных $x - u$ единиц будет $\alpha(x-u)$, где $\alpha > a$. Если $x < u$, то $u - x$ единиц продаются по цене $r < a$ за каждую. Требуется найти u, минимизирующее математическое ожидание суммарной стоимости заказа. Кроме решения этой задачи, рассматривается ряд ее обобщений, но оптимальный план ищется уже не в классе всех возможных планов. С. С. Кислицын

1833. Эконометрический подход к экономическим исследованиям. Омар Вахби (Econometric approach to economic research. Omar Wahby), Egypte contemp., 1958, 49, № 291, 51—59 (англ.)

Разъясняются основные понятия эконометрики в их связи с эконометрическими исследованиями. Главные положения поясняются примерами. Н. М. Митрофанова

1834. Наглядное решение задачи коммивояжера. Бараше (Graphic solution of the traveling-salesman problem. Barachet L. L.), Operat. Res., 1957, 5, № 6, 841—845 (англ.)

Из общего числа замкнутых путей, соединяющих N данных точек, требуется выбрать наикратчайший. Для решения предлагается интуитивный метод.
Н. М. Митрофанова

1835. Задача о размещении товаров на складах. Баумол Вулф (A warehouse-location problem. Baumol William J., Wolfe Philip), Operat. Res., 1958, 6, № 2, 252—263 (англ.)

Описывается метод решения следующей задачи.

Произведенные на фабриках продукты через государственные склады, которые арендуются фирмами, поступают в торгующие организации.

Пусть X_{ijk} — количество товара, перевезенного с фабрики i $(i = 1, \ldots, m)$ через склад j $(j = 1, \ldots, n)$ в торгующие организации k $(k = 1, \ldots, q)$. $C_{ijk}(X_{ijk})$ — стоимость такой перевозки товара, включая стоимость хранения. Q_i — количество товара, перевезенного с фабрики i. R_j — вместимость склада j. S_k — количество товара, требуемое торгующей организацией k.

Задача состоит в минимизации $\Sigma_{ijk} C_{ijk}(X_{ijk})$ при условии $\Sigma_{jk} X_{ijk} = Q_i$, $\Sigma_{ik} A_{ijk}(X_{ijk}) \leqslant R_j$, $\Sigma_{ij} X_{ijk} = S_k$, $X_{ijk} \geqslant 0$.

Эта задача отличается от обычной транспортной следующим: а) возможно, что стоимостная функция $\Sigma_{ijk} C_{ijk}(X_{ijk})$ нелинейна; б) имеются ограничения на вместимость складов; с) тройные индексы.

Задача решена при некоторых частных предположениях. Метод иллюстрирован численным примером.
В. Н. Комлева

1836. О графах, асимптотических формах конечных булевых матриц отношений и стохастических матрицах. Розенблатт (On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean relation matrices and stochastic matrices. Rosenblatt David), Naval Res. Logist. Quart., 1957, 4, № 2, 151—167 (англ.)

Булевой матрицей отношений (б. м. о.) автор называет квадратную матрицу $R = \|r_{ij}\|_1^n$, состоящую из нулей и единиц, причем сложение и умножение элементов r_{ij} — операции булевой алгебры. Графом б. м. о. R, $G(R)$, называется совокупность n объектов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, вершин графа и упорядоченных пар вершин a_i, a_j, определенных для тех и только тех i, j, для которых $r_{ij} = 1$. $\overrightarrow{a_i, a_j}$ называется стороной графа. Каждой неотрицательной матрице $A = \|a_{ij}\|_1^n$ порядка $n \geqslant 2$ соотносится б. м. о. $R_A = \|r_{ij}\|_1^n$,

где $$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ij} > 0 \\ 0, & \text{если } a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Граф $G(R_A)$ называется графом A.

Автор показывает, что асимптотическое поведение k-х степеней $(k = 1, 2, \ldots)$ б. м. о. R^k и стохастических матриц A^k определяется некоторыми простыми комбинаторными свойствами их графов.

Настоящее исследование вызвано некоторыми задачами математической теории организации. По мнению автора, методы статьи могут быть полезны при изучении некоторых динамических процессов. И. А. Ибрагимов

1837. Оптимальная система хранения при известном годичном режиме выдачи. Клингст (Optimale Lagerhaltung bei bekanntem Jahresgang des. Bedarfes. Klingst A.), Unternehmensforschung, 1956—1957, 1, № 4, 166—172 (нем.; рез. англ., франц.)

Задача сводится к минимизации выражения

$$K = \sum_i \{C_1 [F(a_i) - F(e_i)] + C_2 [F(a_{i+1}) - F(e_i)]\} + n C_s,$$

где

$$e_i = \frac{a_i C_1 + a_{i+1} C_2}{C_1 + C_2}, \qquad a_{n+1} = a_1 + T,$$

$$F(x) = \int_0^x dx \int_0^x f(t)\,dt, \quad f(t) \geqslant 0, \quad \int_{a_i}^{e_i} f(t)\,dt \leqslant S_0,$$

путем соответствующего подбора $n, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Автор рекомендует пользоваться электронным вычислителем.
О. Г. Фаянс

1838. Заготовка угля и регулирование производства. Гардан (Le stockage du charbon et la régulation de la production. Gardent P.), Rev. rech. opérat., 1958, 2, № 6, 3—22 (франц.)

Рассматривается следующая задача. Имеется необходимое техническое оборудование, известен уровень производства и емкость складов для угля. Кроме того, известно количество угля, которое будет потреблено на будущий год. Потребления на последующие годы неизвестны. Их отклонения от среднего носят случайный характер с функцией распределения $f(x)dx$. Требуется определить на будущий год количество добытого угля, импортируемого и хранящегося на складах. При этом условия эксплуатации должны быть такими, чтобы издержки были минимальными. В добавлении рассматривается задача с учетом экспорта. Л. А. Кораблева

1839. Исследование операций. Брамбилла (La ricerca operativa. Brambilla Francesco), Civilta macchine, 1955, **3**, № 6, 66—72 (итал.; рез. англ.)

Кратко излагаются некоторые методы исследования операций. Приведен ряд примеров. С. С. Кислицын

1840. Метод «подобия» в исследовании операций. Харлинг (Simulation techniques in operational research. Harling John), Operat. Res. Quart., 1958, **9**, № 1, 9—21 (англ.)

После изложения сущности метода Монте-Карло автор весьма бегло останавливается на применении этого метода к решению некоторых задач исследования операций. С. С. Кислицын

1841. Исследование операций в сфере промышленного потребления (Operations research on industrial consumers), Manag. Operat. Res. Digest, 1955, **1**, № 1, 9—11 (англ.)

1842. Военные применения исследования операций. Эйбрамс (Military applications of operational research. Abrams John W.), Operat. Res., 1957, **5**, № 3, 434—440 (англ.)

С 1939 г. в армиях Великобритании и США существуют группы ученых, успешно проводящих научный анализ эффективности тактических приемов использования вооружения и оборудования. Научная методология в постановке задач и математические методы их решения позволяют по-новому подойти к планированию и подготовке военных действий и добиться в ряде случаев повышения эффективности оружия в несколько раз без дополнительных затрат. В работе групп широко используется математическая статистика и теория игр.

Обязанности ученых-исследователей не совпадают с обязанностями офицеров армии; ученые и офицеры дополняют друг друга. Ученые не вмешиваются в принятие решения по проведению операции, а только участвуют в его подготовке и выясняют возможные последствия тех или иных действий и докладывают об этом командованию.

Исследование операций широко применяется также и при проектировании новых типов оружия и выборе их характеристик. Масштабы использования методов исследования операций в военном деле непрерывно увеличиваются. И. А. Полетаев

1843. Применение статистических методов к организации операций по снабжению за границей. Холлингсхед (The application of statistical techniques to management of overseas supply operations. Hollingshead E. F.), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 2, 82—89 (англ.)

Работа центральных баз военно-морского флота — отправка материалов по запросам частей и соединений ВМФ — изучалась в различных звеньях с помощью методов математической статистики. Результаты изучения позволили принять меры к повышению эффективности системы снабжения — удешевлению и ускорению обслуживания частей. Сроки отправки некоторых грузов сокращены вдвое. Сокращен объем оформляемой документации, ибо стоимость ее оформления значительно выше, чем потери, могущие произойти вследствие ее отсутствия. Предлагаются изменения существующей системы приоритета. И. А. Полетаев

1844. Приоритет в системе снабжения военно-морского флота США. Янг (Priorities in the naval supply system. Young William M.), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 1, 16—24 (англ.)

Обсуждаются недостатки существующей системы приоритета в снабжении ВМФ, в которой используется четыре индекса очередности, а также независимая от этого индекса дата поставки. Очередность выполнения заказов на базах определяется фактически не столько индексом приоритета, сколько датой поставки. Индекс и дата устанавливается заказчиком и проверяется либо офицером снабжения в подразделении, либо специальным бюро.

Система требует улучшения. Основное предложение по улучшению системы сводится к тому, чтобы приоритет приписывать операции флота; все заказы на снабжение этой операции автоматически получают тот же приоритет. Исходя из приоритета операции определяются срочность выполнения заказов и в военное время нормы отпуска дефицитных материалов. И. А. Полетаев

1845. Влияние подвижности населения на расположение общественных укрытий. Александер, Ферреби, Грим, Либау, Сентурия, Синглтерри (Effect of population mobility on the location of communal shelters. Alexander Michael N., Ferebee J. Brooks, Grim Paul J., Lebow Leonard S., Senturia Stephen D., Singleterry Ann M.), Operat. Res., 1958, **6**, № 2, 207—231 (англ.)

Излагается метод оценки размера области, обслуживаемой защитным укрытием для гражданского населения, в зависимости от некоторых факторов. Оценивается скорость ходьбы, очередь при входе в укрытие, время, имеющееся в распоряжении от момента сигнала тревоги до атаки, и т. д.

Полученные результаты применяются к случаю метрополитена Вашингтона. В. Н. Комлева

1846. Оперативные требования к предупреждающим столкновения системам. Пина, Ландау (Operational requirements for a collision warning system. Pina Eduardo I., Landau Henry J.), Operat. Res., 1957, **5**, № 6, 794—814 (англ.)

Описываются требования к системе, предупреждающей столкновение самолетов в предположении прямолинейных курсов и постоянных скоростей к моменту возможной встречи.

Элементарным математическим аппаратом получены требования разрешающей способности оборудования как функции радиуса сферы безопасности, относительной скорости, дальности предупреждения и дальности первых измерений. Далее в системе допускается «ложная тревога» с ненулевой вероятностью и дается выражение этой вероятности для заданной плотности распределения ошибок измерений. Ю. Г. Епишин

1847. Вероятности поражения круговых целей со смещением. Гровс, Смит (Salvo hit probabilities for offset circular targets. Groves Arthur D., Smith Ed S.), Operat. Res., 1957, **5**, № 2, 222—228 (англ.)

1848. Исследование операций в военном деле в Японии. Тада, Фрай (Military operations research in Japan. Tada Kazuo, Fry Macon), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 428—435 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

1849. Выравнивание прямой линией определенных типов кумулятивных данных. Мандел (Fitting a straight line to certain types of cumulative data. Mandel John), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 280, 552—566 (англ.)

Рассматриваются две статистические модели влияния случайных ошибок.

1) Для независимых ошибок независимая переменная x и измеряемая величина y связаны уравнениями $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, дающими различные точки прямой линии, причем ε_i — независимые случайные величины со средним нуль и с одной и той же дисперсией $\mathrm{var}(\varepsilon_i) = \mathrm{const}$ (классическая модель).

2) Для кумулятивных ошибок это уравнение принимает вид $y_i = \beta x_i + \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j$, здесь дисперсия величины ε_j суть функция интервала $x_j - x_{j-1}$ ($x_0 = 0$).

Изучаются оценки ошибок этих двух типов, когда наблюденные данные выравниваются прямой линией, и обсуждается вопрос о том, какую из указанных моделей нужно использовать в конкретных наблюдениях. Указана также оценка наклона прямой линии.

М. К. Камалов

1850. Основы статистических методов контроля качества продукции и изделий текстильной промышленности. Испытание прочности пряжи в одном витке. Ускоренный метод определения статистических показателей методом разбиения на классы. Матич (Osnovi statističkih methoda kontrole kvalitete proizvoda i proizvodnje u tekstilnoj industriji. Ispitivanje jednoličnosti čvrstoće prede na jednom navitku. Skraćena metoda odredivanja statističkih obilježja pomocu razdiobe u klase. Matič Eugen), Tekstil, 1956, 5, № 7, 549—555 (серб.-хорв.)

1851. Экономически оптимальные приемочные тесты. Брейкуэлл (Economically optimum acceptance tests. Breakwell J. V.), J. Amer. Statist. Assoc., 1956, № 274, 243—256 (англ.)

Предположим, что инспекции подвергается некоторая совокупность объектов. При этом каждый объект совокупности может быть лишь „стандартным" или „дефектным".

Если действительная доля p дефектных объектов в совокупности не превышает некоторого критического числа p_0 ($0 \leqslant p_0 < 1$), совокупность считается приемлемой (прием такой совокупности не сопровождается потерями). В качестве критерия сравнения различных правил инспекции принимается функция риска

$$r = \begin{cases} c(p - p_0)P + \overline{N}, & \text{если } p > p_0, \\ c'(p_0 - p)Q + \overline{N}, & \text{если } p < p_0, \end{cases}$$

где P — вероятность принять, а $Q = 1 - P$ — вероятность отвергнуть совокупность; $\overline{N}$ — математическое ожидание числа наблюдений, c и c' — некоторые константы. Стоимость контроля считается пропорциональным числу наблюдений N. Исходя из функции риска r для малых значений p с пуассоновским распределением, определяются минимаксные правила среди правил с фиксированным числом наблюдения и последовательных правил инспекции. Минимаксным правилом с фиксированным числом наблюдения является правило, согласно которому совокупность принимается, если число дефектных объектов в выборке с объемом $N = \nu\sqrt{c}$ не превосходит F, и отвергается в противном случае; F и ν являются функциями экономических параметров $\rho = c/c'$ и $\delta = p_0\sqrt{c}$.

В работе разбирается так же случай, когда объекты классифицируются при помощи физических измерений.

Р. Х. Дивеев

1852. О понятии коэффициента полезного действия в теории информации. Нейдхардт (Der Begriff des Wirkungsgrades in der Informationstheorie. Neidhardt P.), Elektron. Rundschau, 1956, 10, № 1, 15—19 (нем.; рез. англ., русск.)

В качестве меры полезного действия для передачи информации через каналы связи предлагается отношение энтропии источника, питающего канал, к энтропии источника, образующегося у выхода канала. Даются различные числовые примеры.

M. Rosenblatt-Roth

1853. Точное решение интегральных уравнений, связанных с синтезом широкого класса оптимальных линейных фильтров, переменных во времени. Бендат (Exact integral equation solutions and synthesis for a large class of optimum time variable linear filters. Bendat Julius S.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 1, 71—80, 81 (англ.)

Рассматривается сигнал — нестационарный случайный процесс, заданный ансамблем рядов Фурье с коэффициентами, несущими информацию. Аддитивные шумы предполагаются нормальными с экспоненциально-косинусоидальной функцией корреляции, часто встречающейся в приложениях. На конечном интервале времени оптимальная весовая функция фильтра $h(\tau, t)$ находится в виде решения интегрального уравнения. Решение может быть представлено в виде конечной суммы функций с разделяющимися переменными τ и t плюс член, содержащий две дельта-функции.

Б. Ш. Флейшман

1854. Теория многоуровневого информационного канала с гуссовым шумом. Ватанабэ (A the or of multilevel information channel with Gaussian noise. Watanabe Satosi), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 4, 214—219 (англ.)

Рассматриваются величины, принимающие значения на единичной окружности. Сложение понимается как сложение по модулю 2π. Пусть ξ принимает с равными вероятностями 2^g значений $a_1, \ldots, a_{2^g}$, равномерно расположенных на окружности. Пусть $\widetilde{\eta}$ — гауссова величина со средним 0 и дисперсией σ^2 и $\eta \equiv \widetilde{\eta} \pmod{2\pi}$ принимает значения на окружности. Пусть $\widetilde{\eta}$ не зависит от ξ и $\zeta = \xi + \eta$. Пусть, наконец, $\widetilde{\zeta} = a_i$ при $|\zeta - a_i| \leqslant \frac{1}{2^{g+1}}$. Автор вычисляет информацию $I(\xi, \widetilde{\zeta})$ и проводит подробное качественное и количественное исследования результата. В частности, исследуется асимптотика при $g \to \infty$ и $\sigma \to 0$. Указывается, что технический интерес имеет задача, аналогичная рассмотренной, но где величины принимают значения не на окружности, а на обычной прямой. Автор считает, что при небольших σ картина качественно не меняется, и приводит некоторые доводы в пользу этого вывода.

Р. Л. Добрушин

1855. Интегральные канонические представления случайных функций и их применение к определению оптимальных линейных систем. Пугачев В. С. Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 11, 971—984

Пусть случайная функция $X(t)$ и ее корреляционная функция $K(t, s)$ представимы в виде

$$X(t) = MX(t) + \int_{\Lambda} Z(\lambda)\, x(t, \lambda)\, d\lambda;$$

$$K(t, s) = \int_{\Lambda} G(\lambda)\, x(t, \lambda)\, \overline{x(s, \lambda)}\, d\lambda,$$

где $Z(\lambda)$ — „белый шум" (случайная функция с нулевым математическим ожиданием и некоррелированными значениями) с корреляционной функцией $G(\lambda)\,\delta(\lambda - \mu)$, представимый формулой

$$Z(\lambda) = \int_T [X(t) - MX(t)]\, \overline{a(t, \lambda)}\, dt.$$

Входящие в эти формулы функции $x(t, \lambda)$, $a(t, \lambda)$, $G(\lambda)$ должны быть определены из уравнений

$$\int_T x(t, \lambda)\, \overline{a(t, \mu)}\, dt = \delta(\lambda - \mu); \quad \int_{\Lambda} x(t, \lambda)\, \overline{a(s, \lambda)}\, d\lambda = \delta(t - s);$$

$$G(\lambda)\, x(t, \lambda) = \int_T K(t, s)\, a(s, \lambda)\, ds.$$

В частности, для линейной системы, преобразующей входной сигнал в виде белого шума $Z(\lambda)$ в выходной

сигнал $X(t)$, $-\infty < t < T$, роль $x(t, \lambda)$ играет весовая функция $w(t, \lambda)$, а роль $a(t, \lambda)$ — весовая функция $w^-(t, \lambda)$ обратной системы. Если линейная система описывается уравнением $FX = HZ$, где F, H — линейные дифференциальные операторы, то весовые функции w, w^- определяются уравнениями

$$F_t w(t, \lambda) = H_t \delta(t - \lambda); \quad H_t w^-(t, \lambda) = F_t \delta(t - \lambda).$$

Изложенная конструкция используется для определения оптимального линейного оператора A (т. е. такого, что при заданных случайных функциях $X(t)$, $Y(t)$ величина $AX(t)$ является наилучшим в смысле среднего квадратичного приближением для величины $Y(t)$. Такой оператор определяется из уравнения

$$A_t K(t, u) = K_1(s, u),$$

где $K_1(s, u)$ — взаимная корреляционная функция величин $Y(t)$ и $X(t)$. Решение этого уравнения представляется в виде $Az(t) = \int_\Lambda \xi(s, \lambda)\, d\lambda \int_T a(t, \lambda) z(t)\, dt$, $G(\mu)\xi(s, \mu) = \int_T K_1(s, u)\, a(u, \mu)\, du$, где $a(t, \lambda)$, $G(\mu)$ — функции, определяющие указанное выше интегральное представление случайной функции $X(t)$.

Рассматриваются важнейшие частные случаи задачи об определении оптимального оператора. Приводятся примеры.

А. С. Монин

1856. Средний квадрат мощности шума при оптимальной линейной фильтрации дискретного временного ряда, содержащего многочленную компоненту и наложенный на нее белый шум. Блум (On the mean square noise power of an optimum linear discrete filter operating on polynomial plus white noise input. Blum Marvin), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 4, 225—231 (англ.)

Пусть известны M последовательных значений дискретного временного ряда y_u, $u = 1, 2, \ldots, M$, представляющего собой сумму многочлена $P(u)$ от u известной степени n и „белого шума", т. е. случайной ошибки, значения которой при различных u предполагаются некоррелированными между собой и имеющими постоянную дисперсию σ_N^2; по этим данным требуется оценить значение K-й производной (где $0 \leqslant K \leqslant n$) многочленной компоненты данного временного ряда в точке $M + \alpha$ (α — положительное, отрицательное или равное нулю). Задача решается с помощью обычного метода наименьших квадратов; основное внимание уделяется явной формуле для средней квадратичной ошибки σ_Δ^2 полученной оценки производной $P(K)(M + \alpha)$ (точнее говоря, для относительной средней квадратичной ошибки $\sigma_\Delta^2 / \sigma_N^2 = \delta^2(M, \alpha, K, n)$. Приводится ряд частных случаев общей формулы для $\delta^2(M, \alpha, K, n)$, отвечающих некоторым специальным случаям рассматриваемой задачи, а также асимптотическая формула для $\delta^2(M, \alpha, K, n)$ при большом M и $\alpha \ll M$, совпадающая с результатом, полученным Джонсоном (РЖМат, 1958, 3165) в предположении, что $\alpha = 0$. Численные значения $\delta^2(M, \alpha, K, n)$ для $K = 0, 1$ и 2, $n = 0, 1, 2 \ldots, 5$ и $M = 2, 3 \ldots, 9, 10, 20, 50, 95$ и 1001 сведены в 3 таблицы, в которых указаны также значения (в процентах) ошибки асимптотической формулы для $\delta^2(M, \alpha, K, n)$ при этих K, n и M; данные для $2 \leqslant M \leqslant 100$ представлены также и в графической форме. Более специальные математические рассмотрения, требующиеся в ходе изложения, вынесены в 3 отдельных дополнения в конце статьи.

А. М. Яглом

1857. Случайные функции в автоматической телефонии. Вероятность отказа в сопряженном подборе. Форте (Les fonctions aléatoires en téléphonie automatique. Probabilité de perte en sélection conjuguée. Fortet Robert), Ann. télécommuns, 1956, 11, № 4, 85—88 (франц.)

В первой части указывается общий метод составления уравнения работы телефонной установки во времени. В качестве примера дается случай Эрланга с n линиями. Пусть: 1) $R(u, t)$ равно 1 для тех моментов t, в которые разговор, начатый в момент u, еще продолжается, и нулю в остальные моменты t; 2) функция $V(x)$ равна 1 при $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $V(n) = 0$ и произвольна для остальных x; 3) $Y(t)$ — число занятых линий в момент t; 4) $N(t)$ — число вызовов в интервале $(0, t)$.

Уравнение работы установки:

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t-0} V(Y(u))\, R(u; t)\, dN(u).$$

Автором начато изучение этих уравнений (Random distributions, Repartitions aléatoires. Proc. 3-rd Berkeley Symposium on Probability and Statistics).

Во второй части изучается вероятность отказа в системах с сопряженным подбором на основе метода Якобеуса (Jacobaeus C. A., Study on congestion in link systems. Ericsson Tech. Sweden, 1950, vol. 48).

M. Rosenblatt-Roth

1858. О некоторых системах очереди. Удагава, Накамура (On a certain queuing system. Udagawa Kanehisa, Nakamura Gisaku), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 3, 117—124 (англ.)

Рассматриваются системы очереди в следующих предположениях: 1. Вероятность того, что за интервал времени t появится n клиентов, равна $e^{-\lambda t}\lambda^n t^n / n!$

2. Пусть p_i — вероятность того, что вновь появившийся клиент присоединится к очереди в тот момент, когда обслуживаются или ожидают обслуживания i клиентов. Предполагается, что $p_0 = 1$, т. е. что каждый вновь появляющийся клиент, в случае отсутствия других клиентов, обслуживается немедленно.

3. Время обслуживания v имеет плотность вероятности $B(v) = be^{-bv}$.

Пусть x_t — число ожидающих в момент t ($t = 1, 2, \ldots$), вероятность перехода $P_r(x_{t+1} = j | x_t = i) = p(i, j)$, и $P_m(t, n)$ — вероятность того, что в момент t в очереди будет $n + m$ клиентов, если в момент $t = 0$ в очереди было n клиентов.

Величины $P_m(t, n)$ и $p(i, j)$ связаны так:

$$p(i,j) = \begin{cases} \int_0^\infty [P_0(t, 1) + P_1(t, 1)] B(t)\, dt, & i = j = 1 \\ \int_0^\infty P_{j+1-i}(t, i) B(t)\, dt, & i - 1 \leqslant j \text{ (кроме случая } i = j = 1) \\ 0, & i - 1 > j. \end{cases}$$

По смыслу $P_0(0, n) = 1$, $P_m(0, n) = 0$ для $m \neq 0$.

Чтобы найти $P_m(t, n)$, авторы отправляются от уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} P_0(t, n) = -\lambda p_n P_0(t, n),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_m(t, n) = -\lambda p_{n+m} P_m(t, n) + \lambda p_{n+m-1} P_{m-1}(t, n), \quad m \neq 0.$$

Из первого из этих уравнений следует, что $P_0(t, n) = e^{-\lambda p_n t}$. Что касается второго, то его решение оказывается довольно сложным. Прежде всего авторы находят

$$p(i,j)=\begin{cases}\dfrac{1+\rho p_1+\rho p_2}{(1+\rho p_1)\ (1+\rho p_2)}, & i=j=1,\ \rho=\lambda/b\\ \dfrac{\rho^{j+1-i}\ p_i p_{i+1}\cdots p_j}{(1+\rho p_i)\ldots(1+\rho p_{j+1})}, & i-1\leqslant j(\text{кроме случая } i=j=1)\\ 0, & i-1>j\end{cases}$$

Затем, на основе этого оказывается, что

$$P_m(t,n)=(-1)^m\prod_{i=1}^{m-1}p_{n+1}\cdot\sum\frac{e^{-\lambda p_{n+j}t}}{\prod_{k=0}^{m}{}'(p_{n+j}-p_{n+k})},$$

где $m\neq 0$ и в $\prod'$ $k\neq j$.

Наконец, находятся предельные вероятности $u_j=\lim_{n\to\infty}p^{(n)}(i,j)$ в случае эргодической цепи, где $p^{(n)}(i,j)$ — вероятность перехода за n интервалов времени.

Г. П. Боев

1859. Обобщение формулы Энгсета. Коэн (The generalized Engset formulae. Cohen J. W.), Philips Telecommun. Rev., 1957, **18**, № 4, 158—171, 207 (англ.; рез. нем., франц.)

Исследуется формула Энгсета, которая определяет вероятность потери вызовов, поступающих на конечное число линий в случае конечного числа абонентов. Автор показывает, что формула Энгсета справедлива при произвольном распределении времени обслуживания, если число вызовов распределено по закону Пуассона. Выводятся формулы, аналогичные формуле Эрланга, когда число абонентов разбито на подгруппы, которые могут иметь и бесконечное число абонентов.

С. М. Броди

1860. Смысл и основные принципы приложения статистических методов к некоторым геологическим проблемам. Ломбар (Raisons et principes fondamentaux de l'application des méthodes statistiques à quelques problèmes géologiques. Lombard Jean), Chronique mines outre-mer, 1958, **26**, № 262, 103—111 (франц.)

1861. Метод повторного теста для исследования частичных знаний и других факторов, влияющих на ответы по тестовым вопросам. Браунлесс, Китс (A retest method of studying partial knowledge and other factors influencing item response. Brownless Vera T., Keats John A.), Psychometrika, 1958, **23**, № 1, 67—73 (англ.)

Описывается метод изучения задач, связанных с поведением при проверочных испытаниях, в частности, задач исправления ошибок при угадывании. Приводится иллюстрирующий пример. Насколько известно авторам, это новый метод подхода, однако он охватывает много практических и теоретических вопросов, поднятых в других статьях. По резюме авторов

1862. Распределение эритроцитов в гемоцитометре. Тернер, Иди (The distribution of red blood cells in the hemacytometer. Turner Malcolm, Eadie G. S.), Biometrics, 1957, **13**, № 4, 485—495 (англ.)

Приводятся вероятностные модели, возникающие при оценке гемоцитометром плотности эритроцитов в крови и приводящие к биномиальному и обобщенному гипергеометрическому распределениям вероятностей; причем предельным для биномиального распределения, как и в теории вероятностей, является закон Пуассона. Это проиллюстрировано на примере. М. К. Камалов

1863. Оптимальный объем группы при испытаниях потомства и селекции. Робертсон (Optimum group size in progeny testing and family selection. Robertson Alan), Biometrics, 1957, **13**, № 4, 422—450 (англ.)

Представлены общая процедура определения оптимального объема группы при испытаниях потомства и программа отбора в животноводстве на основе обработки экспериментальных данных. М. К. Камалов

1864. Модель, описывающая потерю прочности материалов в результате поражения грибом. Мариц (A model for the deterioration in strenght of materials due to fungal attack. Maritz J. S.), Biometrics, 1957, **13**, № 4, 433—441 (англ.)

Пусть время начала поражения материала грибом t и его первоначальная прочность x — независимые случайные величины. Пусть $xf(\tau-t;a)\ (\tau>t)$—прочность материала в момент τ, где f — заданная ф. р. со случайным параметром a. Автор находит выражение для математического ожидания прочности y_t в момент t. В частности, рассмотрены случаи, когда $f(t-\tau;a)=e^{-a(\tau-t)}$, $M(a)=\alpha$, σ_a мало и t следует показательному закону со средним $M(t)=\frac{1}{\beta}$. Рассмотрены методы получения оценок α и β и ковариация этих оценок, если они получены по методу наименьших квадратов (с введением весов). Б. В. Финкельштейн

1865. Восстановление искаженного английского текста. Миллер, Фридман (The reconstruction of mutilated English texts. Miller George A., Friedman Elizabeth A.), Inform. and Control, 1957, **1**, № 1, 38—55 (англ.)

Описываются итоги опытов, в которых искажался осмысленный английский текст и затем предлагалось восстанавливать его лицам, с этим текстом не знакомым. Искажение проводилось разнообразными методами. Например, из текста изымались случайно выбранные буквы, причем (в одном из вариантов) эти буквы заменялись на случайно выбранные другие. Во втором варианте вместо них оставлялись пустые места, а в третьем — текст сжимался после их выбрасывания. В некоторых опытах выбрасывалась периодическая последовательность букв, в других все наиболее частые буквы (несущие наименьшую информацию) и т. п. На основании этих опытов оценивалась нижняя граница для избыточности английского письменного языка. Указаны технические приложения к телеграфной передаче информации. Р. Л. Добрушин

1866. Семантические ограничения в анализе систем связи. Хауптштейн, Шварц (Semantic constraints in the analysis of communication systems. Hauptschein A., Schwartz L. S.), Proc. I. R. E., 1957, **45**, № 9, 1284—1285 (англ.)

Кратко излагаются результаты опытов, аналогичных по идее опытам, описанным в статье Миллера и Фридмана (реф 1865). Р. Л. Добрушин

1867. О некоторых теоретико-вероятностных проблемах, связанных с теорией атомных реакторов. Такач (Atommag-reaktorok elméletével kapcsolatos néhány valószínüségszámítási kérdésröl. Takács Lajos), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 55—66 (венг.; рез. русск., англ.)

Величина $\eta_t=\log\frac{E_0}{E_t}$, где E_0 — начальная энергия нейтрона, называемая летаргией, представляет собой марковский процесс с функцией распределения $P(\eta_t<x,A_t)=F(t,x)$, где событие A_t состоит в том, что нейтрон в промежуток времени $(0,t)$ не поглощается, удовлетворяет дифференциальному уравнению типа Колмогорова — Феллера

$$\frac{\partial F(t;x)}{\partial t}=-\int_0^x e^{-\frac{y}{2}}\Big[C(y)-\sum{}^{*}_{\gamma_i}(y)H_i(x-y)\Big]F(t,dy),$$

где H_i — функция распределения увеличения летаргии во время рассеивания на атомном ядре i-го типа, $\gamma_i^* = N_i \sigma_i$; N_i — число атомов i-го типа, $\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^{**}$, σ_i^* — микроскопическое эффективное сечение рассеивания, σ_i^{**} — микроскопическое эффективное сечение поглощения на i-м атомном ядре.

Определяется условное математическое ожидание $M(\tau_x | A_{\tau_x}) = \frac{\sqrt{2m}}{C}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}}\right) + \frac{\sqrt{2m}}{2C\sqrt{E_0}}$ случайной величины τ_x, τ_x — тот момент времени, когда летаргия становится больше, чем x. Получено распределение μ_x — числа столкновений, происшедших до момента τ:

$$P\left\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\right\} = \sum_{i=1}^{x} \int \frac{\gamma_i^*(y)\,[1 - H_i(x-y)]}{C(y)}\, dQ_{n-1}(y),$$

где $Q_n(x) = P\{\tau_{ln} \leqslant x, A_n\}$ $(n = 0,1, \ldots)$.

С. М. Броди

1868. Об одной проблеме теории вероятностей, связанной с регистрацией частиц. Такач (Egy részecskeszámlálással kapcso latos valószinüségszámítási problémáról. Megjegyzés Békéssy András «Hibás scalerek (jeloszkók) valószinüségeloszlxšárol» cimü dolgozatához. Takács Lajos), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 93—98 (венг.; рез. русск., англ.)

В счетчик поступают частицы в моменты $\{t_n\}$. Рассматривается подпоследовательность $\{t'_n\}$, где $t'_n = t_{v_1+v_2+\ldots+v_n}$. Предполагается, что случайные величины $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ независимы, одинаково распределены и $M(\xi_n) = M$, $D^2(\xi_n) = \sigma^2$, величины v_i независимы с известным распределением $P\{v_i = n\}$. Изучается с помощью теории рекуррентных процессов, как отражается счет в случае дефектных счетчиков на величине

$$f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2}\frac{1}{M(v_i)} + \frac{D^2(v_i)}{M^2(v_i)}.$$

С. М. Броди

1869. Проблема начальных данных в статистической механике. Курт (Das Anfangswertproblem der statistischen Mechanik. Kurth Rudolf), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 1, 29—41 (нем.)

Рассматриваются уравнения для плотности вероятностей решений дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x,t) \qquad (i = 1,2, \ldots, k),$$

если задана плотность вероятностей начальных данных. Указанная задача в более сложной постановке рассматривалась Ю. А. Крутковым (Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение, ОНТИ НКТП СССР, 1936). Некоторые выводы автора являются повторением известных результатов теории интегральных инвариантов (Картан Э., Интегральные инварианты, ГИТТЛ, М.—Л. 1940). Особое внимание уделяется плотности вероятностей решений по части переменных.

В. С. Новоселов

1870. О теории накопления капитала. Тедески (Sulla teoría dei capitali accumulati. Tedeschi Bruno), Giorn. Ist. ital. attuari, 1956, **19**, 92—130 (итал.)

Историко-критический обзор трудов по теории страхования. Рассмотрен ряд новых примеров.

С. С. Кислицын

1871. XV Международный конгресс по страховой математике. Херлен (Der XV. internationale Kongreß der Versicherungsmathematiker. Härlen Hasso), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1958, **3**, № 4, 477—486 (нем.)

1872 К. Способ наименьших квадратов (Учебн. пособие для судоводительских фак. высш. мореходн. училищ и аркт. фак. Ленингр. высш. инж. морск. училища им. адм. Макарова). Ющенко А. П. Л., «Морской транспорт», 1956, 164 стр., илл., 4 р. 65 к.

Книга состоит из двух разделов: I Теория ошибок и II Метод наименьших квадратов.

I раздел: § 1. Содержание курса, основные определения. § 2. Сведения по теории вероятностей — весьма упрощенное изложение. § 3. Случайные ошибки и плотность распределения их вероятностей. Несмещенность и симметричность автор вводит в определение „случайной ошибки" в отличие от систематической. § 4. Законы распределения средних квадратических ошибок. Даются элементарные теоремы о дисперсии линейной формы; независимость слагаемых не упоминается. Выборочные и генеральные параметры четко не разделяются. Излагается (нестрого) ценный способ двойных измерений для оценивания точности измерения. § 5. Неравноточные измерения. Дается схема известных весов, с применением к определению места судна.

II раздел: §6. Уравнивание по способу наименьших квадратов. Постановка задачи. § 7. Уравнивание прямых и косвенных независимых наблюдений (независимых — в смысле „не имеющих связей"). Обычный материал, с подробными вычислительными схемами и примерами. § 8. Интерполяционное уравнение в случае периодических функций. § 9. Средняя квадратическая ошибка и вес функции уравненных величин. § 10. Определение места судна. Подробное описание соответствующих применений метода наименьших квадратов, с примерами. § 11. Графическое уравнивание. § 12. Уравнивание с условными уравнениями. В приложении дано понятие о законе Стюдента, в несколько упрощенной форме „оценка точности вывода", даны доверительные интервалы с распределением Стюдента, правило отбрасывания „выскакивающих наблюдений" с заданным номером. На стр. 160 приведена формула

$$P(m - \varepsilon < \sigma < m + \varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx, \qquad (1)$$

где $m^2 = \frac{[vv]}{n-1}$ — несмещенная оценка σ^2; $x_1 = \frac{m}{m+\varepsilon}\sqrt{n-1}$; $x_2 = \frac{m}{m-\varepsilon}\sqrt{n-1}$.

Примечание референта. 1) Формула (1), заимствованная, по-видимому, из книги В. И. Романовского «Основные задачи теории ошибок», ГТТИ, 1947, где она трактуется неверно, — может ввести в заблуждение читателя, так как не подчеркнуто, что ε должно быть случайным и таким, что $\frac{\varepsilon}{m} = \eta$ можно было бы считать заданной малой величиной. 2) По всему I разделу весьма нечетко отделены генеральные характеристики от выборочных. 3) На стр. 27, фраза „У нас в СССР принято оценивать точности результатов измерений именно средними квадратичными ошибками" звучит странно.

Ю. В. Линник

1873 К. Статистическая динамика. Трукса (Statistiká dynamika. Truksa Ladislav Praha, Státní pedagogické nakl., 1956, 214 s.) (чешск.)

1874 К. **Введение в математику для медицинских статистиков. I. Барши** (Matematikai bevezetö. Az egészségügyi statisztikusok tanfolyamára. I. rész. Barsy Gy. Budapest, 1953) (венг.)

1875 Д. **Метод наименьшего спуска в теории статистического равновесия. Морозова Т. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Киевск. ун-т, Киев, 1956

См. также: 1116, 1208, 2034.

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

1876. **Библиографическая заметка. Альтшиллер-Корт** (Bibliographical note. Altshiller-Court N.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 338, 275 (англ.)

Указывается, что свойство трех аполлониевых окружностей треугольника уже отмечалось различными авторами впервые в 1902 г. А. М. Березман

1877. **Поверхность — это целый мир. Миллер** (Suprafata, o întreagă lume. Myller A.), Gaz. mat şi fiz., 1957, **A9**, № 1, 1—7 (рум.)

Доклад, прочитанный в 1956 г. на научной конференции Общества физико-математических наук Румынской Народной Республики. Кратко изложена история понятия поверхности. Поверхность, кроме своей обычной внешней геометрии, которая изучает форму поверхности, как мы ее видим извне, имеет также свою внутреннюю геометрию, которая изучает присущие ей свойства, не зависящие от пространства, в котором она находится, и не изменяющиеся при ее изгибании. И. К. Парно

1878. **Начальное обучение геометрии. Фрейденталь** (Initierea în geometrie. Freudenthal H.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 2, 96—102 (рум.)

Доклад, прочитанный голландским математиком-педагогом проф. Фрейденталем в Бомбее в 1956 г. на южноазиатском совещании по математическому обучению. Освещается вопрос о современных методах преподавания начального курса геометрии.

После известных работ Т. Эренфест («Сборник упражнений») и Э. Кастельнуово («Наглядная геометрия») самым видным трудом автор считает «Введение в учение об измерении» В. И. Боса и Н. Е. Лепетра. Содержание этого труда подробно излагается и анализируется. Собственные рассуждения над геометрическими чертежами, не сопровождаемыми каким-либо текстом, ученик схематически излагает при помощи немногих символов.

Метод Боса и Лепетра не лишен крупных недостатков. Будучи предназначен в основном для индивидуального обучения, он неприемлем в условиях нашей школы.

Г. И. Глейзер

1879. **Моделирование многогранников. Пурышев М. Н.**, Научн. тр. Одесск. высш. мореходн. уч-ща, 1956, вып. 11, 137—156

Описываются модели многогранников, построенные в лаборатории начертательной геометрии и графики Одесского высшего мореходного училища. Даются фотографии этих моделей.

Примечание референта. В статье имеются несерьезные математические утверждения. Так, на каждой грани полуправильного многогранника строится пирамида, боковые грани которой правильные треугольники, и изучается многогранник, полученный в результате такой надстройки. Если число ребер в основании пирамиды более шести, то высота пирамиды получается мнимой. Весь многогранник автор считает «уходящим частично из пространства Евклида». Н. М. Бескин

1880. **О геометрических параметрах. Билимович** (О геометриским параметрима. Билимовић Антон), Зб. радова. Српска АН, 1957, кн. 55, 59—68 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Отмечается, что курс геометрии в средней школе не использует понятия переменной величины и не отвечает современным требованиям. Предлагается устранить этот недостаток, вводя параметры, определяющие форму, положение и размеры геометрических объектов, изучаемых в школе, и рассматривая эти параметры как переменные величины. Приводятся примеры введения параметров при рассмотрении некоторых вопросов в школьном курсе геометрии. А. Я. Темкин

1881. **О касательном свойстве кругов. Эвальд** (Über eine Berührеigenschfat von Kreisen. Ewald Günther), Math. Ann., 1957, **134**, № 1, 58—61 (нем.)

В предыдущих работах (РЖМат, 1957, 7379, 7380; 1958, 10220) автор предложил систему аксиом геометрии кругов, которая содержала следующую аксиому «о касательном свойстве круга»: Через точку P на круге и одну, не лежащую на круге, точку проходит однозначно определенный второй круг, который имеет с данным только одну общую точку. В настоящей работе автор показывает, что эта аксиома является следствием остальных аксиом.

Делая целый ряд замечаний по поводу приведенной им ранее аксиоматики, автор дает новый вариант системы аксиом геометрии кругов. Кроме того, автор указывает на возможность такого варианта системы аксиом, когда допускаются изотропные круги (ортогональные самим себе), и доказывает теорему: Если существует один изотропный круг, то и каждый круг изотропен и два различные круга тогда и только тогда ортогональны, когда они касаются. В. И. Ведерников

1882. **Об одном утверждении Г. Хайоша. Молнар** (Über eine Vermutung von G. Hajós. Moinár J.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 3-4, 311—314 (нем.)

Обобщается следующая теорема Хелли: Если во множестве односвязных, замкнутых и ограниченных областей евклидовой плоскости пересечение любых двух областей связно, а любые три области имеют общую точку, то и все области множества имеют общую точку. Это предложение, при некоторых дополнительных ограничениях, было распространено автором на сферические поверхности (РЖМат, 1957, 6904). В настоящей статье доказывается высказанное Хайошем обобщение теоремы Хелли на множества элементарных кусков поверхности F, не гомеоморфной сферической. Теорема Рисса о замкнутых множествах дает возможность ограничиться рассмотрением конечных множеств. Доказательство опирается на лемму: Если пересечение любых двух кусков конечного множества K элементарных кусков поверхности F содержит не менее двух точек и связно, а пересечение любых трех кусков не пусто, то объединение всех кусков множества K само является элементарным куском поверхности F. А. Г. Школьник

1883. **К введению исчисления отрезков. Бурде** (Zur Einführung der Streckenrechnung. Burde Gerhard), Math. Ann., 1958, **135**, № 3, 279—282 (нем.)

Излагается способ введения исчисления отрезков в неархимедовой геометрии, отличный от способа, изложенного Гильбертом в «Основаниях геометрии».

Сложение отрезков определяется по Гильберту. Для определения же умножения вводится прямоугольная система координат с началом в точке O. Пусть E—единичная точка на положительной оси OX, E' и E''—положительная и отрицательная единичные точки на оси OY, OA и OB— два отрезка на оси OX. Произведением отрезков $OA=a$ и $OB=b$ автор называет отрезок $OC=(ab)=c$, где C — точка пересечения с осью OY, перпендикуляра через B к прямой AE''.

Все вычислительные законы («аксиомы поля») выводятся непосредственно из теоремы о пересечении трех высот треугольника в одной точке, которая в свою очередь вытекает из аксиом I—IV. Показывается эквивалентность изложенного определения умножения отрезков с определением Гильберта, в котором, как известно, применяется частный случай теоремы Паскаля. Вершинами распадающегося на две прямых (оси координат) конического сечения являются в данном изложении точки: $(1, 0)$, $(a, 0)$, $(b, 0)$, и $(0, a)$, $(0, b)$, $(0, ab)$.

Г. И. Глейзер

1884. Дифференциальные уравнения с приводимым характером. Хаймович (Sisteme diferentiale cu caracter reductibil. Haimovici M.), Comun. Acad. RPR, 1956, **6**, № 8, 975—980 (рум.; рез. русск., франц.)

В своей более ранней работе (РЖМат, 1958, 6076 автор обобщил метод Дарбу интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией двух переменных. Содержащийся там результат автор снова обобщает следующим образом: Пусть (S) — система внешних дифференциальных уравнений, характеры которых

$$s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_{p-1} > 0,\ s_p = 0,$$

предположим, что существует многообразие характеристических плоских элементов E_{p-1} (особых и лежащих на регулярных интегральных E_p), удовлетворяющее системе уравнений $K_\sigma(x,z) = 0$ $(\sigma = 1, \ldots, h \leqslant s_{p-1})$, ни одно из уравнений которого не является следствием системы (S) (левые части предполагаются в виде

$$K(x, z) = K_{i_1 \ldots i_{p-1}}(x)\, z_{i_1} \ldots z_{i_{p-1}}).$$

Если ранг системы $K_\sigma = 0$ равен $p + h - 2$, то его можно выразить при помощи форм Пфаффа $w_1, \ldots, w_{p+h-2}$ образующих полную систему.

Если обозначим через $u_1, \ldots, u_{p+h-2}$ ее первые интегралы, из которых первые $p-1$ считаем независимыми, то подставив $u_p = \varphi_p(u_1, \ldots, u_{p-1}), u_{p+1} = \varphi_{p+1}(u_1, \ldots, u_{p-1}), \ldots, u_{p+h-2}(u_1, \ldots, u_{p-1})$ в данную систему (S), получим новую систему (S') с $p-1$ независимой переменной, характер которой на $h-1$ меньше. Если $h - 1 = s_{p-1}$, то настоящий род системы (S') равен $p - 1$.

J. Klapka

1885 К. Сферическая тригонометрия. Юстинияновић (Sferna trigonometrija. Justinijanović Juraj. Zagreb, «Tehn. knjiga», 1956, 192 s., il.) Bilbliogr. Jugosl., 1957, **8**, № 1, 14 (сербо-хорв.)

1886 К. Дополнения к векторному исчислению. Лакас-Нетту (Complementos sôbre vetores. Lacaz Netto Francisco A. S. Paulo, Liv. Nobel, 1957, 111 p., 90,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1957, **5**, № 5, 242 (порт.)

1887 К. Аналитическая геометрия. Моденов (Geometrie analitică. Modenov P. S. Trad. din limba rusa. Bucureşti, Ed. techn., 1957, 619 p., il., 24.50 lei), Bibliogr. RPR, 1957, **6**, № 20, 721 (рум.)

1888 К. К вопросу о методике изложения аналитической геометрии в высших технических и экономических учебных заведениях. Никитин П. П. М., Госторгиздат, 1958, 20 стр., илл., беспл.

1889 К. Аналитическая геометрия. Конфорто (Geometria analitica. Conforto Fabio. Roma, Ed. ed. r. politecn. ital., 957. 244 p. 28 0 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 677, 535 (итал.)

1890 К. Аналитическая геометрия для приемных экзаменов в инженерные училища. Роша (Geometria analítica; para concursos de habintação as escolas de engenharia. Rocha Luiz Mauro. S. Paulo, Liv. Nobel, 1957, 145 p., 120,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1957, **5**, № 5, 242 (порт.)

1891 К. Руководство по изучению аналитической геометрии. Конспекты и упражнения. Бальдассарри (Guida allo studio della geometria analitica. Sunti ed esercizi. Baldassarri Mario. Padova, Ed. tip. Casa ed. dott. A. Milani, 1957, xiii, 485 p., 4000 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 677, 535 (итал.)

1892 К. Дополнения и упражнения к аналитической геометрии. Конфорто (Complementi ed esercizi di geometria analitica. Conforto Fabio. Ed. editr. politecn. ital., 1957, 284 p., 2600 L.), Bibliogr., ital., 1957, **91**, № 677, 535 (итал.)

1893 К. Аналитическая геометрия. Смит, Гейл, Нилли (Geometria analítica. Smith Percey F., Gale Arthur Sullivan, Neelley John Haven. Trad. do ingl. Rio de Janeiro, Ao livro técnico, 1957, 354 p., il., 300,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1957, **5**, № 5, 242 (порт.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

1894. О геликоидальном движении. Ботез (Despre mişcarea elicoidală. Botez G.), Gaz. mat. si fiz., 1957, **A9**, № 11, 579—582 (рум.)

Пространственная ломаная называется правильной, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) все ее стороны равны; 2) углы, образованные последовательными сторонами, равны; 3) треугольники, образованные двумя последовательными сторонами и отрезком, соединяющим их необщие концы, расположены так, что из трех последовательных треугольников первый и третий лежат по разные стороны плоскости второго треугольника, с которым образуют равные двугранные углы. Доказывается, что около любой правильной пространственной ломаной можно описать круговую винтовую линию. Из всех круговых винтовых линий, проходящих через вершины правильной ломаной, существует одна с наибольшим шагом.

Если двугранные углы, образованные тремя последовательными треугольниками, равны нулю, то правильная ломаная является плоской, а винтовая линия, обращается в описанный около ломаной круг.

Доказывается, что если даны в пространстве два разных положения твердого тела, всегда существует геликоидальное движение, переводящее тело из одного положения в другое. Теорема верна также для сдвига и вращения, рассматриваемых как частные случаи геликоидального движения.

Г. И. Глейзер

1895. Проблема равновесия цилиндров. Барнс (The problem of the balanced cylinder. Barnes Stanley M.), School Sci. and Math., 1958, **58**, № 2, 132—134 (англ.)

Изучается равновесие системы из двух прямых круговых цилиндров, положенных плашмя один на другой. Доказывается, что равновесие будет устойчивым, если радиус верхнего цилиндра меньше радиуса нижнего, и неустойчивым — в противном случае.

Г. И. Кручкович

1896. Критические кривые в сейсмических исследованиях. Хелфенстейн (Critical curves in seismic exploration. Helfenstein H. G.), Math. Mag., 1957, **31**, № 2, 85—90 (англ.)

Пусть $OXYZ$ — прямоугольная система координат такая, что начало O есть точка на земной поверхности, ось OZ направлена вертикально вниз, плоскость XOY совпадает с поверхностью земли. Пусть в точке O произведен взрыв и сейсмические волны отражаются от поверхности D, проходя вышележащие слои со скоростью s. Пусть $T(u, v)$ — время, за которое сейсмические волны возвращаются в точку $(u, v, 0)$ земной поверхности. Тогда поверхность $w = sT = \Omega(u, v)$ называется поверхностью «время — расстояние» S. Поверхности D и S связаны между собой некоторым контактным преобразованием T. Автор ранее показал, как можно определить графически точки поверхности D, зная конечное число точек поверхности S.

Критическими кривыми называются кривые на поверхности S, образ которых при преобразовании T не определяется однозначно. Доказывается, что критическими кривыми являются прямые и конические сечения, определенным образом расположенные. Некоторые дуги проекций критических кривых на плоскость XOY являются «запрещенными» для расположения сейсмографов.

Ю. Е. Пензов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1897. Некоторые соотношения в элементарной математике. Применение геометрии и тригонометрии к выводу алгебраических формул и обратно. Ионеску-Циу (Citeva corelatii în matematici elementare. Relatii algebrice folosind geometria si trigonometria si reciproc. Ionescu-Tiu C.), Gaz. mat. si fiz., 1957, **B8**, № 11, 561—567 (рум.)

Треугольник, вписанный в окружность единичного диаметра ($2R = 1$), названный автором типовым, вполне определяется двумя своими углами A и B. Метрические линейные элементы любого подобного ему треугольника можно найти путем умножения соответствующих элементов типового на коэффициент пропорциональности $2R$. Исходя из известных тригонометрических формул, автор устанавливает ряд алгебраических соотношений, например: $m + n + p > 9mnp$, где m, n, p — положительные числа и $mn + np + pm = 1$.

Из некоторых общеизвестных алгебраических неравенств выводится ряд соотношений между элементами треугольника. Пример: из неравенства $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqslant 6$, где x, y, z — любые положительные числа, выводится соотношение $a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 \geqslant 6Sr$, где a, b, c — стороны, p — периметр, S — площадь, r — радиус вписанного круга треугольника.

Дается способ построения треугольников, у которых все элементы, включая биссектрисы углов, выражаются исключительно в целых числах.

Г. И. Глейзер

1898. Площадь треугольника и детерминант. Питерсен (Area of a triangle and the determinant. Petersen G. M.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 4, 249 (англ.)

Показано, как объяснить в классе, что площадь треугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) равна

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

В. А. Маневич

1899. Новое (?) доказательство известной теоремы. Конте (Dimostrazioni nuove (?) di teoremi noti. Conte Luigi), Sci. giov., 1957—1958, **7**, № 1-2, 8—10 (итал.)

В настоящей заметке автор предлагает новое простое доказательство одного свойства биссектрисы угла треугольника и, опираясь на него, выводит тригонометрическую формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ и одно неравенство Торричелли.

М. П. Черняев

1900. Абстрактно трактуемая тригонометрия. Сойер (Trigonometry abstractly treated. Sawyer W. W.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 734—737 (англ.)

Цель статьи — разъяснить понятия угла, синуса, косинуса без обращения к фигурам. Аналитическая характеристика тригонометрических функций предполагает развертывание бесконечного процесса и использование понятия предела (например, определение арксинуса с помощью интеграла $\int_0^k (1-t^2)^{-1/2}\,dt$), между тем как в школе с понятием угла знакомимся до этого, даже до того, как делается известным радианное измерение.

Указывается на возможность ввести угол алгебраическим путем. Угол определяется установлением равенства дуг, сводящимся к характеристике расстояния между точками. Эта характеристика дается в духе координатной геометрии. Определяются понятия вращения и отражения и на базе этих понятий — соответствующие тригонометрические функции.

Л. П. Гокиели

1901. Середины трех диагоналей четырехугольника коллинеарны. Влахавас (The mid-points of the three diagonals of a quadrilateral are collinear. Vlahavas G. N.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 337, 214 (англ.)

В методической заметке приводится аналитическое (с помощью определителя) доказательство указанного факта.

Г. С. Бархин

1902. Тетраэдры с равными бивысотами. Тебо (Tétraèdre à bihauteurs égales. Thébault V.), Mathesis, 1957, **66**, № 10, 383—385 (франц.)

Автор рассматривает тетраэдр $T \equiv ABCD$, для которого $aa'\sin\alpha = bb'\sin\beta = cc'\sin\gamma$, где a и a', b и b', c и c' — длины противоположных ребер BC и DA, CA и DB, AB и DC, а α, β и γ — углы, составленные соответственно этими противоположными ребрами.

Пусть $Q_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ — четырехугольник, вписанный в тетраэдр $T \equiv ABCD$, стороны которого A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 соответственно перпендикулярны к граням $(A) \equiv BCD$, $(B) \equiv CDA$, $(C) \equiv DAB$, $(D) \equiv ABC$; $Q_2 \equiv A_2C_2D_2B_2$ — четырехугольник, вписанный в тетраэдр T, стороны которого A_2C_2, C_2D_2, D_2B_2 и B_2A_2 соответственно перпендикулярны к граням (A), (C), (D), (B); $Q_3 \equiv A_3D_3B_3C_3$ — четырехугольник, стороны которого A_3D_3, D_3B_3, B_3C_3, C_3A_3 соответственно перпендикулярны к граням (A), (D), (B) и (C). Стороны этих четырехугольников по три равны, а их диагонали равны попарно:

$$A_1B_1 = A_2C_2 = A_3C_3;\quad B_1C_1 = B_2A_2 = B_3C_3;$$

$$C_1D_1 = C_2D_2 = C_3A_3;\quad D_1A_1 = D_2B_2 = D_3B_3;$$

$$A_1C_1 = A_2C_2;\quad B_1D_1 = A_3B_3;\quad A_2D_2 = C_3D_3.$$

Автором доказаны теоремы:

1) Тетраэдры $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$, $T_2 \equiv A_2C_2D_2B_2$, $T_3 \equiv A_3D_3B_3C_3$, вершины которых совпадают с вершинами косых четырехугольников Q_1, Q_2, Q_3, ортогонально вписанных в тетраэдр T, имеющий равные бивысоты, имеют также ребра, три пары из которых равны между собой.

2) Бимедианы E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 относительно ребер A_1C_1 и B_1D_1, A_2D_2 и B_2C_2, A_3B_3 и C_3D_3 тетраэдров T_1, T_2 и T_3 равны между собой, а ребра B_1D_1 и A_1C_1, B_2C_2 и A_2D_2, C_3D_3 и A_3B_3 видны под прямым углом соответственно из точек E_1 и F_1, E_2 и F_2, E_3 и F_3.

3) Срединные (médiateurs) плоскости бимедианы E_iF_i сходятся в первой точке Лемуана K тетраэдра T.

М. П. Черняев

1903. Золотой арбелос. Банков (The golden arbelos. Bankoff Leon), Scripta math., 1955, **21**, № 1, 70—76 (англ.)

Сапожным ножом Архимеда, или арбелосом, называется фигура, ограниченная тремя полуокружностями с центрами O, O_1, O_2 и радиусами r, r_1, r_2, построенными соответственно на отрезках AB, AC, BC ($C \subset AB$) как на диаметрах, по одну сторону от общей линии центров. Приводится ряд теорем, показывающих свойства этой фигуры, например: Центры всех окружностей, касающихся дуг $\cup AB$ и $\cup CB$, лежат на эллипсе, у которого O и O_2 — фокусы, OB — большая ось, а малая полуось равна $\sqrt{rr_2}$.

Если C делит AB в золотом отношении, то сапожный нож Архимеда называется золотым арбелосом и имеет свои отличительные свойства, так как в этом случае окружности, которые рассматриваются при изучении свойств сапожного ножа, принимают особое расположение. В. А. Маневич

1904. Использование конгруэнтности в геометрических доказательствах. Бергман (The use of congruence in geometry proofs. Bergmann Carl), Math. Teacher, 1958, **51**, № 1, 23—25 (англ.)

Даются определения:

1. Если $A,B,C,\ldots,Y,Z$ — различные точки, то многоугольником $\overrightarrow{ABC,\ldots,YZ}$ называется совокупность направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC},\ldots,\overrightarrow{ZA}$, взятых в указанном порядке (упорядоченный многоугольник).

2. Два упорядоченных многоугольника: многоугольник $\overrightarrow{ABC\ldots}$ и многоугольник $\overrightarrow{XYZ\ldots}$ называются конгруэнтными тогда и только тогда, когда

$$AB = XY, \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle XYZ, \quad BC = XZ \text{ и т. д.}$$

На основании этих определений более просто доказываются некоторые известные теоремы. В. А. Маневич

1905. Пропорциональное деление. Финли (Proportional division. Finlay A. H.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 337, 214 (англ.)

Приводится следующий пример пропорционального деления дуг. Пусть C,D — точки трисекции дуги квадранта AOB, G — точка дуги CD, P — точка на радиусе $OG : OG = GP$, E,F — основания перпендикуляров из P на OB и OA; EFG пересекает дугу квадранта в точке H. Тогда H делит AB в том же отношении, как G — дугу CD.

Г. С. Бархин

1906. Неравенства в геометрии сфер и кривых. Боттема (Inequalities in the geometries of spheres and of lines. Bottema O.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 5, 523—531; Indagationes math., 1956, **18**, № 5, 523—531 (англ.)

В евклидовом n-мерном пространстве определено „произведение“ $\sigma_1\sigma_2$ двух гиперсфер σ_1,σ_2, центры которых соединены отрезком s, а радиусы которых обозначены r_1,r_2 как величина $s^2-r_1{}^2-r_2{}^2$. Если заданы $n+2$ гиперсферы σ_i, то определитель $(-1)^{n+1} \mid \sigma_i\sigma_j \mid$, $i,j=1,\ldots,n+2$, является неотрицательным; он равен нулю тогда и только тогда, когда гиперсферы σ_i имеют общую ортогональную гиперсферу. Далее приводится модификация этой теоремы для случая особых (сингулярных) (или же линейно зависимых) гиперсфер σ_i. Если гиперсферы $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n+1}$ линейно независимы, то их общая ортогональная гиперсфера будет действительной, особой, или же мнимой, смотря по тому, будет ли определитель $(-1)^{n+2} \mid \sigma_i\sigma_j \mid$, $i,j=1,\ldots,n+1$, положительным, равным нулю или же отрицательным. Пересечение линейно независимых гиперсфер $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_q$ будет $(n-q+1)$-мерной сферой, если определитель

$$\Delta=(-1)^{q+1} \mid \sigma_i\sigma_j \mid, ij=1,\ldots,q,$$

будет отрицательным; пересечение является одноточечным множеством, когда $\Delta=0$ и, наконец, пересечение является пустым, когда $\Delta>0$. В дальнейших отделах результаты применяются к ориентированным гиперсферам (или гиперциклам). Выведено интересное условие для того, чтобы существовало действительное решение задачи Аполлония в плоскости; в качестве простого следствия получается касеево (Casey) расширение теоремы Птолемея о касательном цикле четырех данных циклов. Последний отдел посвящен приложениям в теории комплексов. V. Havel

1907. Доказательство формулы поверхности и объема цилиндра и конуса без использования призмы и пирамиды. Ла-Барбера (Dimostrazioni delle formule delle aree e dei volumi del cilindro e del cono senza il tramite dei prismi e delle piramidi. La Barbera Alberto), Archimede, 1957, **9**, № 6, 244—248 (итал.)

Предлагается прямой вывод формул поверхности и объема цилиндра и конуса, не опирающиеся на аналогичные формулы для призмы и пирамиды. Заметка имеет методическое значение и может быть использована в школьной практике. М. П. Черняев

1908. Об определении конических сечений. Хафф (On defining conic sections. Huff G. B.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 4, 250—251 (англ.)

Кривую 2-го порядка можно определить через геометрическое место точек или как кривую, получающуюся в сечении прямого кругового конуса подходящим образом выбранной плоскостью.

Дается простое доказательство эквивалентности этих двух определений для параболы. Для доказательства прямой круговой конус пересекают плоскостью, параллельной образующей и перпендикулярной плоскости, проходящей через эту образующую и ось конуса, и вписывают в данный конус сферу, касающуюся плоскости параболы. В. А. Маневич

1909. Отрицательная педаль эллипса относительно фокуса. Локвуд (Negative pedal of the ellipse with respect to a focus. Lockwood E. H.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 338, 254—257 (англ.)

Изучается специальная кривая, связанная с эллипсом следующим образом. Пусть $OA=a$ — большая полуось эллипса и S — лежащий на ней фокус. Проведем окружность радиуса a из центра эллипса, и пусть Y — некоторая точка этой окружности. Соединим Y с фокусом S и проведем из Y перпендикуляр к YS до пересечения с эллипсом в точке P. Из P в свою очередь проведем перпендикуляр к PS до пересечения в точке Q с линией QS, проведенной так, чтобы PS была биссектрисой угла QSY. Если заставить теперь точку Y пробегать всю окружность, то точка Q прочертит замкнутую кривую, симметричную относительно большой оси эллипса и имеющую одну точку самопересечения на этой оси и две точки возврата. Если эксцентриситет эллипса $e=\sqrt{2}/2$, то точка самопересечения этой кривой совпадает со вторым фокусом эллипса.

Автор находит декартово уравнение указанной кривой, принимая фокус эллипса S за начало координат, а большую полуось OA за положительное направление оси x. Оказывается, что линия является алгебраичес-

кой 4-го порядка. Исследуется также ее кривизна и находится эволюта. Г. И. Кручкович

1910 К. Геометрические места на плоскости; свыше 100 задач с решениями. Изд. 2-е (Lugares geométricos planos; com mais de 100 exercícios resolvidos. 2. ed. S. Paulo, Liv. Nobel, 1957, 121 p., il., 100,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1957, **5**, № 5, 242 (порт.)

1911 К. Введение в синтетическую геометрию. Ничe (Uvod u sintetičku geometriju. Ničе Vilko. Zagreb, «Skolska kniiga», 1956, XII, 208 s., il.), Bibliogr. Jugosl., 1957, **8**, № 1, 14 (сербо-хорв.)

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1912. Основания геометрии. Гильберт (Основе геометриае. Хилберт Д., Прев. са 8 нем. изд. Клас. науч. списи. Српска АН, 1957, кн. 14, VIII, 232 s., il.) (сербо-хорв.)

1913. О вписуемом шестиугольнике. До (Sur l'hexagone inscriptible. Deaux R.), Mathesis, 1957, **66**, № 10, 381—382 (франц.)

Опираясь на работы Тебо (РЖМат, 1958, 8166) и Неуберга (Mathesis 1907—66), До обобщил понятие инволюции: Если на уникурсальном носителе две ориентированные тройки элементов одной и той же природы A, B, C и A', B', C' таковы, что одному элементу первой тройки, например A, соответствует гармонически сопряженный элемент A_0 относительно двух элементов другой тройки, отличных от B', C', то будут построены три инволюционные пары A_0A', BB', CC'; т. е. $I_a = (A_0A', AA_0', BB', CC')$ и, аналогично, $I_b = (B_0B', BB_0', CC', AA')$ и $I_c = (C_0C', CC_0', AA', BB')$; До называет тройки элементов A, B, C и A', B', C', находящимися в инволюции.

Используя это определение, он доказал теорему: Если во вписанном в окружность (O) шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ имеет место равенство $(A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6) = (A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_1)$ между произведениями длин сторон нечетного порядка и длин сторон четного порядка, то или в одной точке сходятся главные диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, или этим свойством обладают шестиугольники, получаемые заменой вершин A_i точками A_i', гармонически сопряженными относительно вершин A_{i-1} и A_{i+1}. В первом случае три пары противоположных вершин принадлежат одной инволюции, а во втором две ориентируемые тройки A_1, A_3, A_5 и A_4, A_6, A_2 находятся в инволюции, обобщенной До. М. П. Черняев

1914. Об изгибании винтовых поверхностей в пространстве Лобачевского. Вакарчук Б. С., Научн. ежегодник. Черновицк. ун-т, 1956 (1957), **1**, № 2, 296—297

1915. Асимптоты циссоиды в плоскости Лобачевского. Беляев Н. Г., Научн. ежегодник. Черновицк. ун-т, 1956 (1957), **1**, № 2, 290—291

1916. Дифференциально-геометрические свойства линейчатых поверхностей в пространстве Лобачевского. Вакарчук Б. С., Научн. ежегодник. Черновицк. ун-т, 1956 (1957), **1**, № 2, 294—296

Линейчатая поверхность в пространстве Лобачевского задается с помощью параметрического уравнения текущей образующей в вейерштрассовых координатах. Приводятся необходимые и достаточные условия неизменности касательной плоскости вдоль образующей, эквивалентные равенству относительной полной кривизны нулю. Отмечаются отдельные типы развертывающихся поверхностей, связанные с характером ребра возврата и образующих.

Приведенные результаты для поверхности касательных и цилиндрической поверхности с расходящимися образующими тривиальны. В случае цилиндрической поверхности с образующими, параллельными в определенном направлении, используется признак автора параллельности прямых в пространстве Лобачевского. Доказательства не приводятся. Г. С. Бархин

1917. Построение в пространстве коллинеаций, переводящих некоторые линейчатые поверхности в самих себя. Анисимова Е. П., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1957, **57**, 153—156

Из множества конических сечений некоторой плоскости η выделяется и взаимно однозначно отображается в трехмерное пространство определенная линейная система S_3 третьей ступени с одной базисной точкой. При этом множество распавшихся конических сечений системы преобразуется в линейчатую поверхность F^3 третьего порядка. Коллинеация σ плоскости η, преобразующая S_3 в себя, порождает коллинеацию Σ пространства, преобразующую F^3 в себя. Аналогичное построение, проведенное для системы S_3 с двумя базисными точками, приводит, вследствие распадения F^3 на линейчатую поверхность F^2 второго порядка и плоскость, к построению коллинеации, преобразующей F^2 в себя.

Е. Г. Гонин

1918. Проективная теория инвариантов полярных систем и их основных образов в свете грассманова исчисления точек. Лотце (Die projektive Invariantentheorie von Polarsystemen und ihren Kerngebilden im Lichte der Graßmannschen Punktrechnung. Lotze Alfred), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, **60**, № 2, 77—89 (нем.)

Для n-мерного проективного пространства пусть P — оператор корреляции, x — аналитическая точка („величина 1-й ступени"); тогда Px — „величина $(n-1)$-й ступени". Для r корреляторов P_l выражение

$$Y = \sum_{(i,k,\ldots,l)} P_i x_1 \cdot P_k x_2 \ldots P_l x_r,$$

где суммирование ведется по сочетаниям из $n+1$ по r, а точки означают внешнее умножение, определяет линейную функцию от P и x, симметричную относительно P_l и антисимметричную относительно x_k. Ее коэффициенты определяют коррелятор $\{P_1 \ldots P_r\}$ в грассмановом пространстве „величин r-й ступени" (соответствуют r-векторам тензорного исчисления). $\{P_1 \ldots P_r\}$ называется относительным или свернутым произведением корреляторов P_l. В частности, можно рассматривать относительные произведения, у которых несколько или все сомножители совпадают. Уравнение

$$X\{P_1 \ldots P_r\}X = 0,$$

где X — величина r-й ступени, определяет „основной образ" произведения $\{P_1 \ldots P_r\}$.

Выясняется геометрический смысл основного образа, а для $n = r$ — смысл обращения в нуль относительного произведения для случаев, когда P_l — поляритеты в 2- и 3-мерном пространстве ($n = 3,4$). Получаются геометрические коварианты систем кривых 2-го порядка или квадрик, а для $n = r$ — условия их специального расположения. Все они были ранее известны, кроме одного: плоскости ξ, удовлетворяющие условию $\xi\{P_1P_2P_3\}\xi = 0$, пересекают три квадрики $xP_1x = 0$, $xP_2x = 0$, $xP_3x = 0$ по трем кривым 2-го порядка, каждая из которых аполярна к гармонической кривой Штаудта, определяемой двумя другими (Гармоническая кривая двух кривых $xP_1x = 0$, $xP_2x = 0$ на плоскости есть огибающая семейства прямых ξ, пересекающих данные кривые в гармонически расположенных парах точек, и определяется тангенциальным уравнением $\xi\{P_1P_2\}\xi = 0$).

М. В. Васильева

1919. О коллинеациях симметрических конфигураций. Паркер (On collineations of symmetric designs.

Parker E. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 350—351 (англ.)

Исследуются коллинеации (v, k, λ)-систем (РЖМат, 1956, 4070). Отметим результаты: 1. Любая коллинеация переставляет точки и прямые таким образом, что существует взаимно однозначное соответствие между циклами точек и циклами прямых, причем соответствующие циклы имеют одинаковую длину. 2. Для любой группы коллинеаций число систем транзитивности (см., например, Курош А. Г., Теория групп, М. — Л., 1944, стр. 99) на множестве точек совпадает с числом систем транзитивности прямых (неподвижная точка или прямая считаются системой транзитивности).

Л. А. Скорняков

1920. Коллинеации и обобщенные матрицы инцидентности. Хьюз (Collineations and generalized incidence matrices. Hughes D. R.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 284—296 (англ.)

Исследуются (v, k, λ)-системы (РЖМат, 1956, 4070). Доказывается, что число систем транзитивности на множестве точек совпадает с числом систем транзитивности на множестве прямых для любой группы коллинеаций. Этот результат был получен также Паркером (реф. 1919). Группа коллинеаций называется стандартной, если все ее коллинеации оставляют неподвижными одни и те же точки и прямые. Используя теорию Хассе-Минковского об эквивалентности квадратичных форм над рациональным полем (в частности, символ Гильберта), автор доказывает, что (v, k, λ)-система допускает стандартную группу коллинеаций G порядка m, если N точек этой системы остаются неподвижными при всех коллинеациях из G и если уравнение $x^2 = ny^2 + (-1)^{\varepsilon} m^{N-1} \lambda z^2$, где $n = k - \lambda$, $t = (v - N)/m$, $\varepsilon = (t + N - 1)/2$, обладает нетривиальным целочисленным решением. Этот результат позволяет доказать несуществование некоторых конечных проективных плоскостей.

Л. А. Скорняков

1921. Конформная плоскость над полем из трех элементов. Валетт (Le plan conforme sur le corps à trois éléments. Valette Guy), Mathesis, 1957, 66, № 7-9, 269—283 (франц.)

Сначала дается проективная классификация поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве над полем $GF(3)$. Особое внимание уделено поверхности $x_1^2 + x_2^2 - x_0 x_3 = 0$, которая и считается конформной плоскостью над $GF(3)$. Она содержит 10 точек. Плоские сечения конформной плоскости называются окружностями. Исследуется взаимное расположение двух окружностей. Группа проективных преобразований, оставляющих на месте конформную плоскость, называется конформной группой. Она оказывается изоморфной группе проективных преобразований прямой над $GF(9)$. Преобразования конформной группы классифицируются по числу неподвижных точек.

Л. А. Скорняков

1922. О проблеме полных k-дуг в S_{2q} ($q = p^t$, p — нечетное простое число). Ломбардо-Радиче (Sul problema dei k-archi completi in S_{2q}. ($q = p^t$, p-primo dispari). Lombardo-Radice Lucio), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 178—181 (итал.)

В линейной (или проективной) плоскости $S_{2,q}$ над конечным полем, содержащим $q = p^t$ элементов ($p \neq 2$), называем k-дугой множество k точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, а полной k-дугой называем такую k-дугу, которая не содержится ни в какой l-дуге для $l > k$. Сегре (РЖМат, 1957, 8231) поставил вопрос (специализированный здесь для плоскости), для каких k существуют полные k-дуги в $S_{2,q}$ и, далее, для каких k ($\leqslant q$) любая k-дуга в $S_{2,q}$ лежит целиком на коническом сечении.

Автор показывает, что в $S_{2,q}$ ($q \geqslant 7$) существуют $\frac{1}{2}(q+5)$-дуги, не лежащие на коническом сечении, и для $q \equiv 3 \bmod 4$ находит полную $\frac{1}{2}(q+5)$-дугу. M. Fiedler

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1923. Об одном способе в графостатике системы сил на плоскости. Авалишвили В. И., Сакартвелос политекникури институти. Шромеби, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 9 (57), 13—19 (рез. груз.)

1924. Метод наивыгоднейшего проектирования и родственное соответствие двух совмещенных плоскостей. Скрипов Л. С., Изв. Томского политехн. ин-та, 1956, 88, 260—271

В статье на ряде примеров рассматривается применение двух способов решения задач начертательной геометрии. Первый способ, названный автором «методом наивыгоднейшего проектирования», состоит в ортогональном проектировании на специально выбранную плоскость. При этом иногда достигается упрощение решения задачи на чертеже.

Второй способ — «родственное соответствие» — применяется автором либо совместно с первым, либо как самостоятельный.

Примеры, рассмотренные автором, приводят его к выводу, что в отдельных случаях могут быть с пользой применены оба указанных способа. Н. Ф. Четверухин

1925. К вопросу о построении прямоугольной аксонометрии. Альтшулер И. С., Сб. научн. работ Белорусск. лесотехн. ин-та, 1958, вып. 9, 291—298

Приводится таблица показателей искажения по аксонометрическим осям и углов между осями для ряда прямоугольных аксонометрических проекций, не предусмотренных ГОСТом для машиностроительного черчения. Новых теоретических результатов статья не содержит.

Б. Н. Саморуков

1926. К вопросу о построении косоугольной фронтальной аксонометрии. Зайденварг М. А., Тр. Харьковск. авиац. ин-та, 1955, вып. 16, 67—78

Статья посвящена некоторым частным задачам, полезным для упрощения построений косоугольной фронтальной аксонометрии. Так, автор выводит формулы, позволяющие определить размеры осей эллипсов, являющихся проекциями окружностей, когда последние расположены в горизонтальных и профильных плоскостях. При помощи этих формул составлены таблицы расчета осей эллипсов при различных значениях угла наклона непараллельной плоскости проекций оси координат и показателя искажений для нее.

В конце работы рассматривается задача построения очертания шара в косоугольной проекции.

Н. Ф. Четвертухин

1927. К доказательству теоремы о существовании несоизмеримых отрезков. Мацкин М. С., Уч. зап. Глазовск. Гос. пед. ин-та, 1956, вып. 3, 94—99

В методической заметке предлагается один из вариантов доказательства существования несоизмеримых отрезков без использования алгоритма Евклида для преподавания в 8 классе средней школы. Г. С. Бархин

1928. Об одной закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины. Филиппов П. В., Зап. Ленингр., горн. ин-та, 1956, 33, № 3, 213—239

Рассматривается геометрическая схема проектирования точки пространства из двух центров проекций S и S_1, при неизменных картинной и предметной плоскостях. Указывается способ перехода от перспективы с центром S к перспективе с центром S_1. Затем описывается постро-

ение центральной проекции точки на плоскость, произвольно расположенную относительно прямоугольной системы координат. Дано решение этой задачи на комплексном чертеже. Рассмотрены некоторые частные случаи, полезные для практики.

Последний раздел работы посвящен вопросу о переходе от одного центра проекций к другому в связи с практической необходимостью выбрать удачную точку зрения для построения перспективы архитектурного сооружения. В схеме, мало отличающейся от так называемого «метода архитекторов», применяются построения, указанные в первой части работы. Это позволяет получить новую перспективу, не производя всех построений вторично. Статья заканчивается рассмотрением способов улучшения перспектив плоских фигур, если такие перспективы оказываются недостаточно наглядными (или, как их называют, «смятыми»). Н. Ф. Четверухин

1929. Об основных теоремах многомерной центральной аксонометрии. Гавел (O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie. Havel Václav), Mat.-fys. časop., 1957, **7**, № 2, 94—107 (чешск.; рез. русск., нем.)

Автор занимается разложением данного особого (сингулярного) отображения λ между двумя дезарговыми конфигурациями на проектирование и на аффинное соответствие с наперед заданным модулем (под дезарговой конфигурацией разумеется n троек различных точек O, A_i B_i, причем точки каждой тройки лежат на одной прямой; $t = 1, 2, \ldots, n$). В случае неаффинного отображения λ такое разложение всегда возможно, в случае же аффинного отображения — может не существовать. Таким образом, автор обобщает результаты Н. М. Бескина, И. С. Джапаридзе и Штифеля (E. Stiefel).

Доказана следующая теорема: $(n-1)$-мерная дезаргова конфигурация D является проекцией конфигурации (также, очевидно, дезарговой), состоящей из начала, единичных и несобственных точек осей прямоугольной системы координат, только тогда, когда определенное, присоединенное к D квадратное многообразие является мнимой сферой.

И здесь встречаемся с обобщением ранее решаемого вопроса (Э. Круппа, Н. Ф. Четверухин и Н. М. Бескин; см. Вопросы современной начертательной геометрии, М.—Л., 1947, 55—125). J. Klapka.

1930 К. Лекции по начертательной геометрии. Штрубеккер (Vorlesungen über darstellende Geometrie. Strubecker Karl. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1957 (1958), IX, 324 S., 16.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, **A**, № 49, 3376 (нем.)

1931 К. Начертательная геометрия. Али (Geometria descritiva. 4 ed. Aly Oswaldo. S. Paulo, Liv. Nobel, 1957, 212 p., il., 150,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil. 1957, 5, № 5, 242 (порт.)

1932 К. Пособие по выполнению графических работ (эпюр) по курсу начертательной геометрии. Изд. 2-е, испр. и доп. Баскаков В. С. Ленингр. политехн. ин-т. Л., 1958, 77 стр., илл.

1933 К. Вертикальное проектирование на одну плоскость проектирования и его применение. Введение в изучение начертательной геометрии для 1-го курса горного факультета, металлургического факультета и факультета тяжелого машиностроения Высших технических училищ. Речичар (Kolmé premietanie na jednu primetňu a jeho aplikàcie. Uvod do štúdia deskriptívnej geometrie pre 1. ročník Banickej fakulty. Hutnickej fakulty a Fakulty t'ažkého srojárenstva VŠT. Rečičár Karol. Bratislava, Slovenske vyd-vo techn. literatúry, 1956, 209 S., il.) (словацк.)

1934 Д. Сопряженные проекции (центральные и параллельные) и применение их к изображению и расчету состава многокомпонентных систем. Сапаров В. Е. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета, Л. 1958

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1935. К теории нормальной кривой четырехмерного пространства. Свобода (Příspěvek k teorii normální křivky čtyrrozměrného prostoru. Svoboda Karel), Čas. pro pěst. mat., 1957, **82**, № 3, 301—307 (чешск.; рез. русск., франц.)

Изучается рациональная нормальная кривая C четвертой степени в проективном четырехмерном пространстве, главным образом в связи с кубической гиперповерхностью J, двойной кривой которой является именно кривая C. Автор исходит из свойств, установленных для этих объектов Теллингом (Telling H. G., The rational quartic curve in space of three and four dimensions, Cambridge University Press, London, 1936). Затем он продолжает изучать их при помощи отображений, которыми в 1947 г. занимался Уокерлинг (Wakerling R. K., Duke Math. J., 1947, **14**). Поверхность J образована бисекантами кривой C (бинарными прямыми); кроме этих кривых, она еще содержит так называемые одинарные прямые (т. е. направляющие прямые квадратичных инволюций на C). Соответствие Уокерлинга осуществляется посредством касательных определенного конического сечения K в фиксированной соприкасающейся плоскости кривой C — отображение бисекант кривой C на точки упомянутой плоскости. Полярность относительно конического сечения K в плоскости этого сечения послужила автору исходным пунктом при выводе новых свойств и соотношений между бинарными и одинарными прямыми гиперповерхности J и неразвертывающихся кубических поверхностей на гиперповерхности J. Z. Nádeník

1936. Кубическая инверсия. Черч (Cubic inversion. Church Elsie T.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 727—729 (англ.)

В качестве базы инверсии рассматривается кубическая кривая $F \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0$. Начало помещается в точку $A_3(0, 0, 1)$. Точка $P(x_1, x_2, x_3)$, инверсная данной точке $P'(x_1', x_2', x_3')$, лежит на пересечении прямой, проходящей через точки A_3 и P', и поляры точки P' относительно базовой кривой. Уравнения кубической инверсии:

$$x_1 : x_2 : x_3 = f_1 : f_2 : f_3, \qquad (1)$$

где

$$f_1 = \lambda x_1'^2 x_2' + x_1' x_3'^2,$$

$$f_2 = \lambda x_1' x_2'^2 - x_2' x_3'^2, \qquad (2)$$

$$f_3 = x_1'^3 + x_2'^3 - 2\lambda x_1' x_2' x_3'.$$

Кривые $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ имеют 7 общих точек (Church E. T., Amer. Math. Monthly, 1952, **59**, 314).

При преобразовании точки базовой кривой переходят сами в себя. Точки A_1 (1, 0, 0) и A_2 (0, 1, 0) преобразуются в A_3; точка, инверсная A_3, не определена. В общем случае прямая преобразуется в кубическую кривую, проходящую через A_3; прямая, проходящая через A_3, преобразуется в вырожденную кубическую кривую, распадающуюся на прямую, проходящую через A_3, и коническое сечение. Вообще кривая n-го порядка (не проходящая через A_3) преобразуется при кубической инверсии в кривую $3n$-го порядка, проходящую через 7 базовых точек; при этом $3n$ точек остаются инвариантными. А. Г. Школьник

1937. Уравнение 27 прямых общей кубической поверхности над конечным полем. —Заметка 1). Розати L'eguazione delle 27 rette della superficie cublica generale in un corpo finito. Nota 1. Rosati Luigi Antonio), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 612—626 (итал., рез. англ.)

Известно, что над некоторым расширением поля Галуа $GF(q)$ нечетной характеристики общая поверхность третьей степени содержит 27 прямых и имеет 45 трикасательных плоскостей. Автор показывает, что уравнения над $GF(q)$, определяющие эти 27 прямых и 45 плоскостей, приводимы. Исследуя различные возможности, он устанавливает 20 возможных типов распадения уравнения 27 прямых на неприводимые компоненты (основание означает степень множителя, а показатель — число множителей данной степени в разложении): 1^{27}, $1^{15}\cdot 2^{1}$, $1^{9}\cdot 3^{6}$, $1^{7}\cdot 2^{10}$, $1^{5}\cdot 2\cdot 4^{5}$, $1^{3}\cdot 2^{12}$, $1^{3}\cdot 2^{3}\cdot 3^{4}\cdot 6$, $1^{2}\cdot 5^{5}$, $1\cdot 2^{3}\cdot 4^{5}$, $1\cdot 2^{4}\cdot 3^{2}\cdot 6^{2}$, $2\cdot 5^{3}\cdot 10$, 3^{9}, $3^{5}\cdot 6^{2}$, $3\cdot 6^{4}$, $1\cdot 2\cdot 8^{3}$, $1^{3}\cdot 4^{6}$, $1^{3}\cdot 2^{3}\cdot 6^{3}$, $3\cdot 12^{2}$, $1\cdot 4^{2}\cdot 6\cdot 12$, 9^{3} (впрочем, референт не нашел в статье соображений, оправдывающих появление типов 15—19). Отсюда вытекает, что минимальная степень расширения $GF(q)$, в котором поверхность содержит 27 прямых, не выше 12. Автор указывает, что возможности 1—17 действительно реализуются; возможность реализации остальных типов остается неясной.

В. В. Морозов

1938. Многообразие в S_{19}, полученное из алгебраической поверхности в комплексном S_3 с помощью продолжения, основанного на алгебре 5-го порядка. Спампинато (La varietà dell'S_{19} determinata da una superficie algebrica della'S_3 complesso prolungata in un'algebra del 5° ordine. Spampinato Nicoló), Giorn. mat. Battaglini, 1957, **85**, № 1, 31—40 (итал.)

Если данную алгебраическую поверхность в комплексном пространстве S_3 продолжить в гиперкомлексное S_3, связанное с заданной алгеброй гиперкомплексных чисел, то получим гиперкомплексную поверхность, для которой автор считает интересным изучение ее комплексного представления. Если взять алгебру n-го порядка, то задача будет состоять в изучении в комплексном S_r, где $r = 4n - 1$, алгебраического многообразия, изображаемого системой n алгебраических уравнений, которая в комплексной области эквивалентна гиперкомплексному уравнению упомянутой гиперкомплексной поверхности. Тип такой системы, разумеется, будет зависеть от таблицы умножения и единиц выбранной алгебры.

В данной статье автор изучает систему пяти уравнений с 20 переменными (полученную в частной, им выбранной, алгебре 5-го порядка) и то алгебраическое многообразие в S_{19}, которое изображается этой системой.

В проективном комплексном S_{19} вводится система 20 однородных координат:

$$x_1y_1z_1t_1q_1;\ x_2y_2z_2t_2q_2;\ x_3y_3z_3t_3q_3;\ x_4y_4z_4t_4q_4$$

и пять независимых пространств:

$S_3(x_j)$,	определяемое уравнениями	$y_j = z_j = t_j = q_j = 0$
$S'_3(y_j)$,	" "	$x_j = z_j = t_j = q_j = 0$,
$S''_3(z_j)$,	" "	$x_j = y_j = t_j = q_j = 0$,
$S^*_3(t_j)$,	" "	$x_j = y_j = z_j = q_j = 0$,
$S^{**}_3(q_j)$,	" "	$x_j = y_j = z_j = t_j = 0$,

Пусть в $S_3(x_j)$ дана алгебраическая неприводимая поверхность S^n уравнением

$$\text{I.}\qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

рассмотрим в S_{19} многообразие, изображаемое системой уравнений, которая получается присоединением к I еще четырех уравнений:

$$\text{II.}\qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j = 0,$$

$$\text{III.}\qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} z_j + \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i\right)^2 = 0,$$

$$\text{IV.}\qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} t_j = 0,$$

$$\text{V.}\qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} q_j + \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} t_j\right)^2 = 0.$$

В $S_3(x_j)$ точку будем обозначать через A и через A', A'', A^*, A^{**}— точки в соответствующих $S'_3(y_j)$, $S''_3(z_j)$, $S^*_3(t_j)$, $S^{**}_3(q_j)$, имеющие те же координаты, что и точка A. В S_{19} обозначим через $S_{15} = (S'_3, S''_3, S^*_3, S^{**}_3)$ и через $S_{16}(A)$ пространство, соединяющее точку A и $S_3(x_j)$ с точками S_{15}. Обозначим через ρa_j координаты A, тогда за координаты в $S_{16}(A)$ можно принять 17 переменных $(\rho,\ y_j,\ z_j,\ t_j,\ q_j)$. Автор доказывает предложения: а) для $n>2$ пространство S_{15} всегда принадлежит многообразию, определяемому системой I, II, III, IV, V, б) если A не принадлежит S^n, то в $S_{16}(A)$ нет точек указанного многообразия, кроме точек S_{15}, которые определяются условием $\rho=0$. Простой точке A фиксированной поверхности s^n соответствует многообразие $V^4_{12}(A)$ в $S_{14}(A) = AS''_3\,S^{**}_3\pi'$, π^*, изображаемое уравнениями

$$\sum \frac{\partial f}{\partial a_i} y_i = 0,\quad \rho\sum \frac{\partial f}{\partial a_i} z_i + \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_i} y_i\right)^{(2)} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial f}{\partial a_i} t_i = 0,\quad \rho\sum \frac{\partial f}{\partial a_i} q_i + \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_i} t_i\right)^{(2)} = 0$$

и принадлежащее многообразию, определяемому системой (I, II, III, IV, V); здесь π' — касательная плоскость в точке A' к поверхности $(S')^n$ и π^* — касательная плоскость в точке A^* к поверхности $(S^*)^n$.

Перемещая точки A среди простых точек поверхности s^n, мы получим ∞^2 многообразий $V^4_{12}(A)$, которые принадлежат $W_{14\eta}$ пространства S_{19}; $W_{14\eta}$ принадлежит многообразию, определяемому системой (I, II, III, IV, V).

Соответственно двойной точке A поверхности s^n в многообразии (I, II, III, IV, V) получим V^4_{14}, содержащее четырехкратно $S_8 = AS''_3\,S^{**}_3$; если A — двойная бипланарная точка, то такое V^4_{14} разлагается на четыре различных S_{14}; если A—двойная унипланарная, то имеем четыре совпавших S_{14}. Если точка A принадлежит s^n с кратностью >2, то в точке A тождественно пропадают первые и вторые производные формы $f(x_j)$, тем самым тождественно удовлетворяются те пять уравнений, которые определяют пересечение $S_{16}(A)$ и многообразие (I, II, III, IV, V).

$V^4_{14}(A)$, принадлежащее $S_{16}(A)$ (для простой точки A), пересекается с S_{15} по четырем S_{11}, которые получаются, если проектировать из S''_7 (соединяющего S''_3 и S^{**}_3) четыре S_3, соединяющих четыре пары прямых: (r', r^*), (r', l^*), (l', r^*), (l', l^*), выходящих соответственно из A' и A^* и принадлежащих (при $n=2$) или оскулирующих (при $n>2$) соответственно $(s')^n$ и $(s^*)^n$.

Меняя A на s^n и одновременно A' на $(s')^*$ и A^* на $(s^*)^n$, мы получим в S'_7 многообразие V'_5, образованное ∞^2 четверок S_3 и в S'_{15} многообразие V'_{13}, образованное ∞^2 четверок S_{11}, проходящих через S''_7. Чтобы определить порядок $W_{14}\eta$, следует определить V'_{13}, а порядок последней определяется через порядок V'_5 многообразия S'_7.

При $n>2$ через каждую точку P' многообразия S'_3 проходит конечное число h из тех ∞^2 прямых, которые оскулируют $(s')^n$, и каждая из таких прямых принадлежит четырем S_3, которые образуют V'_5; поэтому каждая точка P' пространства S'_3 принадлежит V'_5 с кратностью $4h$. Аналогично, каждая точка S^*_3 принадлежит V'_5 с тою же кратностью $4h$; число h будет также порядком конгруэнции прямых, которые оскулируют данную поверхность s^n в $S_3(x_l)$. Назовем линейчатой поверхность R^* совокупность прямых r^*, оскулирующих $(s^*)^n$ и опирающихся на прямую a^*; пусть порядок R^* будет h_1.

Опираясь на эти образы автор показывает, что V'_5 имеет порядок $5h+h_1$; отсюда далее он получает, что порядок многообразия $W_{14}\eta$, образованного ∞^2 многообразий $V^4_{12}(A)$, равен $\eta=4n+5h+h_1+h_\pi$, где h_π есть порядок линейчатой поверхности, образованной прямыми, оскулирующими s^n и инцидентными общему плоскому сечению c^n поверхности s^n; даются и другие выражения для η. С. С. Бюшгенс

1939. Об алгебраических формах с неопределенным гессианом в S_4. Франкетта (Sulle forme algebriche di S_4 aventi l'hessiana indeterminata. Franchetta Alfredo), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1-2, 252—257 (итал.)

Показывается, что если F—прималь порядка $n>2$ в S_4 с тождественно исчезающим гессианом и не являющаяся конусом, то на ней существует семейство ∞^1 плоскостей, касательных к некоторой плоской рациональной кривой C порядка >1, причем плоскости этого семейства, лежащие в одном и том же трехмерном пространстве, проходящем через C, касаются C в одной и той же точке; обратно, прималь в S_4, обладающая этим свойством, имеет тождественно исчезающий гессиан. Указывается геометрический способ построения таких прималей. В. В. Морозов

1940. О некоторых формах с неопределенным гессианом. Пермутти (Su certe forme a hessiana indeterminata. Permutti Rodolfo), Ricerche mat., 1957, **6**, № 1, 3—10 (итал.)

Основываясь на мемуаре Гордана и Нётера (Math. Ann., 1876, **10**, 547—568), автор показывает, что уравнение (не конической) примали с неопределенным гессианом в S_4 приводится к виду $\varphi(x_1, x_2, R_1x_3+R_2x_4+R_3x_5)=0$, где R_l — однородные полиномы одной и той же степени от неопределенных x_1, x_2, а φ — полином от своих аргументов, однородный относительно $x_1, \ldots, x_5$. Исходя из этого результата, он воспроизводит результаты Франкетты (реф. 1939). Аналогично, для произвольного $r\geqslant 4$ прималь в S_r, заданная уравнением $\varphi(x_1, x_2, x_3R_1+\ldots+x_{r+1}R_{r-1})=0$, где R_l — формы одной и той же степени от неопределенных x_1, x_2 (в статье опечатка: от неопределенных $x_1, \ldots, x_{r+1}$), а φ — полином от своих аргументов, однородный относительно $x_1, \ldots, x_{r+1}$, имеет неопределенный гессиан. Отсюда следует, что все примали в S_r, содержащие семейство ∞^1 пространств S_{r-2}, касательных к унирациональному многообразию V порядка >1, расположенному в некотором $\overline{S}_{r-2}$ и обладающих тем свойством, что все S_{r-2} этого семейства, лежащие в одном и том же S_{r-1}, содержащем $\overline{S}_{r-2}$, касаются V в одной и той же точке, будет иметь неопределенный гессиан. Обратная теорема, видимо, не имеет места. В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1941. Определение дифференциального типа кривой в пространстве двух, трех или четырех измерений. Чех (Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions. Čech Eduard), Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 4, 599—631 (франц.; рез. русск.)

Кривая $C(X=X(t))$ в E_n является регулярной, если для нее имеют место формулы Френе $X'=K_0e_1$, $e'_1=K_1e_2$, $e'_2=-K_1e_1+K_2e_3$, $\ldots$, $e'_n=-K_{n-1}e_{n-1}$, где K_l непрерывны. Пусть T_i означает i — соприкасающееся пространство кривой C (в некоторой точке); тогда дифференциальным классом этой кривой является последовательность $(\mathrm{cl}X, \mathrm{cl}T_1, \ldots, \mathrm{cl}T_{n-1})$, где $\mathrm{cl}T_i$ есть дифференциальный класс T_i. Введены параметры $s=\int K_0dt$, $\sigma_l=\int K_idt$, $\mathrm{cl}X$ (или же $\mathrm{cl}T_l$) имеет максимум при значении параметра $t=s$ (или же $t=\sigma_i$); исключен тривиальный случай, когда одно, а затем необходимо и все числа дифференциального класса равны ∞. Для $n=2, 3, 4$ определен класс кривой; если заданы дифференциальные классы $r_l=\mathrm{cl}K_l$, то для $n=2$ могут представиться три случая:

$$1)\ r_0\geqslant r_1+1 : \mathrm{cl}X=\mathrm{cl}T_1+1=r_1+2;\ 2)\ r_1\geqq r_0+1 : \mathrm{cl}X+1=\mathrm{cl}T_1=r_0+2;\ 3)\ r_0=r_1 : \mathrm{cl}X=\mathrm{cl}T_1=r_0+1.$$

Дифференциальным типом кривой называется совокупность дифференциальных классов, соответствующих параметрам $t=s, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$; эти типы определены в случае $n=2, 3, 4$. Для $n=3$ $(n=4)$ существует 6(41) различных типов. A. Švec

1942. Локально конструируемый класс поверхностей. Булиган (Une classe de surfaces localement constructibles. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 17, 2212—2214 (франц.)

Пусть заданы две функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ в выпуклой замкнутой области α плоскости $z=0$ такие, что каждое из неравенств $z\geqslant f(x, y)$, $z\geqslant g(x, y)$ определяет выпуклую область в пространстве.

Рассматриваются поверхности $z=af(x, y)+bg(x, y)$, где a, b—постоянные. Если $ab>0$, эти поверхности выпуклы. Если $ab<0$, они представляют собой место середин отрезков, параллельных оси z, имеющих своими концами точки поверхностей $z=2af$, $z=2bg$. Для этих поверхностей ставится ряд вопросов, которые, однако, в данной заметке не решаются. Я. П. Бланк

1943. Вывод общего дифференциального уравнения геодезической линии для любой системы координат на поверхности. Шеллинг (Eine Herleitung der totalen Differentialgleichung der geodätischen Kurve für beliebige Koordinatensysteme einer Fläche. Schelling G.), Z. Vermessungswesen, 1954, **79**, № 12, 404—405 (нем.)

Используя метод, примененный Христовым для вывода дифференциального уравнения геодезической линии в ортогональной системе координат (Hristow Wl. K., Z. Vermessungswesen, 1949), автор получил это уравнение в общем случае любой системы координат на поверхности, заданной параметрически, в виде

$$d\theta=-\frac{1}{2\Delta E}\{(2EF_u-EE_v-FE_u)du+(EG_u-FE_v)dv\}.$$

Здесь $d\theta$ — изменение азимута геодезической линии относительно координатных линий $v=\mathrm{const}$, E, F, G — функции параметров u, v, составляющие коэффициенты первой дифференциальной формы Гаусса; индексы обозначают частные производные этих функций по параметрам; $\Delta^2=EG-F^2$. Л. П. Пеллинен

1944. О векторных полях, присоединенных к линейчатому комплексу. Кованцов Н. И., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 1, 37—58 (рез. франц.)

На каждом луче комплекса задается точка M — центр векторного поля и орт l_3 — вектор поля, совпадающий по направлению с лучом комплекса. Рассматриваются всевозможные векторные поля, присоединенные указанным образом к комплексу.

Вводится нормальная кривизна кривой в данном поле: $k = \frac{dMdl_3}{dM^2}$. Строится поверхность второго порядка — индикатриса Дюпена рассматриваемого поля. Вычисляется полная кривизна поля $K = k_1 k_2 k_3$ и средняя кривизна $H = k_1 + k_2 + k_3$, где k_i — главные кривизны поля. Только у векторного поля, центр которого совпадает с центром луча комплекса, полная кривизна тождественно равна нулю.

Любой комплекс может быть расслоен на однопараметрическое множество нормальных конгруэнций. Множество расслоений определяется произвольной функцией двух аргументов. Если поверхности, ортогональные к нормальным конгруэнциям, имеют постоянную кривизну K, расслоение осуществляется либо не более чем четырьмя способами, либо бесконечным числом способов. Последний случай при $K \neq 0$ приводит к специальному линейному комплексу, а расслоение осуществляется с произволом одной функции одного аргумента. При $K = 0$ комплекс представляет собою совокупность пучков параллельных прямых, проведенных в фокальных плоскостях произвольной конгруэнции. Если поверхности, ортогональные нормальным конгруэнциям, — минимальные, то расслоение возможно либо не более чем двумя способами, либо бесконечным числом способов. Единственным комплексом, центральное поле которого допускает расслоение в минимальные поверхности, ортогональные к лучам комплекса, является линейный комплекс. Максимальное число расслоений в однопараметрические семейства поверхностей Ламе характеризует специальный комплекс. Множество расслоений зависит от одной функции двух аргументов. Для линейного комплекса множество расслоений определяется двумя функциями одного аргумента. Рассматриваются комплексы, к которым присоединены векторные поля, центральными линиями которых служат окружности. Я. П. Бланк

1945. Новое свойство сетей и поверхностей E Картана. Маркус (Une nouvelle caractérisation des réseaux et surfaces E de Cartan. Marcus F.), Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 2, 308—313 (франц.; рез. русс.)

Поверхности E были введены в 1944 г. Е. Картаном как поверхности, допускающие сопряженную сеть (сеть E) с точечными h, k и тангенциальными $\bar{h}$, $\bar{k}$ инвариантами:

$$h = \bar{h},\ k = \bar{k}.$$

Автор дает новое характеристическое свойство сетей и поверхностей E: поверхности E и только они допускают сопряженную сеть (сеть E), состоящую из пангеодезических линий.

Автор прилагает свои формулы для определения частного случая поверхности E с сопряженной сетью E из плоских пангеодезических линий. Г. И. Трушин

1946. Точечное взаимно-однозначное соответствие двух поверхностей с заданным свойством соприкасающихся квадрик Ли. Малаховский В. С., Уч. зап. Томский ун-т, 1957, № 28, 3—12.

Рассматривается пара поверхностей с установленным взаимно-однозначным точечным соответствием, при котором соприкасающиеся квадрики Ли, присоединенные к поверхностям в соответствующих точках, имеют общую прямолинейную образующую. Изучаются пары таких поверхностей при дополнительных предположениях: 1) когда соответствующие квадрики Ли касаются вдоль общей прямолинейной образующей, 2) когда линия пересечения соответствующих квадрик содержит распавшуюся кривую второго порядка, 3) когда квадрики Ли касаются в точках пересечения общей образующей с асимптотическими касательными поверхностей.

Определяется широта классов таких пар поверхностей и исследуются их геометрические свойства.

Г. Ф. Лаптев

1947. Последовательности Годо проективно-минимальной поверхности и ее преобразования Демулена. Су Бу-цин (Godeaux sequences of a projective minimal surface and its Demoulin transforms. Su Buchin), An. stiint. Univ. Iasi., 1956, Sec. I, **2**, № 1-2, 61—67 (англ.; рез. русск., рум.)

Последовательностью Годо поверхности S называется последовательность конгруэнций прямых

$$\ldots, U_n, \ldots U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n,$$

где U и V — асимптотические касательные поверхности и каждый член последовательности в отображении на пятимерное пространство P_5 есть преобразование Лапласа от предыдущего.

Если для таких последовательностей установлено, что в пространстве прямых P_5 точки

$$\begin{array}{cccc} U_3 & U_2 & U_1 & U, \\ \bar{U}_1 & \bar{U} & \bar{V} & \bar{V}_1 \\ V & V_1 & V_2 & V_3 \end{array}$$

обладают тем свойством, что прямая, соединяющая в P_5 любые две соседние точки средней строки, пересекает обе прямые, соединяющие две точки верхней и нижней строк, то поверхность S проективно-минимальная, а поверхность $\bar{S}$ описывается одной из вершин четырехугольника Демулена. Указанные инциденции будут иметь место и для всех остальных членов последовательностей в обе стороны. Р. Н. Щербаков

1948. О некоторых точечных преобразованиях пространств, обобщающих конформные преобразования. Мельци (Su alcune trasformazioni puntuali tra spazi ordinari estendenti le trasformazioni conformi. Melzi Giovanni), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 1-2, 96—117 (итал.)

Рассматривается точечное соответствие T двух трехмерных евклидовых пространств S, S'. Для пары соответствующих точек P, P' T индуцирует касательное афинное преобразование A пространства S в S', переводящие сферу с центром в P в эллипсоид с центром P'. Соответственно A^{-1} переводит сферу с центром в P' в эллипсоид с центром P. Оси обоих эллипсоидов соответствуют в A, а линии, огибаемые осями, соответствуют в T. Эти линии образуют в общем случае три конгруэнции кривых в каждом пространстве. Проблема заключается в определении всех таких преобразований T, для которых эллипсоиды — индикатрисы растяжений — представляют собою в каждой точке пространства поверхности вращения. Тогда несобственные конические сечения индикатрис имеют двойное касание с циклическим кругом.

Пусть ξ_α и η_α —оси двух соответствующих прямоугольных систем пространств S и S', $\eta_\alpha = \chi_\alpha \xi_\alpha$, где χ_α — главные модули растяжений. Касательное афинное соответствие A определяется уравнениями $b_{\alpha\beta}(v^\mu) y^\beta = \chi_\alpha a_{\alpha\beta}(u^\lambda) x^\beta + K_\alpha$, содержащими 12 параметров K_α, χ_α, u^λ, v^μ. В случае эллипсоидов вращения $\chi_1 = \chi_2 = \chi$.

Дифференцируя эти уравнения и присоединяя уравнения, получаемые внешним дифференцированием, автор находит замкнутую систему в инволюции, из которой следует, что искомые преобразования зависят от одной произвольной функции трех аргументов.

Две из трех главных конгруэнций неопределенны. Автор рассматривает случай, когда третья главная конгруэнция нормальна, т. е. главные линии суть ортогональные траектории семейства поверхностей. Соответствующие преобразования зависят от шести произвольных функций двух независимых переменных.

Я. П. Бланк

1949. Проективная наложимость точечных соответствий. Вилла (L'applicabilité projective de deux transformations ponctuelles. Villa Mario) Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 4, 435—443 (франц.; рез. русск.)

Работа представляет собой содержание лекции, прочитанной на математическом съезде в Праге в 1955 г. Соответствие T между двумя плоскостями представлено на многообразии Сегре $V_4 \subset S_8$ (которое представляет пары точек этих плоскостей) поверхностью τ. Эта поверхность имеет 3 семейства квазиасимптотических линий γ_{123}, которые служат образом характеристических кривых соответствия T. Соотношение между T и T' является проективным изгибанием, если индуцированное ими соответствие $\tau \to \tau'$ сохраняет квазиасимптотические линии γ_{123} и если к каждой паре соответствующих друг другу точек $P \in \tau$ и $P' \in \tau$ существует коллинеация $S_8 \to S_8'$, для которой $V_4 \to V_4'$ и которая является касательной к $\tau \to \tau'$, а соприкасающейся для квазиасимптотических направлений. Проективное изгибание соответствий T и T' между плоскостями π_1, π_2 и π_1', π_2' можно определить и непосредственно: соответствие $T \to T_1$ дано соответствиями U_1, U_2 между π_1, π_1', и π_2, π_2'; характеристические кривые U_1 и U_2 совпадают с характеристическими кривыми T, T' во всех плоскостях. Наконец, дается определение проективного линейного элемента соответствия, который сохраняется именно при проективном изгибании.

A. Švec

1950. Замечания о проективном изгибании двух точечных соответствий между плоскостями. Мураккини (Osservazioni sull'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali fra piani. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 176—182 (итал.; рез. англ.)

Для того чтобы соответствие T между плоскостями π_1 и π_2 было проективно изгибаемым, необходимо и достаточно, чтобы существовало соответствие ($\neq T$, не являющееся коллинеацией) между плоскостями π_1 и π', характеристические кривые в π_1 которого совпадают с характеристическими кривыми соответствия T. Проективно изгибаемые соответствия между плоскостями зависят от одной функции двух переменных. Пусть в S_3 фиксирована плоскость $\sum$ и четыре колинеарные точки O_1, O_2, O_1', O_2'. Проектируя $\sum$ из O_1' и O_2 (или же O_1' и O_2'), получим очевидным образом соответствие T (или же T'); соответствия T и T' проективно наложимы. Этим показан пример соответствий, которые допускают по крайней мере ∞^2 проективных изгибаний. Наконец приведен и результат Ваона. Пусть V означает 3 семейства кривых в π_1, которые являются характеристическими для ∞^m соответствий, тогда а) при $m=4$ семейство V образует шестиугольную конфигурацию прямых; б) $m \neq 3$; в) существуют слои V_n для которых $m = 2$. Отсюда следует: соответствие T допускает самое большее ∞^5 проективных изгибаний, причем ∞^5 проективных изгибаний достигают только такие T, характеристические кривые которых образуют шестиугольную конфигурацию прямых.

S. Švec

1951. Об одном обобщении конического сечения Коммереля, связанном с дифференциальной системой кривых на поверхности в S_4. Пикассо (Sopra una generalizzazione della conica di Kommerell cui da luogo un sistema planare di curve su una superficie di S_4. Picasso Ettore), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 1, 31—37 (итал.)

В предыдущей статье (Atti I Congr. Unione mat. Ital.) автор отметил, что на поверхности в S_4 дифференциальная система кривых, определяемая уравнением

$$d^2v\,du - dv\,d^2u = Adu^3 + Bdu^2dv + Cdudv^2 + Ddv^3, \quad (1)$$

имеет в каждой точке x поверхности опорную плоскость ω, на которой пересечение с опорной плоскостью близкой точки $x + dx$ при изменении du, dv описывает некоторое коническое сечение — обобщение конического сечения Коммереля. Пусть поверхность, определена уравнением

$$x_{uv} + ax_u + bx_v + cx = 0,$$

и $z = x_u + bx$, $\bar{z} = x_v + ax$ — две точки преобразования Лапласа; на плоскости ω, определяемой точкой x и двумя точками

$$Y_3 = (bB - aA - 2b^2)\,x + (2b - B)\,z + A\bar{z} + x_{uu},$$

$$Y_4 = (bD - aC - 2a^2)\,x - Dz + (2a + C)\,\bar{z} + x_{vv},$$

$\lambda_0, \lambda_3, \lambda_4$ можно рассматривать как локальные координаты точки $\lambda_0 x + \lambda_3 Y_3 + \lambda_4 Y_4$ и также локальными координатами λ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) относительно пентаэдра $xz\bar{z}Y_3Y_4$ можно определить любую точку $\lambda_0 x + \lambda_1 z + \lambda_2 \bar{z} + \lambda_3 Y_3 + \lambda_4 Y_4$ в S_4. Если определить $\varphi_{ri}^{\cdot\cdot\,t}$ с помощью двух соотношений

$$dY_i = (\varphi_{ri}^{\cdot\cdot\,0} x + \varphi_{ri}^{\cdot\cdot\,s} x_s + \pi_{ri}^{\cdot\cdot\,j} Y_j)\,du^r,$$

то упомянутое коническое сечение на ω в локальных координатах определится уравнениями

$$(\varphi_{1i}^{\cdot\cdot\,1}\varphi_{2j}^{\cdot\cdot\,2} - \varphi_{1i}^{\cdot\cdot\,2}\varphi_{2j}^{\cdot\cdot\,1})\lambda_i\lambda_j + \varphi_{ri}^{\cdot\cdot\,r}\lambda_0\lambda_i + (\lambda_0)^2 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} i, j = 3, 4 \\ r = 1, 2 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее обобщение можно получить, исходя из рассмотрения какой-либо пары гиперплоскостей $\lambda_\mu = 0$, $\lambda_\nu = 0$ ($\mu \neq \nu$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$).

В последующем автор ограничивается случаями, относящимися к двум парам $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$.

Общие точки гиперплоскости $\lambda_2 = 0$, фиксированной точками (xzY_3Y_4), и гиперплоскости, определяемой бесконечно близкими точками к предыдущим, удовлетворяют условию $(A\lambda_1 - \lambda_i\varphi_{1i}^{\cdot\cdot\,2})du - (\lambda_0 + \lambda_i\varphi_{2i}^{\cdot\cdot\,2})dv = 0$; аналогично общие точки гиперплоскости $\lambda_1 = 0$ и близкой к ней определятся условием

$$(\lambda_0 + \lambda_i\varphi_{1i}^{\cdot\cdot\,1})\,du + (D\lambda_2 + \lambda i\,\varphi_{2i}^{\cdot\cdot\,1})\,dv = 0.$$

Плоскости, общие этим двум гиперплоскостям, огибают квадрику Q_{12}, уравнение которой получится из двух предыдущих исключением du, dv.

Пересечение Q_{12} с опорной плоскостью ω опять дает коническое сечение (2), благодаря чему имеем для него новое определение. Аналогичным образом по паре

гиперплоскостей $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$ определяется квадрика Q_{34}, которая оказывается конусом

$$(AD + \alpha_2\beta_1)\lambda_3\lambda_4 + D\lambda_2\lambda_4 - A\lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 = 0,$$

где α_i и β_i — коэффициенты разложений

$$x_{uuu} = \alpha_1 x_{uu} + \alpha_2 x_{vv} + \alpha_3 x_u + \alpha_4 x_v + \alpha_5 x,$$

$$x_{vvv} = \beta_1 x_{uu} + \beta_2 x_{vv} + \beta_3 x_u + \beta_4 x_v + \beta_5 x;$$

в частности для дифференциальной системы с условиями $A = D = 0$ получается конус $\alpha_2\beta_1\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2 = 0$; здесь единственный коэффициент $\alpha_2\beta_1$ есть инвариант Бомпьяни двух указанных уравнений третьего порядка.

Тот же прием дает в общем 10 квадрик $Q_{\mu\nu}$, каждая из которых связана с парой гиперплоскостей $\lambda_\mu = 0$, $\lambda_\nu = 0$. Независимо от рассмотрения дифференциальной системы кривых, указанное построение может быть получено, исходя из двух любых вершин фундаментального пентаэдра $xzzx_{uu}x_{vv}$, к которому ранее указанный приводится при условиях $A = D = 0$, $B = 2b$, $C = -2a$.

В дальнейшем автор определяет те специальные системы дифференциальных кривых (1), для которых некоторые из квадрик $Q_{\mu\nu}$ в сечении с опорной плоскостью ω дают распадающиеся конические сечения.

С. С. Бюшгенс

1952. О соответствии плоскостей, определяемом линейным комплексом плоскостей в пространстве пяти измерений. Цирилли (Su una corrispondenza fra piani determinata da un complesso lineare di piani nello spazio a cinque dimensioni. Zirilli Francesco), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 1-2, 43—57 (итал.)

1. Линейный комплекс плоскостей (л. к. п.) в S_n (проективном, комплексном) связывает с каждой общей прямой r полярную гиперплоскость $S^{(r)}_{n-1}$. Отсюда следует, что в случае $n = 5$ общей плоскости α соответствует плоскость α' — опора всех полярных S_4 для прямых, принадлежащих α. Назовем α' полярной плоскостью плоскости α, α — антиполярная плоскости α'. Таким образом устанавливается с помощью л. к. п. S_2 соответствие P_α пар (α, α'). P_α определяет соответствие T_v на грассманиане V_9 плоскостей пространства S_5. В статье изучаются P_α и T_v. Исследование опирается на три основные работы: 1) Сегре (Segre C., Ann. mat. pura ed appl., 1927, 27 (3), 75—123), 2) Бомпьяни (РЖМат, 1955, 2853), 3) Лонго (РЖМат, 1958, 660). Автор использует определения и результаты этих работ.

Однородные координаты точки x в S_n обозначаются через x^i, грассмановы координаты прямой r — через r^{ik} и плоскости π через — p^{ik}, Л. к. п. S_2 есть совокупность плоскостей, координаты которых удовлетворяют условию

$$a_{ikj} \cdot p^{ikj} = 0, \qquad (1)$$

где a_{ikj} — компоненты антисимметрического тензора. Уравнение (1) можно представить в виде

$$a_{ikj} \cdot r^{ik} z^j = 0, \qquad (2)$$

который показывает, что общей прямой r л. к. п. S_2 ставит в соответствие полярную гиперплоскость S^2_{n-1}

$$r_j z^j = 0, \qquad (3)$$

где $r_j = a_{ikj}r^{ik}$, как место точек, каждая из которых вместе с r определяет плоскость, принадлежащую л. к. п. S_2. Прямая называется особой, если ее полярная плоскость неопределенна ($r_j = 0$): всякая плоскость через особую прямую принадлежит л. к. п. S_2; ей взаимным понятием будет полное S_{n-2}, всякая плоскость которого принадлежит л. к. п. В дальнейшем примем $n = 5$. Л. к. п. называют комплексом исключительного типа, если он имеет по меньшей мере один центр, т. е. такую точку, что всякая плоскость инцидентная ей принадлежит л. к. п.; если комплекс имеет два центра, то существует плоскость τ центров (комплекс с ядром τ).

Для общего комплекса (не исключительного типа) существуют ∞^4 особых прямых, инцидентных двум косым плоскостям π_1 и π_2 (кардинальным).

Если кардинальные плоскости различны так, что $\pi_1 = (0_0, 0_1, 0_2)$ и $\pi_2 = (0_3, 0_4, 0_5)$, то уравнение комплекса в этой референции принимает вид:

$$\alpha p^{012} + \beta p^{345} = 0 \quad (\alpha\beta \neq 0), \qquad (4)$$

т. е. л. к. п. общего типа принадлежит пучку л. к. п., определяемому двумя комплексами с ядрами π_1 и π_2. Если комплекс специального типа ($\pi_1 \equiv \pi_2$), то его уравнение может быть приведено к виду

$$p^{045} + p^{153} + p^{234} = 0. \qquad (5)$$

В S_{19} грассманиана V_9 л. к. п. S_2 может быть представлен либо гиперплоскостью Π, либо точкой P (принадлежащей Π), полюсом гиперплоскости Π относительно невырожденной корреляции $\mathfrak{N}$, определяемой условием инциденции двух плоскостей. Отметим еще, что тройку плоскостей α, β, γ называют сопряженной относительно л. к. п., если последний может быть представлен линейной комбинацией комплексов с ядрами α, β, γ. Сопряженная тройка и кардинальные плоскости принадлежат одному и тому же многообразию V_3^3. Если фиксировать общее V_3^3 для данных кардинальных плоскостей, а на нем плоскости α и β, то плоскости л. к., инцидентные α и β, инцидентны также некоторой третьей плоскости γ, образующей с α и β сопряженную тройку. Опираясь на указанное, автор доказывает, что: 1) α и полярная α' образуют такую сопряженную тройку, в которой две плоскости совпадают с α, отсюда 2) соответствие P_α имее индексы [2, 1], 3) общая плоскость α, ей полярная α' и две кардинальные плоскости л. к. п. принадлежат одному и тому же V_3^3, 4) соответствие P_α на каждом V_3^3 (неприводимом) устанавливает для кардинальных плоскостей соответствие [2, 1], которое совпадает с поляритетом, определяемым кубической формой, образованной тремя плоскостями на V_3^3, принадлежащими л. к. п. S_2. Кардинальные плоскости изображаются гессианом этой формы (этот результат имеется у Сегре).

2. Автор далее ставит вопрос о прямых, имеющих относительно данных л. к. п. одну и ту же полярную гиперплоскость ρ; если общий л. к. п. изображается уравнением (4), а данная гиперплоскость (не содержащая кардинальных плоскостей) уравнением

$$a_2x^2 + a_5x^5 = 0,$$

тогда искомые прямые определяются условиями

$$r^{2i} = r^{5i} = 0, \quad \alpha a_5 r^{01} - \beta a_2 r^{34} = 0,$$

т. е. они образуют л. к. S_1 в полном S_3, входящем в ρ; то же свойство имеется и у л. к. п. специального типа.

Если ρ содержит одну из кардинальных плоскостей π_1, то прямыми, имеющими заданную полярную гиперплоскость ρ, являются прямые, принадлежащие ρ и инцидентные общей прямой ρ и π_2.

3. Свойства P_α таковы: 1) необходимым и достаточным условием, чтобы плоскость α, не содержащая какой-либо особой прямой, принадлежала л. к. п. S_2, яв-

ляется ее совпадение с полярной плоскостью α', 2) если α не принадлежит л. к. п. S_2, то α и α' в косом положении, 3) для л. к. п. S_2 общего типа α, α', π_1 и π_2 принадлежат одному и тому же многообразию V_3^3, 4) в соответствии P_α существует только одна пара косых плоскостей, которые двояким способом соответствуют друг другу, именно пара кардинальных плоскостей π_1 и π_2.

4. Чтобы определить число плоскостей α, антиполярных данной плоскости α', вводится следующее понятие. Пусть в S_5 даны три независимых S_3, которые обозначим через $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, и в каждом из них линейный комплекс S_1, который обозначим соответственно через $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$, $L_1^{(3)}$. Назовем плоскостью инциденции тройки л. к. S_1 плоскость, на которой лежат три прямых, каждая из которых принадлежит одному и только одному из л. к. S_1. Обозначим через r_l прямую пересечения R^j и R^h ($l, j, h = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq h$), тогда плоскости инциденции пересекают r_1, r_2, r_3. Будем предполагать, что: 1) прямые из $L^{(i)}$, пересекающие r_j и r_k, образуют регулярное многообразие; тогда они устанавливают невырождающийся проективитет Φ_i между r_j и r_h. Далее предположим, что II) проективитет $\psi_l = \Phi_h \times \times \Phi_i \times \Phi_j$ не является тождеством. При этих условиях имеется предложение: тройки л. к. S_1, принадлежащие соответственно трем S_3, допускают две и только две плоскости инциденции, которые могут и совпадать.

5. Пусть дан л. к. п. S_2 в S_5 и пусть α' — общая (т. е. не встречающая никакой кардинальной плоскости) плоскость; ρ_1, ρ_2, ρ_3 — три гиперплоскости через α' и $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$, $L_1^{(3)}$ три л. к. S_1 к ним присоединеные относительно л. к. п. S_2 (в смысле п. 2), принадлежащих соответственно $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)}$. Условия п. 4 соблюдаются для тройки $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$, $L_1^{(3)}$ и поэтому: общая плоскость α' имеет две и только две антиполярных плоскости, обозначим их через α и α^*. Тот же результат подтверждается аналитически; если воспользоваться введенной в п. 1 системой координат и приведенным уравнением (4) л. к. п. S_2, то уравнение

$$F(\lambda, \mu) \equiv \alpha\lambda^3 + \beta\mu^3 = 0$$

будет выражать принадлежность плоскости α многообразия V_3^3 л. к. п. S_2. Тогда получается, что соответствие P_α на каждом неприводимом V_3^3 через кардинальные плоскости π_1, π_2 устанавливает соответствие плоскостей (2, 1), которое совпадает с полярностью, определяемой кубической формой плоскостей многообразия V_3^3, принадлежащих л. к. п. S_2; кардинальные плоскости принадлежат гессиану этой формы.

Далее автор дает (п. 6) геометрическое истолкование P_α в S_{19} грассманиана, затем (п. 7) рассматривает свойства P_α для л. к. п. S_2 специального, в котором кардинальные плоскости совпадают. Далее устанавливаются (п. 8) уравнения, определяющие соответствие P_α; последний (п. 9) посвящается изучению соответствия T.

С. С. Бюшгенс

1953 К. Об одном классе линий на поверхности в проективном пространстве. Малаховский В. С., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2. Томск, Томский ун-т, 1957, 7—9

Резюме доклада, в котором рассматриваются линии Γ_λ на поверхности, вдоль которых характеристика квадрик Дарбу индекса λ распадается на две кривые второго порядка. Р. Н. Щербаков

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1954. Об одном типе симметрических пространств. Широков (Despre un tip de spatii simetrice. Sirokov P. A.), An Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1958, 12, № 1, 5—18 (рум.)

См. реф. 1955.

1955. Об одном типе симметрических пространств. Широков П. А., Матем. сб., 1957, 41, № 3, 361—372

Статья написана по материалам покойного проф. П. А. Широкова (1895—1944) А. П. Широковым и А. З. Петровым; в составлении примечания и в редактировании участвовал также Б. А. Розенфельд.

Рассматривается симметрическое пространство четного числа измерений со следующей структурой тензора кривизны в одной из своих точек:

$$\frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \alpha (a_{\alpha[\gamma} a_{\delta]\beta} + b_{\alpha[\gamma} b_{|\beta|\delta]} + b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta}), \qquad (1)$$

где $a_{\alpha\beta}$ — значение фундаментального тензора в рассматриваемой точке, а $b_{\alpha\beta}$ — кососимметрический тензор, удовлетворяющий условиям

$$b^\sigma_{\alpha.} b_{\beta\sigma} = a_{\alpha\beta} \qquad (b^\beta_{\alpha.} = b_{\alpha\sigma} a^{\sigma\beta}).$$

В ранее подготовленной к печати А. П. Широковым работе П. А. Широкова (РЖМат, 1957, 6636) вначале дана классификация симметрических пространств четырех измерений и в связи с этим высказаны соображения, приводящие к рассмотрению пространств типа (1). В настоящей статье воспроизводится вновь последующая часть работы с некоторыми редакционными изменениями. Отыскивается строение фундаментального тензора, которое получает простой вид при переходе к специальным координатам (координаты Вейерштрасса и координаты Бельтрами). Изучаются геодезические линии, причем их удается отобразить на окружности евклидова пространства. В соответствующих двумерных плоскостях возникает геометрия постоянной кривизны. Отсюда определяется длина дуги геодезической линии, соединяющей две данные точки, и отыскиваются конечные уравнения геодезической. В заключение строится тригонометрия изучаемого пространства.

В применении отмечено, что изучаемое пространство V_{2n} изометрично n-мерному комплексному унитарному пространству вещественной постоянной кривизны, которое впервые рассматривалось Фубини (1903) и Штуди (1905). Эти пространства являются частными случаями A-пространств П. А. Широкова (Изв. Физ.-матем. о-ва при Казанском ун-те (2), 1925, 25, 86—114), которые впоследствии в иной форме были исследованы Келером (Kähler E., Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1933, 9, 173—186) и П. К. Рашевским (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу. Н.-и. ин-т матем. при МГУ, 1949, 7, 225—248). В последнее время изучаемое пространство подвергалось ряду исследований с точки зрения допускаемой им группы движений, которая имеет порядок $n(n+2)$, причем стационарная группа в каждой точке максимальна и имеет порядок n^2.

Алгебраический вывод свойств этого пространства, основанный на проективной интерпретации унитарных пространств, дан в статье Б. А. Розенфельда (РЖМат, 1959, 1956). Б. Л. Лаптев

1956. К теории симметрических пространств ранга 1. Розенфельд Б. А., Матем. сб., 1957, 41, № 3, 373—380

Рассматриваются симметрические компактные пространства Э. Картана ранга 1 с простыми фундаментальными группами. Эти пространства вводятся следующим образом: над полями вещественных чисел Φ, комплексных чисел $\Phi(i)$, телом кватернионов $\Phi(i, j)$ и октав $\Phi(i, j, l)$ строятся проективные пространства со-

ответственно $P_n, P_n(i)$ $P_n(i,j)$ и $P_2(i,j,l)$, точки которых определяются $n+1$ элементами x_l с точностью до преобразования $x_l \to x_l p$. Поскольку тело октав неассоциативно, но альтернативно, т. е. каждые 2 его элемента порождают ассоциативное подтело, изоморфное Φ, $\Phi(i)$, или $\Phi(i,j)$, то при построении $P_2(i,j,l)$ требуется, чтобы октавы x_0, x_1, x_2, определяющие точку, а также и p принадлежали к одному ассоциативному подтелу. Введением метрики по формуле

$$\cos^2 \frac{\omega}{r} = \frac{\Sigma x_i \bar{y}_i \cdot \Sigma y_i \bar{x}_i}{\Sigma x_i \bar{x}_i \; \Sigma y_i \bar{y}_i}$$

указанные проективные пространства превращаются в вещественное, комплексное, кватернионное и октавное неевклидовы пространства, обозначаемые соответственно через S_n, $K_n(i)$, $K_n(l,j)$ и $K_2(i,j,l)$. В этой формуле r положительное число, называемое радиусом кривизны, а черта означает переход к сопряженному элементу. Ввиду того, что числитель и знаменатель вещественны и числитель не больше знаменателя, ω — вещественное число, и поэтому полученные неевклидовы пространства изометричны вещественным римановым пространствам размерности n, $2n$, $4n$ и 16 соответственно, которые являются компактными.

Прямыми рассматриваемых пространств называются многообразия точек, изометричные $K_1(i)$, $K_1(i,j)$ и $K_1(i,j,l)$ с тем же радиусом кривизны r. Доказывается, что эти прямые изометричны сфере радиуса $\frac{r}{2}$ в евклидовом пространстве, соответственно 3, 5, 9 измерений.

Нормировка координат в $K_n(i)$, $K_n(i,j)$, $K_2(i,j,l)$ условием $x_0 = 1$ означает отображение областей этих пространств, для которых $x_0 \neq 0$, на евклидово пространство $2n$, $4n$ и 16 измерений, координатами точек которых служат вещественные коэффициенты элементов x_l. Доказывается, что геодезические изображаются при этом окружностями и прямыми, ортогональными мнимой гиперсфере $\Sigma x_l \bar{x}_l + 1 = 0$, а угол между двумя направлениями в начале координат совпадает с углом между изображающими их направлениями в евклидовом пространстве. Находится формула кривизны двумерной площадки:

$$K = \frac{1}{r^2}(1 + 3\cos^2\alpha),$$

где α — угол наклона площадки. Так назван угол между двумерной площадкой и прямой, проходящей через вектор этой площадки; α не зависит от выбора этой прямой.

В заключение выводится формула косинусов для треугольника в пространствах $K_n(i)$, $K_n(i,j)$ и $K_2(i,j,l)$ и без доказательства дается два вида формулы синусов. Указывается, что доказанные свойства в случае пространств $K_n(l)$ были получены П. А. Широковым (реф. 1955) дифференциально геометрическим путем.

Г. И. Кручкович

1957. О геодезическом отображении римановых пространств на пространства с плоскими геодезическими. Веденяпин Д. В., Научн. ежегодник. Черновицк. ун-т, 1956(1957), **1**, № 2, 292—293

Ранее автором был найден класс римановых пространств, обладающих плоскими геодезическими, но отличных от субпроективных пространств В. Ф. Кагана. В специальной системе координат матрица метрического тензора указанных пространств имеет вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g'_2 & g_4 & g_5 \\ g'_3 & g'_5 & g_6 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 C \\ 0 & A & g'_2 C \\ C'g_1 & C'g_2 & C'g_1 CF + 2g'_3 C \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где разбиение матриц на блоки определяется разбиением $(1,\ldots,m)$, $(m+1,\ldots,n-1)$, (n) строк и столбцов, $2 \leqslant m \leqslant n-2$. Матрицы g_α, A, C постоянные, причем C — столбцевая матрица из m чисел. Штрих означает транспортирование матрицы. F есть нелинейная функция от координаты x^n. На ранги постоянных матриц наложены условия:

$$\text{ранг } g_1 \leqslant m-2, \; \text{ранг} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = m-1, \; \text{ранг} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = m,$$

$$\text{ранг} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & A \\ g_3 & 0 \end{pmatrix} = m, \quad \text{ранг}(g_\alpha) = n, \; \text{ранг } A \geqslant 1.$$

Ставится вопрос о существовании римановых пространств, геодезически отобразимых на пространства (1), т. е. имеющих те же геодезические. На этот вопрос дается отрицательный ответ при условии, что геодезическое отображение не сохраняет связность риманова пространства (1).

Примечание референта. Вид метрики (1) можно значительно упростить, если заметить, что рассматриваемое пространство допускает несколько полей абсолютно параллельных векторов. Например, таковыми являются векторы $\delta_1, \ldots, \delta^i_m$. Г. И. Кручкович

1958. О n-мерных проективно плоских пространствах, допускающих группы движений порядка $r = n^2 - n + 1$. Муто (On n-dimensional projectively flat spaces admitting a group of affine motions of oder $r = n^2 - n + 1$. Muto Yosio), Sci. Repts Yokohama Nat. Univ. Sec. 1, 1956, № 5, 1—15 (англ.)

Определяются проективно-евклидовы пространства A_n $(n \geqslant 3)$, допускающие полные группы движений G_r порядка $r = n^2 - n + 1$; коэффициенты связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ искомых пространств в некоторой проективно-евклидовой системе координат представляются в виде $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\delta^\lambda_\mu \psi_\nu - \delta^\lambda_\nu \psi_\mu$, причем координаты вектора ψ_l приводятся к одному из четырех случаев:

1) $\psi_1 = x^2$, $\psi_2 = -x^1$, $\psi_3 = \psi_4 = \ldots = \psi_n = 0$

2) $\psi_l = \partial\psi/\partial x^l$, $\psi = \frac{1}{2}\ln(x^1 x^2 - 1)$,

3) $\psi_l = \partial\psi/\partial x^l$, $\psi = \frac{1}{2}\ln(1 + x^{1^2} + x^{2^2})$,

4) $\psi_l = \partial\psi/\partial x^l$, $\psi = \frac{1}{2}\ln(1 - x^1 x^2)$.

Эти пространства, а также более общие пространства, составляющие класс проективно-евклидовых пространств третьей лакунарности, были получены референтом в работах:

Движения в пространствах аффинной связности, М., 1955, дисс. докт. физ.-матем. н. см. стр. 84—95; РЖМат, 1957, 5138; 1958, 4181

И. П. Егоров

1959. Об изометриях и теореме Лиувилля. Хартман (On isometries and on a theorem of Liouville.

Hartman Philip), Math. Z., 1958, 69, № 2, 202—210 (англ.)

Обобщая предыдущий результат (РЖМат, 1955, 2206), автор доказывает теорему:

I. Если u и v — d-мерные векторы, функция $v=v(u)$ — класса C^1 и удовлетворяет системе

$$f^I(u,v,\partial v^1/\partial u^1,\ldots,\partial v^d/\partial u^d)=0,\ I=1,2,\ldots,{}^1/_2 d(d+1), \quad (1)$$

где f^I — класса C^σ, $\sigma\geqslant 1$, и если определитель матрицы коэффициентов при $\partial^2 v^i/\partial u^j\,\partial u^k$ в системе ${}^1/_2 d^2(d+1)$ линейных уравнений, полученных формальным дифференцированием системы (1) по u^k в предположении $\partial^2 v^i/\partial u^j\,\partial u^k=\partial^2 v^i/\partial u^k\,\partial u^j$, отличен от нуля, то $v(u)$ есть функция класса $C^{1+\sigma}$.

Применяя эту теорему к проблеме отображения пространств, получим:

II. Если $v=v(u)$ в окрестности значений $u=v=0$ дает отображение класса C^1 римановой метрики $ds^2=g_{ik}\,du^i\,du^k$ в метрику $ds^2=h_{ik}\,du^i\,du^k$, где g_{ik} и h_{ik} — неособые симметрические матрицы класса C^σ, то функция $v=v(u)$ — класса $C^{1+\sigma}$.

III. (Теорема Лиувилля). Если $v=v(u)$ дает локальное отображение класса C^1 с неисчезающим якобианом метрики $ds^2=(du^1)^2+\ldots+(du^d)^2$ в метрику $ds^2=\gamma^2[(du^1)^2+\ldots+(du^d)^2]$, где $d\geqslant 3$, $\gamma>0$, то это отображение есть преобразование Мёбиуса (т. е. аналитическое).

Теоремы II и III являются завершением и обобщением серии исследований, выполненных автором и Винтнером (A. Wintner) в 1947—54 гг. Р. Н. Щербаков

1960. Конгруэнции кривых в подпространстве нериманова пространства. Мишра (Congruences of curves in a subspace of a non-Riemannian space. Mishra R. S.), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3-5, 235—241 (англ.)

Рассматриваются совокупности $m-n$ конгруэнций кривых в нериановом пространстве V_m с симметричной связностью такие, что через каждую точку подпространства V_n проходит одна кривая каждой конгруэнции. Находятся обобщенные уравнения Гаусса и Кодацци, из которых затем получаются известные уравнения Гаусса — Майнарди — Кодацци для V_n в V_m. Ю. Е. Пензов

1961. Особые группы Ли и их геометрическая интерпретация Титс (Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique. Tits J.), Bull. Soc. math. Belg., 1956, 8, № 1, 48—81 (франц.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1957, 1791; см. стр. 125 оригинала) на основании работы Ф. И. Карпелевича (Докл. АН СССР, 1951, 76, № 6, 775—778) показано, что всякому простому корню полупростой алгебры Ли соответствует геометрический образ в пространстве, фундаментальной группой которого является соответствующая комплексная группа Ли, причем стационарная подгруппа этого образа есть неполупростая максимальная подгруппа данной группы. Поэтому схема простых корней (Е. Б. Дынкин, Успехи матем. наук, 1947, 2, № 4(20), стр. 59—127), называемая автором схемой Витта—Дынкина (Witt E., Adhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1941, 14, 289—322) и известная в советской литературе под названием схемы Дынкина, дает схему таких геометрических образов в пространствах с простыми фундаментальными группами. При этом соединительным черточкам между точками, изображающими простые корни в схеме Дынкина, соответствуют определенные соотношения инцидентности между соответственными образами. В работе подробно рассматриваются такие образы и соотношения инцидентности между ними как для классических, так и для особых простых групп Ли. В частности, для групп A_n этими образами являются точки, прямые и плоскости различных размерностей в n-мерном комплексном проективном пространстве, для групп B_n и D_n—точки, прямолинейные образующие и плоские образующие различных размерностей на абсолюте соответственно $2n$-мерного и $(2n-1)$-мерного комплексного неевклидова пространства, для групп C_n-нуль-прямые и нуль-плоскости $(2n-1)$-мерного комплексного симплектического пространства (раздвоению схемы Дынкина для групп D_n соответствуют два семейства плоских образующих максимальной размерности на абсолюте, симметрии схемы Дынкина для групп A_n соответствует принцип двойственности проективного пространства, симметрии 3-го порядка схемы Дынкина для группы D_4 соответствует принцип тройственности 7-мерного неевклидова пространства). Основная цель работы состоит в установлении соотношений инцидентности геометрических образов этого типа в случаях, когда фундаментальная группа является одной из особых простых групп G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 с помощью схем Дынкина для этих групп, определяющих эти геометрические образы. Однако в отличие от случаев классических групп особые группы не рассматриваются здесь как фундаментальные группы проективных или неевклидовых пространств (как это делал, в частности, автор в указанной предыдущей работе), благодаря чему соотношения инцидентности, установленные автором, трудно обозримы.

Б. А. Розенфельд

1962. Кривые в пространствах Минковского. Вильгельм (Křivky v prostorech Minkowského. Vilhelm Václav), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 3, 283—300 (чешск.; рез. русск., нем.)

Рассматривается пространство Минковского M_n как множество точек евклидова пространства E_n с несимметричной метрикой $\sigma(x,y)>0$ для $x\neq y$, $\sigma(x,x)=0$, $\sigma(x,z)\leqslant\sigma(x,y)+\sigma(y,z)$, и ищется полная система инвариантов ориентированной кривой.

В пространстве M_n была выбрана декартова система координат $(\dot{x})$ и найден метрический тензор $g_{ij}(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_m)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\sigma(\dot{x}^i-\dot{y}^i)}{\partial x^i\,\partial x^j}$ так, что соответствующая ему квадратичная форма $g_{ij}(\dot{x})\,x^i\,x^j$ является положительно определенной для каждого $(\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)\in E_n-\{O\}$, где O есть начало.

Затем определяется скалярное произведение (a,b) векторов a, b $(a\neq 0)$ соотношением $(a,b)=g_{ij}(a)\,a^i\,b^j$; если $a=0$, то $(0,b)=0$. Наконец, определяется скалярное произведение $(b,c)_a$ векторов b, c в направлении ненулевого вектора a соотношением

$$(b,c)_a=g_{ij}(a)\,b^i\,c^j.$$

Введенные понятия позволяют определить ортонормированный базис векторного пространства, соответствующего данному пространству M_n, как упорядоченную совокупность n векторов $a_1,\ldots,a_n$, для которой

$$(a_i,a_i)=1,\ (a_i,a_j)=0,\ i=1,2,\ldots,n,\ i<j.$$

Каждой ориентированной и достаточно гладкой кривой k с дугой s, которая не лежит ни в каком собственном линейном подпространстве пространства M_n, можно поставить в соответствие в каждой точке (параметра s) $n-1$ кривизну $k_1(s)>0,\ldots,k_{n-1}(s)>0$ и ортонормированный базис $e_1(s),\ldots,e_n(s)>0$, где $e_1(s)$ — касательная, а $e_i(s)$ — нормаль к кривой.

Для производной вектора $e_i(s)$ имеем

$$e'_i=-\alpha_{i_1}e_1-\ldots-\alpha_{i_n}e_i+k_i e_i+1\ (1\leqslant i\leqslant n). \quad (1)$$

При этом положено $k_{n+1}=0$, $e_{n+1}=0$, а скаляры α_{ij} определены рекурсивными формулами

$$a_{l1} = k_1 (e_2, e_1) e_1,$$

$$a_{l1} (e_2, e_1) + a_{l2} = - a_{21} (e_1, e_l) e_2 + k_2 (e_3, e_l) e_2$$

. . . . . .

$$a_{l1} (e_{l-1}, e_1) + \ldots + a_{l, l-1} = - a_{l-1, 1} (e_1, e_l) e_{l-1} -$$

$$- a_{l-1, l-2} (e_{l-2}, e_l) + k_{l-1} (e_l, e_l) e_{l-1}$$

$$a_{l1} (e_l, e_1) + \ldots + a_{ll} = 0.$$

Формулы (1) и (2) являются формулами Френе для кривой в M_n.

Автор доказал, что кривизны $k_1, \ldots, k_{n-1}$ и класс равных между собой ортонормированных базисов, содержащих основной n-гранник кривой в точке $s = 0$, образуют в пространстве M_n полную систему инвариантов ориентированной кривой.

Наконец, автор указывает простую геометрическую интерпретацию j-й кривизны, аналогичную интерпретации кривизны в евклидовом пространстве E_n.

F. Vyčichlo

1963. Введение картановой связности финслерова пространства. Зуланке (Eine Ableitung des Cartanschen Zusammenhangs eines Finslerschen Raumes. Sulanke Rolf. Publs math., 1957, **5**, № 1-2, S. 197—203) (нем.)

Аффинная связность в пространстве линейных элементов задается величинами Γ^l_{ik}, C^l_{ik}, удовлетворяющими обычным в этих случаях законам преобразования и условиям однородности. Пусть в пространстве линейных элементов задан невырожденный симметричный тензор g_{ik}, удовлетворяющий условиям

$$\dot\partial_s g_{il} (x, y) y^i = \dot\partial_s g_{il} (x, y) y^l = \dot\partial_s g_{il} (x, y) y^s = 0. \quad (1)$$

Здесь x — координаты точки, y — координаты линейного элемента, $\dot\partial_i$ — частная производная по y^i. Доказывается, что существует единственная симметричная аффинная связность, в которой $Dg_{ik} = 0$. В частности, условия (1) всегда выполнены, если g_{ik} обычным образом выведен из финслеровой метрики. В этом случае получится связность Картана.

М. В. Васильева

1964. О теории нелинейных связностей. II. Теория пространств Минковского и нелинейных связностей в финслеровом пространстве. Кавагути (On the theory of non-linear connections. II. Theory of Minkowski spaces and of non-linear connections in a Finsler space. Kawaguchi Akitsugu), Tensor, 1956, **6**, № 3, 165—199 (англ.)

(Часть 1 см. Tensor, 1952, 2, 123—142).

По содержанию и по плану статья близка к работе В. В. Вагнера (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1949, **7**, 65 — 166), которую автор цитирует. Некоторые частные вопросы освещены более основательно. Например, изучен вопрос, когда связность, заданная в финслеровом пространстве, имеет геодезическими линиями экстремали. Другое отличие состоит в том, что, считая индикатрису замкнутой и выпуклой, автор пользуется результатом Дейке (РЖМат, 1953, 1380); в этом случае условие $A_l = A_{ikl} g^{kl} = 0$ влечет обращение в нуль тензора неримановости A_{ikl}.

М. В. Васильева

1965. Инварианты кручения и кривизны трехмерных финслеровых пространств. Моор (Über die Torsions- und Krümmungsinvarianten der dreidimensionalen Finslerschen Räume. Moór Arthur), Math. Nachr., 1957, **16**, № 2, 85—99 (нем.)

Пусть A'_{ik} — картановский тензор кручения финслерова пространства. Тогда вектор $A_l = A^a_{ia}$ ортогонален к единичному опорному вектору l^i. Он предполагается отличным от нуля, нормируется и, вместе с l^i дополняется до ортонормального канонического репера. Компоненты тензоров кривизны и кручения в этом репере являются абсолютными инвариантами пространства. Обращение в нуль некоторых из этих инвариантов или их ковариантных производных в смысле связности Картана характеризует важнейшие частные типы финслеровых пространств.

Так получены характеристики аффинно-связных по Бервальду пространств (связность Бервальда которых не зависит от l^i), пространств скалярной кривизны ($R^p_{klm} l^k l^l = R (\delta^p_m - l^p l_m)$), постоянной кривизны ($R = \text{const}$), а для пространств Ландсберга ($A_{ikl,p} l^p = 0$) найдена геометрическая характеристика.

Те же построения можно провести для пространств линейных элементов с метрикой, более общих, чем финслеровы.

М. В. Васильева

1966. Геометрические объекты с дробным законом. Георгиу (Obiecte geometrice de lege fractionară. Gheorghiu O. Em.), Studii si cercetări stiint. Acad. RPR. Baza Timişoara. Ser. stiinte tehn., 1956, **3**, № 3-4, 9—13 (рум.; рез. русск., франц.)

Находятся геометрические объекты в X_n первого класса с N компонентами с очень специфическим дробно-линейным законом их преобразования. Коэффициенты уравнений преобразования компонент объекта выражены с помощью некоторой гиперкомплексной переменной.

Ю. Е. Пензов

1967 Д. Относительно изгибаемости многообразий, погруженных в риманово пространство. Дольбо-Лемуан (Sur la déformabilité des variétés plongées dans un espace de Riemann. Dolbeault-Lemoine Simone.—Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris. Paris, Gauthier—Villars, 1957, 88p.), Bibliogr, France, 1958, **147**, № 19, 517—518 (франц.)

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1968. Релятивистские однородные и изотропные пространства. Титс (Espaces homogènes et isotropes de la relativité. Tits J.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 46—47 (франц.)

Риманово пространство V_4 с лоренцовой метрикой $(+ - - -)$ автор называет однородным, если оно допускает группы транзитивных изометрий, и изотропными в точке p, если изометрии сохраняют p на световых направлениях ($ds^2 = 0$), исходящих из этой точки. Основное утверждение автора: единственными однородными и изотропными V_4 будут следующие пространства:

пространства Де-Ситтера D_4, которые можно рассматривать как гиперквадрику сигнатуры $(+ - - - -)$ в проективном пространстве P_4 (метрика Кели);

произведение $M_4 = K_3 L$, где K_3 или евклидово E_3, или сферическое S_3, или гиперболическое H_3, а L — одномерное пространство, так что метрика имеет вид $- ds^2 + dt^2$, сводясь, в частности, к пространству Минковского;

пространство A_4 с метрикой $- a^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$;

пространство B_4, получаемое как $S_3 \cdot R_a$, при условии идентификации „диаметрально противоположных" точек (p, t) и $(p', t + a/2)$.

Доказательства отсутствуют. Результат может быть применен к изотропным и однородным V_3.

А. З. Петров

1969. К статье С. И. Хусейна «О единой теории поля гравитации и электромагнетизма». Тредер (Zum Aufsatz von S. I. Husain «On unified field theory of

gravitation and electromagnetism». Treder H.) Tensor, 1957, 7, № 2, 128—129 (нем.)

Автор делает замечание по поводу указанной в заголовке работы Хусейна (РЖМат, 1958, 3256). Последний получает уравнения поля, решая вариационные проблемы $\delta\int\sqrt{-g}\ (g^{kl}R_{kl}+F^{kl}R_{kl})\ d\tau=0$, где F_{kl} представляет электромагнитное поле, g_{kl}—основной тензор поля, R_{kl} — тензор Риччи. Автор замечает, что из формул Хусейна вытекает как следствие вывод, что $F_{kl;\,m}=0$(;—ковариантная производная относительно аффинной связности поля), являющийся катастрофическим для теории. А. З. Петров

1970. Инвариант гравитационной плотности. Синг (An invariant gravitational density. Synge J. L.), Proc. Roy. Irish Acad., 1957, **A58**, № 4, pp. 29—39 (англ.)

Так как для релятивистских уравнений гравитации $G_{\mu\nu}=-kT_{\mu\nu}$ (обращающихся в $G_{\mu\nu}=0$, если тензор энергии материи $T_{\mu\nu}$ обращается в нуль) вопрос о характеристике энергии гравитационного поля до сих пор не получил исчерпывающего ответа, а привлечение для этой цели так называемого псевдотензора энергии приводит к новым затруднениям, в силу неинвариантности этого объекта автор предлагает для характеристики гравитационной энергии ввести инвариант $H(\Lambda)$, называемый им гравитационной плотностью.

Этот инвариант конструируется при предположениях: 1) он не отрицателен и 2) исчезает вместе с тензором кривизны пространства. $H(\Lambda)$ не определяется полностью полем, а зависит еще от поля единичного вектора Λ^α и функции веса W.

Конструкция осуществляется следующим образом: вводится инвариант $F(\lambda)=\frac{15}{8\pi}\int\left[K(\lambda,\mu)\right]^2 d\omega_\mu$, где $K(\lambda,\mu)$ — риманова кривизна для однолистного бивектора, натянутого на временно подобный вектор λ^α и пространственно подобный вектор μ^α (λ^α, μ^α —орты с нормой ±1), интеграл распространен по поверхности трехмерной сферы ω_k, описываемой концом вектора μ^α, $d\omega_k$ — элемент телесного угла. В специальной системе координат (где $\lambda^a=\delta_4^a$, $\mu^4=0$)

$$F(\lambda)=g^{pr}g^{qs}R_{paqb}R_{rcsd}\lambda^a\lambda^b\lambda^c\lambda^d+(1/2)(R_{ab}\lambda^a\lambda^b)^2;$$

отсюда следует неотрицательность $F(\lambda)$ и исчезновение $F(\lambda)$ вместе с R_{abcd}. После этого искомая гравитационная плотность определяется формулой:

$$H(\Lambda)=\frac{1}{4\pi}\int F(\lambda)\,W\,d\Omega_\lambda,$$

где интегрирование ведется по псевдосфере Ω_λ плоского 4-мерного пространства Минковского, $d\Omega_\lambda$ —инвариантный элемент 3-мерного объема в Ω_λ, W — положительный весовой множитель, являющийся функцией от Λ^α, который требует доопределения. Нетрудно убедиться, что если $H(\Lambda)=0$, то $R_{abcd}=0$, Λ^α — временно подобный единичный вектор (λ^r — вариация такого вектора). Автор показывает, что в указанной выше системе координат $H(\Lambda)=B_0H_0+B_2H_2+B_4H_4$, где B_0, B_2, B_4— постоянные, определяемые формулами

$$B_0=\frac{1}{15}\int_0^\infty W(\chi)\mathrm{sh}^6\chi\,d\chi,$$

$$B_2=\frac{1}{15}\int_0^\infty W(\chi)\,\mathrm{sh}^4\chi\,(6\mathrm{sh}^2\chi+5)\,d\chi,$$

$$B_4=\frac{1}{5}\int_0^\infty W(\chi)\,\mathrm{sh}^2\chi(16\mathrm{sh}^4\chi+20\mathrm{sh}^2\chi+5)\,d\chi,$$

а H_0, H_2, H_4 рационально выражаются через R_{abcd}, R_{ab}, R, Λ^α.

Функция W ограничена только условиями положительности на Ω_λ и требованием сходимости интеграла. Этим условиям удовлетворяет $W(\chi)=\exp(-k\,\mathrm{sh}\,\chi)\frac{\mathrm{ch}\chi}{\mathrm{sh}^2\chi}$ и тогда $B_0=\frac{8}{3}k^{-5}$, $B_2=\frac{2}{3}k^{-3}+\frac{48}{5}k^{-5}$, $B_4=k^{-1}+8k^{-3}+\frac{384}{5}k^{-5}$, $k=\mathrm{const}$. В частности, при этих предположениях гравитационная плотность для пространства Шварцшильда имеет вид $H(\Lambda)=\frac{6m^2}{r^6}\left(k^{-1}+4k^{-3}+\frac{192}{5}k^{-5}\right)$. А. З. Петров

1971. Геометрия спиноров и общая теория поля. Секереш (Spinor geometry and general field theory. Szekeres G.), J. Math. and Mech., 1957, **6**, № 4, 471—517 (англ.)

Автор ставит задачей установление более тщательно, чем это обычно делается, зависимости, возникающей между спин-связностями и геометрией вариационной теории поля; для этого выясняется, геометрия какой связности отвечает перенесению спиноров (под геометрией понимается дифференцируемое многообразие, состоящее из связки волокон с некоторыми дифференциальными свойствами, и связность, возникающая при перенесении волокон на многообразии). Такой подход мотивируется тем, что спиноры, в смысле группы, более „примитивны", чем евклидовы векторы, и тем, что спин-связность отличается введением новых элементов, которые можно интерпретировать как геометрический эквивалент электромагнитного или некоторого другого физического поля, как это было впервые замечено Фоком, истолковавшим вектор электромагнитного потенциала как часть спин-связности (Fock V., Z. Phys., 1929, 57, 261—277).

Исходя из понятия псевдоортогональной группы, автор вводит спинорное тело и тело Минковского, под которым подразумевает h-мерное представление псевдоортогональной группы k, элементами которого будут векторы $\alpha=(a_k)$; это пространство допускает вращение $\sigma\subset k$ с операторами $\sigma(\alpha)=\beta=(b_k)$, $b_k=M_{km}a_m$, где (M_{km})—матрица Минковского, отвечающая σ. Это не будет алгебраическим векторным пространством, так как нет действия умножения на скаляр. Пользуясь конгруэнтным перенесением, автор вводит спин-связность, определяемую дифференциальной формой $\delta\psi=\left(iA_\mu dx^\mu+\frac{i}{4}\Gamma_{ab}S_{ab\mu}dx^\mu\right)\psi$, где A и S реальны и ковариантны по μ. В спинорном поле определяются спин-производные для $\psi(x)$ и сопряженной $\psi^+(x)$: $\psi_{/\mu}=\psi_{,\mu}-\left(iA_\mu+\frac{i}{4}\Gamma_{ab}S_{ab\mu}\right)\psi$, $\psi^+_{/\mu}=(\psi_{1\mu})^+=\psi^+_{,\mu}+\psi^+\left(iA_\mu+\frac{i}{4}\Gamma_{ab}S_{ab\mu}\right)$. После этого вводится риманова метрика, отвечающая этой спин-связности, тензор кривизны и тензор Риччи.

Уравнения поля получаются применением вариационного принципа к однородному гамильтониану, характеризуемому парой однородных спинорных полей. На этом пути получаются уравнения движения, уравнения энергии, уравнения плотности. В качестве приложения рассматривается космологическая модель; получаются, при частных предположениях, уравнения Максвелла, Лоренца и некоторые другие. А. З. Петров

1972. Об уравнении поля единой теории относительности. Де-Симони (Sull equazioni di campo della teoria relativistica unitaria. De Simoni Franco),

Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 3, 297—304 (итал.)

Дается объединение различных электрогравитационных теорий с несимметричным фундаментальным тензором $g_{ik} = g_{\underline{ik}} + g_{[ik]}$ ($g_{\underline{ik}} = g_{\underline{ki}}$, $g_{[ik]} = -g_{[ki]}$, $g_{ik} = wg_{ik}$, $w = \sqrt{-\|g_{ik}\|}$). Вариация гамильтоновой плотности, введенной автором, $\mathfrak{H} = g^{ik}R^{**}_{ik} + \lambda\mathfrak{h}$ ($R^{**}_{ik} = R^{*}_{ik} - \left(\frac{1}{w}w_{;i}\right)_{;k}$, $R^{*}_{ik} = R_{ik} + \Gamma_{[i;\,k]}$, $\Gamma_l = \Gamma^k_{\underline{lk}}$, $\lambda = \text{const}$), дает при произвольных $\delta\Gamma^i_{jk}$, $\delta g^{ik}_{\underline{\ }} : g^{\underline{ik}}_{+\ ;e} = 0$, $R^{*}_{\underline{ik}} + \lambda\Lambda_{\underline{ik}} = 0$ ($\delta\mathfrak{h} = \Lambda_{ik}\delta g^{ik}$, Λ_{ik} — эрмитов тензор) и

$$\int_\tau (R^{*}_{\underline{ik}} + \lambda\Lambda_{\underline{ik}})\,\delta g^{ik}_{\underline{\ }}\,d\tau = 0.$$

О вариациях $\delta g^{ik}_{\underline{\ }}$ можно сделать 4 гипотезы; они могут быть: 1) произвольными; 2) соленоидальными; 3) суммой соленоидальной и безвихревой вариаций; 4) суммой соленоидальной вариации и вариации, обусловленной произвольным инфинитезимальным изменением системы отнесения пространства и времени. Отсюда 4 системы различных уравнений. В случае 1), при $\lambda = 0$ и определенных условиях эрмитовости получаются уравнения Эйнштейна 1950 г.; в случае 4) $\mathfrak{h} = 0$ дает уравнения Эйнштейна-Штраусса; $\mathfrak{h} = -rw$ — уравнения Шрёдингера; $\mathfrak{h} = 2(\sqrt{-\|g^{ik}\|} - \sqrt{-\|g^{\underline{ik}}\|}$ —уравнения Куршуноглу (B. Kursunoglu); $\mathfrak{h} = -wg^{ik}_{\underline{\ }}g_{\underline{ik}}$ — уравнения Боннора. Не анализируются результаты Главатого (V. Hlavatý), Лихнеровича (A. Lichnerowicz), Тонла (A. Tonnelat). Электромагнитное поле является либо ${}^*g^{rs} = \varepsilon^{rsik}g_{ik}$ (случаи 1, 2, 4), либо $f_{ik} = r^{*}_{ik} + \lambda\Lambda_{\underline{ik}}$ (Хаттори (K. Hattori)), либо $F_{ik} = f_{ik} - \rho_s\rho^s_{ik}$ (Финци (B. Finzi)) (случай 3).

Большинство классических единых теорий (с несимметричным g_{ik} включительно) не являются полными ввиду: 1) объединения лишь силовых полей, а не источников поля; 2) ограничения гравитационным и электромагнитным полями; 3) того, что гравитационное и электромагнитные поля не составляют в этих теориях единого тензора в противоположность постулату 1 Эйнштейна (Einstein A., Ann. Math., 1945, 46, 4) и вследствие коммутативности координат в ds^2 кососимметричные $g_{[ik]}$ сокращаются; 4) линейного характера электромагнитных уравнений, откуда, в противоположность нелинейной теории чистой гравитации, невозможно вывести в V_n движение заряженной частицы из уравнений поля; 5) калибровочной неинвариантности гравитационных уравнений; 6) вопроса физического смысла пятой размерности. Наконец, как отмечает автор, в прежних теориях с несимметричным g_{ik} не существует в статическом сферическом случае общерелятивистских решений типа Шварцшильда и Рейсснера (K. Schwarzschild, H. Reissner).

Примечание референтов. Решение отмеченных вопросов ведет: 1) к теории взаимности (M. Born) и теории слияния (L. De Broglie); 2) к объединению квантовой и релятивистской теорий (В. А. Фок, Ю. Б. Румер), квантованию метрики (В. Амбарцумян, Д. Иваненко) и неточечным полям (Н. Н. Боголюбов, М. А. Марков); 3) к матричной, операторной (некоммутативные координаты) и спинорной геометриям (В. А. Фок, Д. Иваненко, Ю. Б. Румер; см. также Попович (Popovici A., Comp. Rend I Congr. math. hongrois и др.), причем матричные g_{ik} обобщают эрмитову метрику; 4) к нелинейным электродинамике и мезодинамике (варианта II теории Борна и Инфельда (R. Infeld), основанной на несимметричных $g_{[ik]}$; см. также M. A. Tonnelat, La theóre du champ unifié d'Einstein, Paris, 1955); 5) к конформной теории (Схоутен (I. A. Schouten) Гоффман (B. Hoffman); см. также РЖМат, 1955, 5289), причем конформные гравитационные уравнения теории относительности эквивалентны некоторой нелинейной электродинамике; 6) к неголономной теории Врэнчану (G. Vranceanu), как обобщение теории погружения (Мандель (G. Mandel), Ю. Б. Румер).

Необходимо сравнение теорий с несимметричным g_{ik} и других теорий с несимметричной связностью (неголономная теория, теория Инфельда, финслерова теория Хорват (J. I. Horváth). В неголономной единой теории, созданной Врэнчану (C. r. Acad. sci., 1935, 200, 2056; J. Phys., 1936, 7 и др.) и развитой далее Яно (K. Yano) гиперповерхность V_5^4 определена в V_5 уравнением Пфаффа: $ds^2 = dx^5 - \varphi_l dx^l = 0$. В отличие от теории с несимметричным g_{ik}: 1) V_5^4 (электромагнитное поле) имеет прямой физический смысл; 2) справедливы уравнения Эйнштейна, следовательно, в частности, классические решения с центральной симметрией (РЖМат, 1957, 5907). Теория с несимметричным g_{ik} и неголономная теория составляют два описания одного и того же единого поля. Можно дать неголономное толкование и единой теории (пятиоптике) Ю. Б. Румера (Ж. эксперим. и теор. физики, 1949, 19, 1 и 3 и др.)

A. Popovici, I. Teodorescú

1973. Исследование уравнений поля единой теории Эйнштейна. Лихнерович (Étude des équations du champ de la théorie unitaire d'Einstein. Lichnerowicz A.), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), 25, 121—133 (франц.; рез. итал., англ.)

Ставится вопрос о решении задачи Коши для уравнений единой теории поля Эйнштейна. Эти уравнения, выводимые из вариационного принципа, после некоторых преобразований и введения новых неизвестных будут иметь вид: $\partial_\rho \mathfrak{G}^{[\rho\beta]} = 0$, $\partial_\rho g^{\alpha\beta} + L^{\alpha}_{\sigma\rho}g^{\sigma\beta} + L^{\beta}_{\rho\sigma}g^{\alpha\sigma} = 0$, $P_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$, где $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}$, $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $P_{\alpha\beta}$, S_β явно выражаются через объекты Эйнштейна, определяющие поле: тензор поля $g_{\alpha\beta}$ (класса C^3) и аффинную связность $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (класса C^2).

Задача Коши решается в постановке: задавая на гиперповерхности S компоненты основного тензора и их первые частные производные и компоненты вектора S_α, требуется определить вблизи S метрический тензор и вектор S_α, удовлетворяющие уравнениям поля. Доказывается, что существует одно и только одно реальное решение.

Этот результат не имеет места только для некоторых специальных гиперповерхностей, уравнения которых близки к уравнениям характеристических многообразий в гравитационной теории; ввиду этого автор использует указанные гиперповерхности для определения фронта волны единой теории Эйнштейна. А. З. Петров

1974. О некоторых обобщенных плоских волновых решениях несимметрических единых теорий поля. Такэно (On some generalized plane wave solutions of non—symmetric unified field theories. Takeno Hyôitirô), Tensor, 1957, 7, № 1, 34—58 (англ.)

Уравнения (E_2) (реф. 1975) допускают точные решения такие, что соответствующее электромагнитное поле

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijkl}\sqrt{-g}\,g^{kl}/2$$

совпадает с полем плоских электромагнитных волн обычной теории Максвелла, в предположении, что симметрическая часть тензора g_{ij} совпадает с метрическим

тензором пространства Минковского. Работа посвящена обобщению этого результата на случай, когда это предположение ослаблено; предполагается, что V_4 сферически-симметрично и конформно-плоско (часть I), или имеет плоскость симметрии (часть II).

Метод исследования тот же, что и в предыдущих статьях (реф. 1975—1977). Если $ds^2 = A(rt)(-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2)$ (где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$), то

$$g_{ij} = \begin{Vmatrix} -A & 0 & \rho & -\rho \\ 0 & -A & \sigma & -\sigma \\ -\rho & -\sigma & -A & 0 \\ \rho & \sigma & 0 & A \end{Vmatrix},$$

где ρ и σ — произвольные функции $(z-t)$. Путем решения первой группы уравнений в (E_2) находится связность и показывается, что она удовлетворяет тождественно второй группе уравнений. Вычисляются компоненты R_{ij} из условия, чтобы „приблизительно" удовлетворялась 3-я группа уравнений (S_1), и находится вид функции $A(rt)$: либо $A = (1-kt)^{-2}$, либо

$$A = \left[1 + \frac{k^2(r^2-t^2)}{4}\right]^{-2}$$

Этого и достаточно. Если $k \neq 0$, оба случая не являются решениями (S_2) даже „приблизительно".

Для того чтобы g_{ij} удовлетворяли (E_1) (система (E_1) состоит из системы (E_2) (см. реф. 1975) и уравнений $R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 0$), необходимо и достаточно, чтобы пространство-время было пространством Минковского с метриками либо $A = 1$, либо $A = (r^2-t^2)^{-2}$. В этих случаях g_{ij} удовлетворяет и системе (E_2). Только третий случай $A = 1$ дает точное решение системы (E_2), остальные решения являются „приближенными". Показано, что полученные метрики существенно различны, т. е. не могут быть переведены одна в другую каким-либо преобразованием. В случае II (V_4 имеет плоскость симметрии)

$$ds^2 = -A(zt)(dx^2+dy^2) - B(zt)(dz^2-dt^2).$$

Получается

$$g_{ij} = \begin{Vmatrix} -A & 0 & \rho & -\rho \\ 0 & -A & \sigma & -\sigma \\ -\rho & -\sigma & -B & 0 \\ \rho & \sigma & 0 & B \end{Vmatrix},$$

где σ и ρ — функции $(z-t)$. Затем проводится исследование, аналогичное вышеизложенному, и формулируются аналогичные теоремы. Библ. 6 назв. К. М. Белов

1975. Некоторые волновые решения уравнений общей теории тяготения Эйнштейна. Такэно (Some wave solutions of Einstein's generalized theory of gravitation Takeno Hyoitiro), Tensor, 1956, **6**, № 2, 69—82 (англ.)

Рассматриваются два экстремальных случая для уравнений поля тяготения

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0,$$

$$\Gamma^s_{\underset{\sim}{ts}} = 0 \quad \text{(кососимметрическая часть)}, \ (E_2)$$

$$R_{kl} \equiv \Gamma^s_{kl,s} - \Gamma^s_{ks,l} - \Gamma^s_{tl}\Gamma^t_{ks} + \Gamma^s_{ts}\Gamma^t_{kl} = 0$$

$$(i,k,\ldots = 1,2,3,4):$$

1) чисто гравитационный, уже изученный достаточно хорошо, и 2) чисто электромагнитный. Первый характеризуется тем, что и g_{ij} и Γ^r_{ij} симметричны по i и j. Тогда пространство-время становится римановым, R_{ij} — тензором Риччи пространства-времени, а (E_2) — уравнениями поля общей теории относительности. Для характеристики второго принимаются следующие, естественные, по мнению автора, предположения:

а) Пусть $g_{ij} = g_{ij} + g_{\underset{\sim}{ij}}$ — сумма симметрической и кососимметрической частей. g_{ij} совпадает с метрическим тензором пространства Минковского: $g_{\underset{\sim}{11}} = g_{\underset{\sim}{22}} = g_{\underset{\sim}{33}} = -g_{\underset{\sim}{44}} = 1$, $g_{\underset{\sim}{ij}} = 0$, $i \neq j$.

б) Компоненты g_{ij} являются функциями $z-t$.

в) $\dfrac{\partial}{\partial x^j}\sqrt{-g}$; $g^{ij} = 0$.

г) $g_{\underset{\sim}{14}} = g_{\underset{\sim}{23}} = 0$.

В этом случае удается найти некоторые волновые решения, соответствующие обычным электромагнитным плоским волнам. Именно, при $g_{\underset{\sim}{31}}g_{\underset{\sim}{24}} + g_{\underset{\sim}{12}}g_{\underset{\sim}{34}} = g^2_{\underset{\sim}{24}} + g^2_{\underset{\sim}{34}} - g^2_{\underset{\sim}{31}} - g^2_{\underset{\sim}{12}} = 0$ получается, что

$$(g_{ij}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \rho & -\rho \\ 0 & 1 & \sigma & -\sigma \\ -\rho & -\sigma & 1 & 0 \\ \rho & \sigma & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

где $g_{\underset{\sim}{13}} = \rho$, $g_{\underset{\sim}{23}} = \sigma$ удовлетворяет уравнениям поля (E_2) при произвольных $\rho(z-t)$ и $\sigma(z-t)$. Электромагнитное поле $F_{ij} = \varepsilon_{ijkl}\sqrt{-g}\ g^{kl}/2$ совпадает с полем плоских волн обычной теории Максвелла.

Далее изучается задача наложения двух противоположно направленных электромагнитных волн и доказывается, что это, вообще говоря, невозможно, хотя можно наложить на плоскую электромагнитную волну некоторую гравитационную волну. К. М. Белов

1976. Добавление к статьям «Некоторые волновые решения уравнений общей теории тяготения Эйнштейна» и «О некоторых сферических волновых решениях несимметрических единых теорий поля». Такэно (An addendum to «some wave solutions of Einstein's generalized theory of gravitation» and «On some spherical wave solutions of non-symmetric unified flield theories». Takeno Hyôitirô), Tensor, 1957, **7**, № 2, 141—142 (англ.)

Отмечается, что вопросами, которым посвящены предыдущие статьи автора (реф. 1975 и 1977), интересовался Главатый (V. Hlavatý); приводится неполный перечень работ последнего и устанавливается связь между результатами Главатого и Такэно. Оказывается, что решения, полученные автором, принадлежат „третьему классу" по Главатому, который рассматривал также и „приближенные" решения. „Третьему классу" принадлежат и решения, найденные автором в другой статье (реф. 1974). К. М. Белов

1977. О некоторых сферических волновых решениях несимметрических единых теорий поля. Такэно (On some spherical wave solutions of non-symmetric unified field theories. Takeno Hyoitiro), Tensor, 1956, **6**, № 2. 90—103 (англ.)

Сильные уравнения поля (E_2) (реф. 1975) (Шредингера) и слабые (E_1) (реф. 1974) (Эйнштейна) включаются в семейства уравнений

$$g_{ij,k} - g_{sj}\Gamma^s_{ik} - g_{is}\Gamma^s_{kj} = 0,$$

$$\Gamma^s_{\underset{\sim}{is}} = 0, \qquad (S_2)$$

$$R_{ij} + \lambda g_{ij} = 0,$$

$$g_{ij,k} - g_{sj}\Gamma^s_{ik} - g_{is}\Gamma^s_{kj} = 0, \quad \Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0,$$
$$R_{ij} + \lambda g_{ij} = 0 \qquad (S_1)$$
$$(R_{ij} + \lambda g_{ij})_{,k} + (R_{jk} + \lambda g_{ik})_{,i} + (R_{ki} + \lambda g_{ki})_{,j} = 0$$

соответственно, таким образом (E_2) и (E_1) получаются из (S_2) и (S_1) соответственно при $\lambda \to 0$.

В предыдущих работах автора показано, что (E_2) допускают решения, совпадающие с плоскими электромагнитными волнами обычной теории Максвелла (реф. 1975). Статья посвящена отысканию решений, представляющих сферические электромагнитные волны. Рассматривая статическое, сферически-симметричное пространство-время

$$ds^2 = -A(r)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) + C(r)\,dt^2$$

и в предположениях: а) симметрическая часть g_{ij} совпадает с коэффициентами этой формы, б) $g_{\underset{\vee}{14}} = g_{\underset{\vee}{23}} = 0$, в) $g_{\underset{\vee}{12}}g_{\underset{\vee}{34}} + g_{\underset{\vee}{31}}g_{\underset{\vee}{24}} = 0$, автор получает следующие компоненты тензора g_{ij}, который дает сферические волны, соответствующие трансверсальным электромагнетическим волновым решениям уравнений Максвелла:

I.
$$g_{\underset{\vee}{12}} = \frac{f_1F_2}{s}\sqrt{A/C}, \quad g_{\underset{\vee}{13}} = -g_1F_2\sqrt{A/C},$$
$$g_{\underset{\vee}{24}} = \frac{f_1F_2}{s}, \quad g_{\underset{\vee}{34}} = -g_1F_2, \quad g_{\underset{\vee}{14}} = g_{\underset{\vee}{23}} = 0,$$

или

II.
$$g_{\underset{\vee}{12}} = \frac{f_1F_1}{s}\sqrt{A/C}, \quad g_{\underset{\vee}{13}} = -g_1F_1\sqrt{A/C},$$
$$g_{\underset{\vee}{24}} = -\frac{f_1F_1}{s}, \quad g_{\underset{\vee}{34}} = g_1F_1, \quad g_{\underset{\vee}{14}} = g_{\underset{\vee}{23}} = 0,$$

где f_1 и g_1 — гармонические сопряженные функции:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \mu} = -\frac{\partial f_1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \psi} = \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \quad (\mu = \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \text{const}),$$

а F_1 и F_2 — произвольные функции $\sigma + t$ и $\sigma - t$ соответственно, причем $\sigma = \int \sqrt{A/C}\,dr$.

Затем, решая первую группу уравнений в (S_2), автор находит связность, соответствующую $g_{ij}/$, и показывает, что уравнения $\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0$ удовлетворяются тождественно, находит компоненты R_{ij} и проверяет, удовлетворяется ли третья группа уравнений в (E_1), (E_2), (S_1), (S_2).

В результате получаются теоремы:

Для того чтобы $g_{ij}/$ удовлетворяли уравнениям (S_1), необходимо и достаточно, чтобы пространство-время, определенное посредством g_{ij}, было пространством де Ситтера (de Sitter) $\left[\frac{1}{A} = C = 1 - \frac{\lambda r^2}{3}\right]$ с кривизной 4λ. Сильным уравнениям (S_2) g_{ij} удовлетворять не может, пока $\lambda \neq 0$.

Для того чтобы $g_{ij}/$ удовлетворяли (E_1), необходимо и достаточно, чтобы пространство-время было пространством Минковского. Тогда эти g_{ij} удовлетворяют и (E_2).

Обе теоремы — в предположении, что электромагнитное поле мало по сравнению с единицей.

К. М. Белов

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1978. Некоторые вопросы теории поверхностей в римановом пространстве. Погорелов А. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 156—163 (рез. англ.)

Ряд результатов глобальной теории поверхностей евклидова пространства обобщается на поверхности трехмерного риманова пространства R^3. Показывается, что замкнутая гомеоморфная сфере поверхность в R^3 допускает бесконечно малые изгибания с тем же произволом, как поверхность евклидова пространства допускает тривиальные бесконечно малые изгибания (движения). Основное внимание уделяется поверхностям в R^3, у которых гауссова кривизна определенным образом ограничена снизу (аналоги выпуклых поверхностей). Доказывается ряд теорем об изгибании таких поверхностей и о реализации на них заданной двумерной римановой метрики. Если такая поверхность, кроме того, замкнута, то указывается способ получения оценок для нормальных кривизн и для производных любого порядка от пространственных координат точки поверхности по ее координатам на поверхности. Г. Ф. Лаптев

1979. Характеристические классы однородных пространств. Адлер (Characteristic classes of homogeneous spaces. Adler Alfred), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 348—365 (англ.)

Понятие характеристического кольца когомологий, введенное Л. С. Понтрягиным для пространств римановой связности, было обобщено А. Вейлем на произвольные связности в главных расслоенных многообразиях. При этом гомотопным связностям соответствует одно и то же характеристическое кольцо.

Рассматривая связность Рашевского (каноническую связность второго рода по Номидзу) (Тр. Семинара по векторн. тензорн. анализу, 1952,9; РЖМат, 1956,7605), определенную в пространстве компактной группы Ли G, расслоенной левыми классами смежности по связной замкнутой подгруппе K, автор показывает, что характеристическое кольцо многообразия G/K, определенное этой связностью, содержит в себе кольцо Понтрягина того же многообразия. Это открывает путь для исследования кольца Понтрягина G/K, исходя из структурных свойств G и K. Например, доказывается, что, если K коммутативна, все циклы Понтрягина на G/K равны нулю. Если G/K симметрическое, а также если K — полупростая компонента централизатора коммутативной связной подгруппы группы G, циклы Понтрягина имеют размерность не большую, чем $\dim G/K$ — (ранг G — ранг K). Далее показано, что для полупростой группы K всякий симметричный тензор $T(K)$, инвариантный относительно присоединенной группы, определяется его значениями на картановской подалгебре алгебры Ли группы K. Отсюда тотчас же получаются два следствия: 1) если ранг $G \neq$ рангу K, характеристика Эйлера G/K равна нулю (это доказано Хопфом и Самельсоном в 1940 г.); 2) если ранг $G =$ рангу K, то всякому ненулевому инвариантному симметричному тензору $T(G)$ соответствует при естественном отображении ненулевой $T(K)$. А. М. Васильев

1980. Теорема Гаусса — Бонне для V-многообразий. Сатакэ. (The Gauss—Bonnet theorem for V-manifolds. Satake Ichiro), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 4, 464—492 (англ.)

Пусть M — хаусдорфово пространство. Локальной униформизующей системой (л. у. с.) его открытого подмножества U называется совокупность следующих объектов: $\tilde{U}$ связного открытого множества в R^m (m-мерном евклидовом пространстве), G — конечной группы C^∞-автоморфизмов $\tilde{U}$ с множеством неподвижных точек размерности $\leqslant m - 2$, φ — непрерывного отображения $\tilde{U}$ на U такого, что $\varphi\circ\sigma = \varphi$ для всех $\sigma \in G$, индуцирующего гомеоморфизм $\tilde{U}/G$ на U.

Под V-многообразием понимается пространство M с заданной на нем системой F л. у. с., покрывающих M и согласованных между собой в определенном естественном смысле. На V-многообразиях можно рассматривать векторные и тензорные поля, в частности, риманову геометрию. Примерами V-многообразий является фактор-пространства обычных многообразий по вполне разрывным группам их гомеоморфизмов (вообще говоря, содержащих неподвижные точки).

Пусть X — векторное поле на V-многообразии. Оно определяет векторное поле $X_{\widetilde{U}}$ в каждом $\widetilde{U}$ каждой его л. у. с. Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — особые точки поля X, $\widetilde{p}$ — прообраз p_i в некотором $\widetilde{U}$, для которого $p_i \in \varphi(\widetilde{U})$, $I_{\widetilde{p}}(X_{\widetilde{U}})$ — индекс особой точки $\widetilde{p}$ в $X_{\widetilde{U}}$. Индекс особой точки p_i определяется по формуле $I_{p_i}(X) = I_{\widetilde{p}}(X_{\widetilde{U}})/N_{G\widetilde{p}}$, где $N_{G\widetilde{p}}$ — порядок стационарной подгруппы точки $\widetilde{p}$ в группе G автоморфизмов $\widetilde{U}$. Эйлеровой характеристикой m-мерного V-многообразия называется число $\chi_v(M) = (-1)^m \sum_{i=1}^{s} I_{p_i}(X)$. Ее можно определить и классическим образом, рассматривая на M триангуляции специального вида. Для m нечетного она равна нулю. Пусть на компактном ориентируемом четномерном V-многообразии определена риманова метрика и Ω — форма гауссовой кривизны этой метрики (Chern. S. S. Ann Math. 1945, 46, 674—684). Тогда

$$\int_m \Omega = \chi_v(M). \qquad (1)$$

Формула обобщается и на V-многообразия с границей.

Пусть H_n — пространство комплексных симметрических матриц $Z = X + iY$ порядка n с мнимыми частями $Y > 0$, а M_n — модулярная группа Зигеля, т. е. группа всех симплектических матриц $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ порядка $2n$ с целыми коэффициентами, действующая в H_n по закону $\sigma(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$. Пространство $V_n = H_n/M_n$ — комплексное аналитическое V-многообразие. Хотя оно не компактно, для него в определенном смысле верна формула (1). Этот результат, вместе с результатами Зигеля, применяется к изучению общего наименьшего кратного порядков всех стационарных подгрупп группы $M_n/\{\pm E_{2n}\}$. А. М. Васильев

1981. Об изометрическом погружении. Кёйпер (Sur l'immersion isométrique. Kuiper N. H., Colloque de topologie et géométrie différentielle, Strasbourg, 1952, № 4, 3 pp. La Bibliotheque Nationale et Universitaire de Strasbourg, 1953) (франц.)

Эта заметка является продолжением статьи Чжэня (Chern) и Кёйпера (Kuiper. Ann. Math. 1952 (2) 56, 422—430)

Доказывается следующая алгебраическая лемма: Пусть

$$1 \leqslant i, j, k, m \leqslant n; \quad n+1 \leqslant r, s, t \leqslant n+N;$$

$$p^{ij} = x^i y^j - x^j y^i; \quad A_{rij} = A_{rji};$$

$$F(p) = \sum_{r=n+1}^{n+N} (A_{rik}A_{rjm} - A_{rim}A_{rjk})\, p^{ij} p^{km}$$

и $F(p)$ — отрицательно определенная форма переменных p^{ij}.

Тогда $N \geqslant \min(3, n-1)$. Эта лемма используется для доказательства того, что V_5 (которое является метрическим произведением U_3 с неположительной кривизной сечения и U_2) не может быть вложено в сферу S_7. Далее, какое-либо V_5 (которое является метрическим произведением компакта U_3 с неположительной кривизной сечения и компакта U_2) не может быть погружено в евклидово E_8. C. B. Allendoerfer

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 554.

1982. Дифференцируемые расслоения r-сферы с помощью экваториальных k-сфер. Сегре (Fibrazioni differenziabili di un'r-sfera mediante k-sfere equatoriali. Segre Beniamino), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 4, 383—392 (итал.)

В одной из предыдущих заметок о переносе теории расширения с алгебраического поля на дифференцируемое автор показал существенное значение для ее завершения проблемы определения дифференцируемых расслоений r-сферы с помощью экваториальных k-сфер. Этой последней задачей занимались Хопф (H. Hopf), Лабуре (J. Labourer), Хирш (G. Hirsch), Стинрод (N. F. Steenrod) и Уайтхед (J. H. C. Whitehead). Эта проблема эквивалентна проблеме расслоения проективного действительного S_r с помощью подчиненных пространств S_k $(0 < k < r)$ и включает в себя локальную проблему о расслоении с помощью S_k r-размерной части S_r; для решения последней числа r и k не могут быть выбраны произвольно, поскольку необходимо, как здесь доказывается, чтобы

$$r \equiv k \pmod{2^p}, \qquad (1)$$

где p — такое наименьшее целое, что $2^p > k$; для решения же проблемы в целом необходимо (Стинрод, Уайтхед), сверх того, чтобы

$$k = 2^p - 1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$r + 1 \equiv 0 \pmod{k+1}. \qquad (3)$$

Пусть Ω будет система ∞^h дифференцируемых пространств S_k, принадлежащих действительному проективному пространству S_r, и предположим, что через каждую точку данной области S_r проходит одно и только одно S_k из Ω с условием, что это S_k целиком лежит в указанной области. Это требует, чтобы

$$h + k = r, \qquad (4)$$

а так как два различных S_k не должны встречаться, то $2k + 1 \leqslant r$ и, следовательно, $k < h$.

Автор показывает (координатным способом), что в данных условиях общая точка какого-либо S_k из Ω не будет фокусом Ω (фокус системы пространств в смысле К. Сегре).

Однако в силу (4) система Ω допускает фокальное многообразие алгебраическое и измерения меньше k. Таким образом это фокальное многообразие не имеет действительных точек.

Далее, опираясь на прием получения этого многообразия, автор устанавливает, что при принятых допущениях относительно Ω каждое из целых чисел

$$\binom{h}{1}, \binom{h}{2}, \ldots, \binom{h}{k}$$

должно быть четным. Пользуясь разложением чисел l и h, входящих в выражение $\binom{h}{l}$ и удовлетворяющих условию $0 < l < h$ по двоичной системе, автор показывает, что для удовлетворения указанного только что условия необходимо выполнение соотношения (1).

Пусть $\mathfrak{A}$ будет алгебра порядка $n \geqslant 2$ над действительным полем, которую мы предположим примитивной (т. е. не имеющей делителей нуля), но не обязательно коммутативной и ассоциативной.

Относительно фиксированного базиса $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ каждый элемент $\mathfrak{x}$ алгебры $\mathfrak{A}$ будет группой n компонент $x^1, x^2, \ldots, x^n$ действительных; все они обращаются в нули только при $\mathfrak{x} = 0$. Уравнение $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}t$ при $t \neq 0$ для двух элементов $\mathfrak{x}$ и t будет иметь единственное решение $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{A}$.

Если взять целое $m \geqslant 2$, то всякой упорядоченной группе m элементов $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{z}, t$ будет соответствовать точка P с координатами $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, \ldots, z^1, \ldots, z^n, t^1, \ldots, t^n)$ в S_r измерения $r = mn - 1$. Такая точка (исключая случай $t^1 = t^2 = \ldots = t^n = 0$) определит однозначно группу $m - 1$ элементов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{c}$ таких, что

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}t, \ \mathfrak{y} = \mathfrak{b}t, \ \ldots, \ \mathfrak{z} = \mathfrak{c}t.$$

Обратно, выбрав произвольно $m - 1$ элементов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{c}$ из $\mathfrak{A}$, т. е. $h = (m - 1)n$ их компонент, из указанных уравнений получим h линейных однородных уравнений (между собой независимых) между координатами P и они, таким образом, представляют S_k (принадлежащее S_r) измерения

$$k = r - (m - 1)n = n - 1.$$

Меняя $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{c})$, получим локальное расслоение (дифференцируемое) для S_r, с помощью ∞^h подпространств S_k, областью их наполнения будет S_r, из которого удалены точки S_{r-n}, определяемого уравнением $t = 0$. Автор указывает два случая, когда S_{r-n} в целом расслоено подпространствами S_k, так что с предыдущим получится дифференцируемое расслоение в целом всего S_r: $m = 2$ (алгебра $\mathfrak{A}$ любая, S_k одно идентично с S_{r-n}), $m > 2$ (алгебра ассоциативная); расслоение S_{r-n} дается подпространствами S_k, определяемыми уравнениями

$$t = 0, \ \mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \ldots : \mathfrak{z} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \ldots : \mathfrak{c}.$$

Применяя указанные выше соображения к действительной примитивной алгебре порядка n (не обязательно ассоциативной), автор получает теорему, ранее полученную Хопфом: порядок примитивной действительной алгебры всегда равен степени 2.

Для указанного выше локального расслоения

$$r = m \cdot 2^p - 1, \ k = 2^p - 1.$$

и это дает наиболее общее решение условий (1) и (2), которые необходимы для расслоения в целом; остается исследовать, для каких значений m и p это расслоение в целом на самом деле существует; автор обещает вернуться к этому вопросу в последующей работе.

В заключение дается ряд примеров. При $k = 1$ ($p = 1$) r будет нечетным, $r = 2s + 1$, и это будет единственным условием для существования расслоения (локального и в целом) S_r с помощью прямых. Действительное S_{2s+1} расширим на комплексное поле и рассмотрим в нем два пространства S'_s и S''_s косых и комплексно-сопряженных. Множество ∞^{2s} прямых, соединяющих каждую точку S' с его сопряженной точкой S'', дает одно из расслоений в целом действительного S_{2s+1} с помощью действительных прямых.

Общий линейный комплекс K плоскостей в S_{2s+1} ($s \geqslant 2$) имеет ∞^{2s} особых прямых, т. е. таких, что любая плоскость через каждую из них принадлежит K. Эти прямые образуют алгебраическую систему Ω и каждая точка в S_{2s+1} лежит на одной и только на одной из этих прямых, за исключением точек многообразия V^{ν}_{2s-2} порядка $\nu = \frac{1}{6}(s + 1)(2s^2 - 5s + 6)$. Система Ω на каждой из своих прямых l имеет $2s$ фокусов, именно точки пересечения с V^{ν}_{2s-2}, считаемые вдвойне. Если s четное, то K и l можно выбрать так, что фокусы будут попарно комплексно-сопряженными и тогда прямые системы Ω, сколь угодно близкие к l, дадут локальное расслоение S_{2s+1}. Только в случае $s = 2$ это расслоение не отличается от данного выше расслоения в целом, здесь $\nu = 2$ и V^{ν}_{2s-2} распадаются на две косые плоскости (Венерони (Veneroni E., 1908)). При $s > 2$ этим способом получим расслоение S_{2s+1} в целом, отличное от указанного выше, если K можно выбрать так, что V^{ν}_{2s-2} не имеет действительных точек (тогда ν четное и $s \equiv 2 \pmod 4$).

Автор дает и другой пример локального расслоения с помощью прямых, отличных от примера указанного выше первым. В примерах для $k = 2$ указывается, что нельзя расслоить действительное S_6 в целом плоскостями, но для него возможны локальные расслоения с помощью плоскостей.

Для $k = 3$ доказывается, что действительное проективное пространство S_{4m-1} ($m \geqslant 2$) возможно расслоить в целом с помощью пространства S_3 по крайней мере двумя проективно различными случаями. С. С. Бюшгенс

1983. Проективная характеристическая алгебра почти комплексных многообразий. Цисман (Algèbre caractéristique projective des variétés presque-complexes. Zisman Michel), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 20, 2436—2438 (франц.)

На почти комплексном многообразии V_{2n} рассматривается главное расслоенное пространство $E \to V_{2n}$ со структурной группой $PU(n)$. Такое пространство существует для любого почти комплексного многообразия.

В работе изучается характеристическая алгебра пространства $E \to V_{2n}$. Доказана следующая теорема: Характеристическая алгебра $E \to V_{2n}$ порождена классами когомологий $c_2, \ldots, c_{2n}$, которые выражаются через характеристические классы Чжень Шень-шэня c_{2p} многообразия V_{2n} по формулам

$$c_{2p} = c_{2p} - c_2 c_{2p-2} \frac{(n-p+2)}{(n+1)} + \ldots + (-1)^p c_2^p \frac{(n-p+2)\ldots(n+1)}{p!\,(n+1)^p}.$$

Д. В. Беклемишев

1984. Исправление к статье «Расслоенные римановы пространства с изометричными параллельными слоями». Исихара (Correction: Fibred Riemannian spaces with isometric parallel fibres. Ishihara Shigeru), Тохоку сугаку дзасси, Tohoku Math. J., 1956, 8, № 3, 333 (англ.)

Автор уточняет приведенное в своей статье (РЖМат, 1957, 7358) недостаточно четкое определение расслоенного риманова пространства и исправляет формулировку третьего условия леммы 1. Г. Ф. Лаптев

1985. О комплексных пространствах с аффинной связностью A_1. Телеман К., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, **1**, № 2, 189—204

Рассматривается строение в целом локально евклидовых двумерных пространств аффинной связности K_2, для которых можно определить угол, сохраняющийся при параллельном перенесении. Это равносильно изучению одномерных комплексных пространств аффинной связности. Моделью K_2 является риманова поверхность по Вейлю (H. Weyl). Она не может быть произвольной: например, на сфере Римана нет всюду регулярной комплексной аффинной связности. Универсаль-

ная накрывающая пространства K_2 является односвязной римановой поверхностью и эквивалентна либо плоскости Гаусса, либо внутренности единичного круга. В первом случае K_2 называется нормальным.

Фундаментальная группа Γ не нормального K_2 имеет 3 инвариантных подгруппы Γ_1, Γ_2, Γ_3 такие, что: 1) регулярная накрывающая K_2, определяемая Γ_1, обладает однозначной локально евклидовой метрикой, сохраняющейся при параллельном перенесении, 2) регулярная накрывающая, определяемая Γ_2, обладает абсолютным параллелизмом, 3) регулярная накрывающая, определяемая Γ_3, однозначно развертывается на евклидову плоскость.

В последней части работы указан прием, позволяющий каждой функции комплексного переменного $\varphi(u)$ поставить в соответствие пространство K_2, имеющее, возможно, полярные особенности в точках, соответствующих полюсам $\varphi(u)$ и точкам ветвления $\varphi(u)$ или ее обратной функции. А. М. Васильев

1986. Однородные симметрические гармонические пространства. Аллами жон (Espaces homogènes symétriques harmoniques. Allamigeon André-Claude), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 7, 1004—1005 (франц.)

Пусть G/H — однородное пространство с инвариантной симметрической в смысле Э. Картана метрикой, g и h — алгебры Ли, отвечающие группам G и H, m — подпространство в g, соответствующее собственному значению —1 инволютивного автоморфизма σ в g. Риманово пространство называется гармоническим относительно какой-нибудь своей точки, если в нем уравнение Лапласа $\Delta v = 0$ допускает решение $v = \varphi(s)$, зависящее только от геодезического расстояния s от этой точки. Если пространство обладает таким свойством относительно любой точки, то оно называется вполне гармоническим. Наконец, просто гармоническим называется такое вполне гармоническое риманово пространство, в котором $\varphi(s) = 1/s^{n-2}$. Автор продолжает (РЖМат, 1957, 5135) изучение симметрических гармонических пространств. Доказываются две теоремы:

1) Если однородное симметрическое пространство G/H является гармоническим, то оно либо просто гармоническое, либо его группа движений G полупростая.

2) Для того чтобы однородное симметрическое пространство было просто гармоническим, необходимо и достаточно, чтобы плоскость m включалась в некоторый нильпотентный идеал алгебры Ли g.

Заметим, что второй случай теоремы 1) разобран автором в указанной выше статье. Указывается, что результаты обеих статей дают свойства самого однородного симметрического пространства и не зависят от выбора метрики, инвариантной относительно G.

Г. И. Кручкович

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

1987. Логарифмические полости риманова пространства двух измерений. Ставрулакис (Nappes logarithmiques d'un espace riemannien à deux dimensions. Stavroulakis Nicias), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 8, 1149—1152 (франц.)

Логарифмические и конические точки в римановом пространстве двух измерений. Ставрулакис (Les points logarithmiques et les points coniques dans les espaces de Riemann à deux dimensions. Stavroulakis Nicias), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 9, 1368—1371 (франц.)

Подходящим выбором системы координат линейный элемент конуса в трехмерном евклидовом пространстве можно привести к такому виду, чтобы коэффициенты метрического тензора были функциями, определенными везде, кроме нуля, и однородными степени нуль. Риманово пространство с метрикой, обладающей этим свойством, автор называет логарифмической полостью. Метрика $ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j$ может быть приведена к виду

$$ds^2 = \gamma_{11}du_1^2 + 2u_1\gamma_{12}du_1du_2 + u_1^2\gamma_{22}du_2^2,$$

где $\gamma_{ij}(u_2)$ — периодические функции. Вычисляя тензор Римана, имеем $R_{1212} = -\sqrt{\gamma}\,q'(u_2)$, где $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$, а $q = \dfrac{2\gamma_{12} - \gamma'_{11}}{2\sqrt{\gamma}}$ — функция, играющая основную роль в изучении свойств такого пространства.

Логарифмическими точками называются изолированные точки сингулярности, в окрестности которых пространство имеет свойства логарифмической полости. Таким образом предполагается, что в окрестности логарифмической точки (0 0)

$$ds^2 = (a_{ij} + \delta_{ij})dx^i dx^j, \quad \text{где } \delta_{ij}(00) = 0.$$

Логарифмическая полость $ds_3^2 = a_{ij}dx^i dx^j$ называется касательной к пространству в логарифмической точке. Точка сингулярности называется конической, если касательная поверхность является конусом ($q = \text{const}$). Понятия логарифмической и конической точек являются инвариантами при смене координации. Дается обобщение теоремы Гаусса-Бонне на случай окрестности изолированной логарифмической или конической точки.

К. М. Белов

1988. Преобразование импеданса распространением изометрического кругового метода на трехмерное гиперболическое пространство. Болиндер (Impedance transformations by extension of the isometric circle method to the three—dimensional hyperbolic space. Bolinder E. Folke), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 1, 49—61 (англ.)

Преобразование импеданса на комплексной плоскости задается дробно-линейным преобразованием

$$Z' = \frac{aZ + b}{cZ + d},$$

где a, b, c, d — комплексные коэффициенты, причем $ad - bc = 1$. Если Z_1 и Z_2 — инвариантные точки, то преобразование переписывается в виде

$$\frac{Z' - Z_1}{Z' - Z_2} = q\frac{Z - Z_1}{Z - Z_2},$$

где $q = {}^1/_2(a + d)[a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}] - 1$ есть множитель преобразования.

Основное внимание уделяется нахождению инвариантных точек и множителя. Комплексная плоскость импеданса стереографически отображается на риманову единичную сферу. Преобразование импеданса Z в Z' (точки сферы (x, y, z) в точку сферы (x', y', z') характеризуется шестью независимыми условиями и является преобразованием группы Лоренца. Риманова сфера — абсолютная поверхность с гиперболическим измерением внутри и эллиптическим вне сферы.

Импеданс Z' из импеданса Z получается с помощью графического метода. Преобразованию импеданса соответствует неевклидово движение в гиперболическом пространстве.

Если задать три значения импеданса на одном конце сети и измерить импедансы на другом конце, то можно и геометрически и аналитически найти инвариантные точки и множитель преобразования импеданса.

Показано, что при каскадном соединении цепей инвариантные точки и множитель преобразования импеданса

результирующей сети, также могут быть найдены графическим и аналитическим методами. В. А. Иглицкая

1989. О линейчатой геометрии тензора кривизны. Чаки (On the line geometry of a curvature tensor. Chaki M. C.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, **47**, № 4, 217—226 (англ.)

Несобственная $(n-1)$-плоскость S_{n-1} касательного центроаффинного E_n, ассоциированного с неособой точкой $P(x^i)$ риманова пространства V_n с фундаментальным тензором g_{ij}, рассматривается как $(n-1)$-проективная плоскость; координаты X^i контравариантного вектора в E_n — как однородные координаты точки в S_{n-1}; $(n-2)$-квадрика в S_{n-1}, определяемая уравнением

$$g_{ij}X^iX^j = 0, \qquad (1)$$

называется фундаментальной.

Если в V_n задан произвольный объект аффинной связности Γ_j^i, ковариантный тензор кривизны которого есть F_{ijkl}, то уравнение

$$F_{ijkl}p^{ij}p^{kl} = 0, \qquad (2)$$

где p^{ij} — однородные координаты прямой в S_{n-1}, определяет в S_{n-1} квадратичный комплекс прямых, который также может быть определен уравнением

$$E_{ijkl}p^{ij}p^{kl} = 0, \qquad (3)$$

где $E_{ijkl} = F_{ijkl} + F_{jilk} + F_{klij} + F_{lkjl}$.

Подробно рассматриваются случаи $n = 3$ и $n = 4$. Доказывается, например, что:

при $n = 3$ все прямые комплекса (2) касаются конического сечения, уравнение которого в тангенциальных координатах имеет вид:

$$G^{ij}p_ip_j = 0, \qquad (4)$$

где $G^{ij} = {}^1/_4\,\varepsilon^{imn}\varepsilon^{jpq}E_{mnpq}$, ε^{imn} — кососимметричный тензор с компонентами $\pm\sqrt{g}$,0. Коника (4) называется коникой-огибающей F_{ijkl};

при $n = 3$ точки пересечения двух коник

$$\begin{aligned} {}_1F_{ij}x^ix^j &= 0 \quad ({}_1F_{ij} = g^{hk}F_{hijk}), \\ {}_2F_{ij}x^ix^j &= 0 \quad ({}_2F_{ij} = g^{hk}F_{ihnj}), \end{aligned} \qquad (5)$$

обладают тем свойством, что касательные из каждой из них к конике- огибающей F_{ijkl} и к фундаментальной конике-огибающей g^{ij} образуют гармонический пучок; при $n = 4$ точки коник (5) обладают тем свойством, что конусы комплекса для каждой из них являются автополярными к фундаментальной квадрике-огибающей g^{ij}.

Результаты автора обобщают результаты Руза (Ruse H. S., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1944, **62**, part 1, 64), который рассматривал квадратичные комплексы прямых, определяемые тензором кривизны риманова пространства V_n (в случае Руза, следовательно, $\Gamma_i^{.t} = \{_{ij}^{t}\}$). В статье много опечаток. Ю. Е. Пензов

1990. Доказательство предположения Важоньи. Грюнбаум (A proof of Vâzsonyi's conjecture. Gruenbaum B.), Bull. Res. Council Israel, 1956, **A6**, № 1, 77—78 (англ.)

Утверждается, что во всяком множестве n точек трехмерного евклидова пространства число пар точек, расстояние которых равно диаметру множества, не превосходит $2n-2$ (на плоскости число таких пар не более n (Erdös P., Amer. Math. Monthly, 1946, **53**, 248—250). Доказательство проводится от противного. Среди множеств, не удовлетворяющих утверждению теоремы, рассматривается множество S с наименьшим числом точек. Определяемый этим множеством сферический граф оказывается имеющим число вершин, ребер и граней, противоречащее теореме Эйлера. А. Г. Школьник

1991. Общие трансверсали плоских множеств. Харроп, Радо (Common transversals of plane sets. Harrop R., Rado R.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 85—95 (англ.)

Обобщается следующее предложение комбинаторной геометрии: Если, система состоящая из n связных точечных множеств на плоскости $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, обладает свойством, что 1) любые три множества пересекаются одной прямой и 2) для любого $\nu\,(1 \leqslant \nu < n)$ найдется прямая h_ν, разделяющая плоскость таким образом, что все множества A_α с индексами $\alpha < \nu$ лежат в одной полуплоскости, а все A_β с $\beta > \nu$ — в другой полуплоскости, то существует прямая, пересекающая все множества системы. В настоящей статье условие 2), относящееся ко всей системе, заменяется более слабым требованием, привлекающими одновременно только четыре множества. Через $T_{rn}\,(r \leqslant n)$ обозначается совокупность всех систем из n множеств, каждая из которых обладает свойством „r-трансверсальности", т. е. для которых существуют прямые, пересекающие любые r множеств системы. S_{rn} обозначает совокупность всех систем из n множеств, каждая из которых обладает свойством „r-сепарабельности": для любых r множеств системы найдется такая перестановка их индексов, после которой пересечение выпуклой оболочки множеств с индексами меньшими $\mu\,(1 \leqslant \mu < n)$ и выпуклой оболочки множеств с индексами $\geqslant \mu$ будет пусто. Центральную часть работы составляет доказательство предложения:

$$S_{4n}T_{3n} \subset T_{4n}, \qquad (1)$$

наряду с чем показано, что $S_{3n}T_{3n} \not\subset T_{4n}$ $(n \geqslant 4)$. Далее доказано, что

$$S_{3n}T_{4n} \subset T_{nn}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) и очевидных свойств $S_{rn} \supset S_{r+1,\,n}$; $T_{rn} \supset T_{r+1,\,n}$ следует, что $S_{nn}T_{3n} \subset S_{n-1,\,n}\,T_{3n} \subset \ldots \subset S_{4n}T_{3n} \subset S_{4n}T_{4n} \subset S_{3n}T_{4n} \subset T_{nn}$. Отсюда, в частности, вытекает, что, $S_{nn}T_{3n} \subset T_{nn}$ — результат, указанный в начале статьи, и что $S_{4n}T_{3n} \subset T_{nn}$ — обобщение полученное авторами. А. Г. Школьник

1992. О конфигурационной теореме прямоугольной геометрии. Посвящено Вильгельму Блашке ко дню его 70-летия. Науман, Рейдемейстер (Über Schließungssätze der Rechtwinkel geometrie. Wilhelm Blaschke zum 70 Geburtstag gewidmet. Naumann H., Reidemeister K.), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1957, **21**, № 1-2, 1—12 (нем.)

Рассматривается дезаргова аффинная плоскость π, в которой имеют место условия ортогональности и теорема о трапециях. Ортогональность определена как бинарное отношение между прямыми, удовлетворяющее условиям: 1) $a \perp b \Rightarrow b \perp a$, 2) $a \perp b \parallel c \Rightarrow a \perp c$ и 3) существует только одна прямая, проходящая через точку A на прямой a и перпендикулярная к прямой a. Теорема о трапециях: Пусть A_i, A_i' $(i = 0, 1, 2, 3)$ — невырожденные четырехугольники, причем $A_0A_1 \parallel A_2A_3$. Если справедливо пять соотношений $A_iA_k \perp A_i'A_k'$, то справедливо и остающееся шестое соотношение.

Если в π ввести прямоугольную систему координат, то можно определить „ортогональный" полуавтоморфизм координатного поля $a \rightsquigarrow \bar{a}$ следующим образом: пусть прямая, проходящая через точку $(0, 1)$ перпендикулярно к прямой $(1, 0)$, $(0, -1)$, пересекает ось x в точке $(\varphi, 0)$. Точке $(a; 0)$ поставим в соответствие точку $(0, a)$ на прямой, проходящей через точку $(\varphi, 0)$ перпендикулярно к прямой $(0, -1)$ $(a, 0)$. Справедливы уравнения $\bar{\varphi} = \varphi$, $\overline{\varphi a} = a\varphi$. Прямые, угловые коэффици-

енты которых равны a_1, a_2, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a_1\varphi a_2 = -1$. В плоскости π справедлива или теорема Рейдемейстера — Науманна (получится из теоремы о трапециях, если выпустить условие $A_0A_1 \parallel A_2A_3$), или теорема Шютте (РЖМат, 1957, 4329).

Остающаяся часть статьи посвящена частному случаю $\varphi = 1$, $a = \bar{a}$, теореме о точке пересечения высот (Schur F., Math. Ann., 1903, 57, 205 — 208) и конфигурационной теореме Бэра (Baer R., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 56, 94 — 129).

Отметим, что в 1957 Клингенберг (РЖМат, 1958, 7087) упростил целый ряд приведенных выше результатов. V. Havel

1993. Однородность и изотропия в геодезических пространствах. Родс (Homogeneity and isotropy in geodesic spaces. Rhodes F.), Quart. J. Math., 1958, 9, № 33, 55—62 (англ.)

Метрическое пространство E называется n-точечно однородным, если любая изометрия между двумя множествами n точек пространства индуцируема некоторой изометрией самого пространства E. Если существует такое число $\delta > 0$, что это имеет место только для множеств с диаметрами, меньшими чем δ, то пространство E называется локально n-точечно однородным. Сами множества n точек называются в обоих случаях свободно подвижными в E.

Метрическое пространство E называется n-точечно изотропным в точке z, $z \in E$, если существует такое число $\delta > 0$, что любая изометрия, которая оставляет z неподвижным и отображает множество n точек пространства E с расстояниями от z, меньшими чем δ, на изометричное ему множество, индуцируема некоторой изометрией всего пространства E. Эти множества n точек называются тогда свободно вращаемыми вокруг z.

В работе рассматриваются некоторые специальные метрические пространства, так называемые геодезические пространства (G-пространства), введенные Буземаном (РЖМат, 1957, 6668). Доказываются теоремы о размерах множеств, свободно подвижных (вращаемых вокруг точки z) в локально однородном (изотропном в z) G-пространстве. Главные результаты статьи: (а) Если множество n точек ($n \geqslant 3$) локально n-точечно однородного G-пространства E имеет диаметр, меньший чем $\frac{2}{3}d$, где d — диаметр пространства E, то оно является свободно подвижным в E. Локально 2-точечно (при $d = \infty$ также локально n-точечно, $n \geqslant 3$) однородное G-пространство является 2-точечно (n-точечно) однородным. (б). Если G-пространство E с радиусом $d = \sup \rho(z, x)$ ($x \in E$) в точке z 1-точечно (n-точечно, $n \geqslant 2$) изотропно в z, то каждая его точка (множество n точек с расстояниями от z, меньшими чем $\frac{1}{2}d$) свободно вращаема (вращаемо) вокруг z. Рассматриваются также случаи, когда из ($n-1$)-точечной изотропности G-пространства следует его локальная n-точечная однородность. Ю. Г. Лумистер

1994. Взаимоотношения между свойствами ортогональности и порядка в круговых плоскостях. Бенц (Beziehungen zwischen Orthogonalitäts- und Anordnungseigenschaften in Kreisebenen. Benz Walter), Math. Ann., 1958, 134, № 5, 385—402 (нем.)

Исследуются свойства отношения ортогональности в так называемых круговых геометриях над квадратически расширенными телами. Исходным понятием является понятие круговой плоскости (Kreisebene). Круговая плоскость определяется как абстрактное множество $\mathfrak{M}$ элементов $A, B, C, \ldots$, называемых точками, в котором выделены определенные подмножества $a, b, c, \ldots$, называемые кругами. Совпадение и различие кругов, а также пересечение их понимается в теоретико-множественном смысле. Круг a касается круга b в точке P, если a и b различны и P есть единственная общая точка их. Каждая круговая плоскость характеризуется определенной системой аксиом. Например, плоскость Мёбиуса характеризуется аксиомами:

M I. Через три различные точки проходит по крайней мере один круг. Если a, b, c — три различных круга и мощность их пересечения $|\, a \cap b \cap c \,| \geqslant 2$, то имеет место $a \cap b = b \cap c = c \cap a$.

M II. Для точки P, принадлежащей кругу k, и точки Q, не принадлежащей ему, имеются в точности один круг k', проходящий через P и Q и касающийся круга k в точке P.

M III. Каждый круг имеет по крайней мере одну точку; имеются четыре различные точки, не лежащие на одном круге.

Для круговых плоскостей ($\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$), изучаемых автором, исходным множеством $\mathfrak{M}$ является коммутативное квадратичное расширение $\mathfrak{R}_2$ коммутативного тела $\mathfrak{R}_1$ (и еще элемент ∞). В этих круговых плоскостях через три различные точки проходит один и только один круг.

Автор устанавливает, что наличие в круговой плоскости ($\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$) отношения ортогональности с определенными свойствами связано с принадлежностью тела $\mathfrak{R}_1$ некоторому специальному классу. В качестве примера приведем формулировку одной из основных теорем автора (теорема 11): В круговой плоскости ($\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$) тогда и только тогда имеется отношение ортогональности со свойствами:

O I. Из $a \perp b$ следует $b \perp a$.

O II. Из $a \perp b$ следует $|\, a \cap b \,| = 2$.

O III. Для $P \in k$, $Q \neq P$ имеется в точности один круг $k' \ni P$, Q такой, что $k \perp k'$.

O IV. Если a, b — два касающихся круга и k — круг $\perp a$, b, то $k \supset a \cap b$.

O V. Если два различных круга одновременно ортогональны к двум другим кругам, то они пересекаются, когда мультипликативная группа тела $\mathfrak{R}_1$ распадается в два класса по подгруппе квадратов. В. А. Тихонов

1995. Рекуррентное построение диаграмм j-символов. 15j-символы. Левинсон И. Б., Чиплис И. В., LietTSR Mokslu Akad. darbai, Тр. АН ЛитССР, 1958, **БI(13)**, 3—9, (рез. лит.)

В предшествующих работах И. Б. Левинсона (РЖФиз, 1957, 27037, 27038, 1958, 19596) был предложен графический метод суммирования произведений коэффициентов Вигнера. Такие суммы называются jm-символами и изображаются диаграммами из линий и точек.

В реферируемой работе рассматривается частный случай таких сумм — суммы не зависящие от проекций моментов количества движения (так называемые 3nj-символы). Предлагается графический метод построения диаграмм j-символов с $3n$ параметрами из диаграмм j-символов с $3(n-1)$ параметрами ($n = 2, 3, \ldots$). При помощи предложенного метода изучаются всевозможные нетривиальные 15j-символы, приводятся их диаграммы, свойства симметрии и формулы для вычисления. Показывается, что, кроме известных 15j-символов первого и второго рода, существуют 15j-символы третьего, четвертого и пятого рода. Результаты работы: дается общий метод изучения более сложных 3nj-символов и пополняется класс до сих пор изученных 3nj-символов. В. В. Ванагас

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1996. Замечания о бесконечномалых изгибаниях поверхностей. Рембс (Bemerkungen zur infinitesima-

len Flächenverbiegung. Rembs Eduard), Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1956, 20, № 3-4, 178—185 (нем.)

Рассматривается бесконечно малое изгибание поверхности S с текущим радиус-вектором x; пусть при этом изгибании x переходит в $x+\varepsilon z$ (ε — малый параметр). Пусть далее y—вектор вращения, соответствующий z, L—кривая на S, η—ее тангенциальная нормаль, a и b—геодезическое кручение и нормальная кривизна L. Выводится формула

$$y' = \delta b \cdot \eta + \delta a \cdot x', \qquad (1)$$

где штрихи обозначают дифференцирование вдоль L. Показывается, что формула (1) с помощью одной прежней работы автора приводит к теореме: Выпуклая поверхность с плоским краем при краевом условии $\delta k = 0$ является жесткой (k — обыкновенная кривизна края).

Показывается, что в случае выпуклой поверхности с плоским краем существует не более одного бесконечно малого изгибания с заданными вдоль края значениями δk. Доказывается существование решения этой краевой задачи для сферического сегмента (путем сведения к первой краевой задаче теории потенциала для круга).

В конце статьи устанавливается, что поверхность полюсов, которую рассматривал Либман, по существу не отличается от индикатрисы переноса, которая является одной из двенадцати поверхностей Дарбу. Показывается, кроме того, что вектор переноса ($=z+[xy]$) тождественно обращается в нуль при нетривиальном бесконечно малом изгибании поверхности в том и только в том случае, когда поверхность представляет собой конус с вершиной в начале координат и бесконечно малое изгибание оставляет вершину на месте.

Н. В. Ефимов

1997. Однозначная определенность замкнутой выпуклой гиперповерхности посредством суммы главных радиусов кривизны. Зюсс (Eindeutige Bestimmung von Eihyperflächen durch die Summe ihrer Hauptkrümmungsradien. Süss Wilhelm), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 352—354 (нем.)

Дано новое доказательство известной теоремы о том, что замкнутая строго выпуклая гиперповерхность в n-мерном евклидовом пространстве определяется однозначно с точностью до параллельного переноса заданием суммы главных радиусов кривизны как функции внешней нормали.

А. В. Погорелов

1998. Об эллипсоиде Лёвнера и его аналоге среди эллипсоидов, вписанных в выпуклое тело. Данцер, Лаугвиц, Ленц (Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden. Danzer Ludwig, Laugwitz Detlef, Lenz Hanfried), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 214—219 (нем.)

Пусть M—ограниченное множество n-мерного аффинного пространства, выпуклая оболочка которого имеет внутренние точки. Эллипсоидом Лёвнера называется наименьший по объему эллипсоид $e(M)$, содержащий M. Каждому выпуклому телу K авторы сопоставляют эллипсоид $i(k)$, наибольший по объему среди всех элементов, содержащихся в K.

Доказывается единственность эллипсоидов $e(M)$ и $i(k)$.

Как следствие этих теорем единственности получаются различные следствия, относящиеся к группам аффинных преобразований, например:

Группа аффинных преобразований, G, переводящая некоторое открытое множество в ограниченное, оставляет некоторую точку неподвижной. Если эту точку принять за начало координат и выбрать надлежащим образом координатные оси, то квадратичная форма

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

инвариантна относительно преобразований группы.

А. В. Погорелов

1999 Д. О жесткости поверхностей неотрицательной кривизны при втулочных связях. Сунь Хэ-шэн. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1958.

См. также: 1135, 1144 Д, 1153, 1266, 1487

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

2000. Методы расчета гетерогенных реакторов. Хасситт (Methods of calculation for heterogeneous reactors. Hassitt A.), Phys. and Math. Vol. 2. London-New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 271—313 (англ.)

Дается обзор методов расчета критических размеров гетерогенных ядерных реакторов в рамках многогрупповой диффузионной теории для областей с цилиндрической симметрией. Математически задача сводится к подбору некоторого критического параметра, при котором однородная эллиптическая система

$$-\frac{1}{3\sigma_{tg}} \nabla^2 \Phi_g + \sigma_{ag} \Phi_g = \sum_{g'} \beta_{gg'} \Phi_{g'} + f_g, \qquad (1)$$

$$f_g = \sum_{g'} \nu_{gg'} \sigma_{fg'} \Phi_{g'} \qquad (2)$$

с граничными условиями типа

$$\Phi_g + \gamma_g \frac{\partial \Phi_g}{\partial n} = 0 \qquad (3)$$

имеет ненулевое решение $\{\Phi_g\}$, выражающее распределение нейтронов в критическом состоянии. Для гетерогенного реактора коэффициенты, входящие в уравнения, кусочно-постоянны, что соответствует многозонности реактора. Поэтому к граничным условиям (3) необходимо присоединить условия непрерывности функций распределения и потоков на границах раздела зон.

Задача (1)—(3) решается известным методом итераций источника. Для этого берется произвольное начальное $\{f_g^0\}$ для f_g и из (1) и (3) вычисляется первое приближение $\{\Phi_g^1\}$ для Φ_g. Далее, по формуле (2) вычисляется первое приближение $\{f_g^1\}$ для f_g. Вычисления повторяются до тех пор, пока отношения f_g^{t+1}/f_g^t не будут зависеть от g и от пространственных координат.

Таким образом, решение сформулированной задачи сводится к многократному решению уравнений вида

$$\lambda \nabla^2 \Phi - \sigma \Phi = -S, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

с указанными выше граничными условиями. Полученная граничная задача заменяется на систему конечно-разностных уравнений вида

$$\Phi_{ij}=p_{ij}\Phi_{i+1,j}+q_{ij}\Phi_{i,j+1}+t_{ij}\Phi_{i-1,j}+u_{ij}\Phi_{i,j-1}+\Psi_{ij}. \quad (4)$$

Отмечается, что в типичных случаях количество конечноразностных уравнений во всех энергетических группах составляет 2000 или более.

Для решения системы (4) используются различные модификации метода последовательных приближений, методы функций Грина, а также некоторые из прямых методов. В качестве наиболее универсального и гибкого метода предлагается использовать экстраполяционный метод Либмана, который существенно улучшает сходимость обычного (в виде ряда Неймана) метода последовательных приближений. В соответствии с экстраполяционным методом Либмана для решения системы (4) строятся последовательные приближения в форме

$$\Phi^{t}_{ij}=\Phi^{t-1}_{ij}+\alpha\,[p_{ij}\Phi^{t-1}_{i+1,j}+q_{ij}\Phi^{t-1}_{i,j+1}+t_{ij}\Phi^{t}_{i-1,j}+u_{ij}\Phi^{t}_{i,j-1}-\Phi^{t-1}_{i,j}+\Psi_{ij}].$$

Оптимальное значение α:

$$\alpha=\frac{2}{1+\sqrt{1-\mu_1^2}},$$

где μ_1—наибольшее по модулю собственное значение матрицы системы (4) (установлено, что $\mu_1<1$). При этом скорость сходимости получается равной $(\alpha-1)^t$, в то время как при обычном методе эта скорость равна μ_1^t, например, при $\mu_1=0{,}99$ $\alpha-1=0{,}75$.

Каких-либо доказательств о сходимости конечноразностных методов, а также теоретических оценок быстроты сходимости при измельчении сетки в работе не приводится. Указывается ряд приближенных методов, среди которых более подробно излагается метод факторизации. Для эффективного применения метода факторизации оражающая оболочка реактора приближенно заменяется на оболочку без торцевых отражателей. Приводятся также элементы теории возмущений и метод сопряженных уравнений, как средства для приближенного решения поставленной задачи. В заключение первой части работы даются некоторые указания о точности методов и о деталях программирования.

Во второй части работы рассматриваются аналитические решения двухгрупповых диффузионных уравнений для систем, состоящих из небольшого числа активных стержней, погруженных в замедлитель, в предположении, что функция распределения вдоль оси z меняется по закону $\cos\beta z$. В качестве условия критичности получается условие равенства нулю некоторого определителя порядка $4N$, где N — число стержней. Даны также различные модификации и упрощения изложенного метода.

В третьей части работы приводятся и обсуждаются результаты сравнения теоретических и экспериментальных данных.

В заключение отмечается, что только использование быстродействующих вычислительных машин дало возможность приближенно рассчитывать ядерные реакторы в рамках диффузионной теории. Однако выход за рамки диффузионной теории заставляет обращаться к точному интегро-дифференциальному кинетическому уравнению Больцмана, численное решение которого регулярными методами весьма трудоемко. Поэтому для более точных расчетов ядерных реакторов приобретают значение нерегулярные методы—методы Монте-Карло.

Примечание референта. Более подробные сведения о методах расчета ядерных реакторов содержатся в монографии Г. И. Марчука, Численные методы расчета ядерных реакторов, М., Атомиздат, 1958.

В. С. Владимиров

2001. Разностный метод для второй и третьей граничной задачи с криволинейными границами при $\Delta u(x,y)=r(x,y,u)$. Ульман (Differenzenverfahren für die 2 und 3. Randwertaufgabe mit krummlinigen Rändern bei $\Delta u(x,y)=r(x,y,u)$. Uhlmann W.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 5-6, 236—251 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Для дифференциального уравнения $\Delta u(x,y)=r(x,y,u)$ составляются конечноразностные уравнения, позволяющие искать решение второй и третьей граничных задач при криволинейных границах. В квадратной сетке рассматривается звезда, содержащая 9 точек (точки не обязательно равноудаленные от центра звезды). Для этих точек составляется конечное выражение вида

$$\sum_{i=0}^{8}a_iu_i=\frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{8}b_ir(x_i,y_i,u_i)+h\sum_{i=0}^{8}c_i\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_i$$

и коэффициенты a_i, b_i, c_i определяются так, чтобы разложение в ряд Тейлора выражений

$$\sum a_iu_i \text{ и } \left\{\frac{h^2}{2}\sum b_i\Delta u_i+h\sum c_i\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_i\right\} \text{ в центре звезды}$$

достигало возможно высокого порядка.

Погрешность, возникающая при использовании указанного приема, достигает порядка h^3 для второй граничной задачи и h^2 для третьей граничной задачи.

Рассмотрены случаи с одной, двумя, тремя, четырьмя и пятью граничными точками, принадлежащими звезде. Приведены два числовых примера. К. Е. Чернин

2002. О сходимости метода сеток при решении задачи Дирихле и задачи теплопроводности. Грошафтова (O konvergenci metody sítí při řešení Dirichletova problému a problému vedení tepla. Groschaftová Zdenka), Aplikace mat., 1957, 2, № 5, 342—360 (чешск.; рез. русск., нем.)

Доказано, что решение задачи Дирихле, полученное методом сеток, сходится к точному со скоростью h^2, где h — величина шага избранной сетки, внутри рассматриваемого прямоугольника, если первая производная краевых функций имеет ограниченное изменение. Эта сходимость является равномерной на замыкании рассматриваемого прямоугольника, если вторая производная краевых функций имеет ограниченное изменение. Высказывается аналогичное утверждение для приближенного решения уравнения теплопроводности в конечном стержне: решение, полученное методом сеток, сходится к точному решению со скоростью h^2, для любого $t\in(0,\infty)$, если первая производная начальной функции имеет ограниченное изменение, со скоростью h^4, если третья производная начальной функции имеет ограниченное изменение и если $\beta=\tau/h^2=1/6$, где τ — длина интервала времени, h — длина пространственного интервала. Сходимость будет равномерной со скоростью h^2, для всех t, $0\le t\le T<\infty$, если вторая производная начальной функции имеет ограниченное изменение. Далее, описанная сходимость будет порядка h^4, если четвертая производная начальной функции будет иметь ограниченное изменение, если $\beta=1/6$ и если вторая производная этой функции в концевых точках равна нулю.

M. Švec.

2003. Рекуррентные соотношения высшего порядка для разностных уравнений. Черш (Récurrences d'ordre supérieur pour des équations aux différences.

Hersch Joseph), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 3, 364—367 (франц.)

Предлагается новый способ вычисления собственных значений колеблющихся мембран с помощью метода сеток. Этот способ основывается на постулате: Дискретные значения собственных функций, определенных в узлах сетки, предполагаются равными в этих узлах непрерывным значениям соответствующих собственных функций. Под условием этого постулата выводятся рекуррентные соотношения для разностного уравнения колеблющейся мембраны, которые позволяют во всех элементарных случаях вычислить точно собственные значения. В неэлементарных случаях собственные значения вычисляются с хорошей точностью.

Ю. Ф. Харкеевич

2004. **Мембранные конструкции со свободным краем. Пеликан** (Membrane structures with free edges. Pelikán J.), Acta techn. Acad. scient. hung., 1958, 20, № 3-4, 275—295 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Уравнение мембраны заменяется специальными разностными уравнениями, которые решаются методом релаксации. Особое внимание уделяется граничным узлам. Приводится подробный числовой пример.

В. К. Саульев

2005. **Решение методом конечных разностей уравнений пограничного слоя в форме Мизеса со специальным рассмотрением условий около особенности. Митчелл, Томсон** (Finite difference methods of solution of the von Mises boundary layer equation with special reference to conditions near a singularity. Mitchell Andrew R., Thomson John Y.), Z. angew. Math. und Phys., 1958, 9, № 1, 26—37 (англ.; рез., нем.)

Рассматривается решение задачи о пограничном слое при обтекании полубесконечной плоской пластинки потоком несжимаемой вязкой жидкости с отрицательным градиентом давления. Уравнения пограничного слоя берутся в форме Мизеса: вместо обычных независимых переменных X и Y (координаты в физической плоскости течения) приняты переменные X и ψ, где ψ — функция тока.

В конечном итоге задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \quad (z = u_1^2 - u^2,\ u_1 = 1 - x)$$

при граничных условиях: $u = 0$ при $\psi = 0$; $u = u_1$ — на границе пограничного слоя. Для решения численными методами уравнения в форме Мизеса проще известных уравнений Прандтля, однако вблизи пластины они обладают особенностью ($\partial^2 z/\partial\psi^2 \to \infty$ при $\psi \to 0$), которая затрудняет их использование.

Основная идея работы заключается в том, чтобы показать, что трудности, связанные с наличием этой сингулярности, могут быть преодолены с помощью использования разложения искомой функции в специальный ряд вблизи особенности:

$$u(x, \psi) = a\psi^{1/2} + b\psi + c\psi^{3/2} + d\psi^2 + \ldots$$

Неопределенные коэффициенты $a, b, c, \ldots$, являющиеся функциями только x, находятся при соблюдении определенных условий совместности на пластине ($\psi = 0$). Ограничиваясь первыми четырьмя членами ряда, авторы принимают его в качестве интерполяционной формулы для искомой функции вблизи особенности. В остальной части области течения решение ищется четырехточечным методом конечных разностей.

Исследуется также устойчивость решения. Оказывается, вблизи пластины, начиная с некоторых значений x, решение имеет слабую неустойчивость, не связанную с наличием сингулярности. Для определения скорости течения в этой области авторы предлагают альтернативный метод.

Г. И. Костычев

2006. **Разностные методы решения нелинейной задачи Гурса. Будак Б. М., Горбунов А. Д.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 4, 223—225

2007. **К выводу разностных уравнений трехмерной задачи динамической теории упругости методом интегральных соотношений академика А. А. Дородницына. Каблуков В. К.**, УзССР, Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 4, 51—55 (рез. узб.)

Предлагается выводить разностные уравнения интегрированием формулы Лагранжа. Рассматриваемая трехмерная область разбивается на параллелепипеды, ограниченные плоскостями, параллельными координатным. Интегрирование проводится по некоторому параллелепипеду, состоящему из нескольких элементарных, примыкающих друг к другу параллелепипедов. Выведены разностные уравнения для трехмерной динамической задачи теории упругости.

Н. П. Жидков

2008. **Численные исследования интегральных уравнений Дёрра. Хён** (Numerische Untersuchungen zu den von J. Dörr angegebenen Integralgleichungen. Höhn Erwin), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 5-6, 175—179 (нем.)

Для двух интегральных уравнений

$$ce_n(\beta) = \lambda_n' \int_{-\pi}^{\pi} ce_n(\alpha) J_0[k(\cos\alpha - \cos\beta)]\, d\alpha$$

и

$$ce_n(\beta) = \lambda_n'' \int_{-\pi}^{\pi} ce_n(\alpha) N_0[k(\cos\alpha - \cos\beta)]\, d\alpha,$$

собственными функциями которых являются функции Матье, вычисляются собственные числа. Эти числа выражаются через цилиндрические функции и коэффициенты разложения в ряд Фурье функции Матье.

Приведены таблицы значений $\lambda_n'(k)$ и $\lambda_n''(k)$ для $k^2 = 0(1)10(10)100$ и $n = 0(1)5$ и $\lambda_0'(k)$ и $\lambda_2'(k)$ для $k^2 = 0(0,2)1(0,4)3$. Числа даны с шестью значащими цифрами. Имеются графики функций $\lambda_n'(k)$ и $\lambda_n''(k)$, характеризующие поведение этих функций.

К. Е. Чернин

2009. **Метод Теодорсена и Гаррика для конформного отображения единичного круга на эллипс. Островский** (Theodorsen's and Garrick's method for conformal mapping of the unit circle into an ellipse. Ostrowski A. M.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1955, № 42, 3—5 (англ.)

Рассматривается численное решение интегрального уравнения

$$\Theta(\varphi) - \varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[P(\Theta(\varphi + t)) - P(\Theta(\varphi - t))\Big]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, dt,$$

к которому приводит задача преобразования точек $e^{i\varphi}$ окружности в точки эллипса $\rho(\varphi)e^{i\Theta(\varphi)}$, $P(\Theta)$ есть логарифм радиуса-вектора точки эллипса.

Приведенный численный пример решается автором методом, изложенным им ранее (Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser. 18, 1952, 165—174). Круг разбивается на двадцать равных частей и интегральное уравнение заменяется системой уравнений, которая, благодаря симметрии, сводится к четырем уравнениям с четырьмя неизвестными:

$$z_1 = (k - \lambda)P(z_2) + \lambda P(z_4) + \gamma_1,$$

$$z_3 = -kP(z_2) + (k + \lambda)P(z_4) + \gamma_3,$$

$$z_3 = -(k+\lambda)P(z_1) + kP(z_3) + \gamma_3,$$

$$z_4 = -\lambda P(z_1) + (\lambda - k)P(z_3) + \gamma_4.$$

Эта система решается методом Ньютона. Затем решение может быть улучшено с помощью итераций. Приводятся результаты вычислений.

Недостатком метода, как отмечает автор, является то, что схема вычислений меняется от шага к шагу.

А. Н. Иванова

2010. **Расчет флаттера при помощи программирующих вычислительных машин. Хохштрассер** (Flatterrechnung mit Hilfe von programmgesteuerten Rechenmaschinen. Hochstrasser Urs), Z. angew. Meth. und Phys., 1955, **6**, № 4, 300—315 (нем.; рез. англ.)

Для расчета флаттерных колебаний самолета используется система трех интегральных уравнений для компонент малых относительных перемещений механической системы, подчиняющейся закону Гука. Описаны два метода приближенного решения задачи, один из них основан на вычислении собственных вектор-функций и собственных значений; этот метод основан на известных теоремах теории интегральных линейных уравнений с симметричным положительно определенным ядром. Через собственные значения выражается критическая скорость флаттера. Второй метод представляет обобщение известного метода Раушера (Rauscher M., J. Aeron. Sci., 1949, **16**, № 6, 345—354).

Далее рассмотрены некоторые приемы численного решения флаттерного определителя, из которого находится значение критической скорости. Дано краткое описание действующих цифровых вычислительных машин, автоматизирующих расчет флаттера. В. П. Пилатовский

2011. **Верхние границы для наибольшего собственного числа вполне непрерывного самосопряженного оператора. Бёрш-Зупан** (Obere Schranken für den größten Eigenwert eines vollstetigen selbstadjungierten Operators. Börsch-Supan Wolfgang), Math. Ann., 1958, **134**, № 5, 453—457 (нем.)

Пусть H — гильбертово пространство, A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в H, λ_{max} — наибольшее собственное число A. Пусть R_{12} — подпространство H, R_3 — его ортогональное дополнение,

$\lambda_1 = \max_{x \in R_{12}} \frac{(x, Ax)}{(x, x)}$ — приближенное значение λ_{max}, найденное по методу Релея — Ритца. Пусть R_1 — „приближенное" собственное подпространство, соответствующее λ_1 ($R_1 \subset R_{12}$), и R_2 — ортогональное дополнение R_1 до R_{12}. Тогда справедлива оценка: $\lambda_{max} \leqslant \mu$, где μ — наибольший корень уравнения

$$(\lambda_1 - \mu)(c_{22} - \mu)(c_{33} - \mu) - (\lambda_1 - \mu)c_{23}^2 - (c_{22} - \mu)c_{13}^2 = 0, \quad (1)$$

где $c_{ik} \geqslant \max_{e_j \in R_j} (e_i, Ae_k)$ при условии $(e_j, e_j) = 1$.

Наибольший корень уравнения (1) можно найти, применяя к уравнению

$$\mu = \frac{\lambda_1 + c_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 - c_{33}}{2}\right)^2 + c_{13}^2 + \frac{\mu - \lambda_1}{\mu - c_{22}} c_{23}^2} \equiv \varphi(\mu)$$

метод итерации ($\mu_{\nu+1} = \varphi(\mu_\nu)$),который монотонно сходится, если $\mu_0 > \lambda_1$. Если μ_0 достаточно велико, то каждое μ_ν есть верхняя граница для λ_{max}.

В качестве c_{22} можно взять λ_2 — второе собственное число, найденное по методу Релея — Ритца. Остальные c_{ik} можно оценивать, представляя оператор A в виде бесконечной матрицы.

И. К. Даугавет

2012. **Метод мажорант для аналитических операторов в применении к модифицированным итерационным процессам. Халитова Н. А.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 14—16

Пусть $P(x) = y$ и $Q(z) = w$ — аналитические операторы на X в Y и соответственно из Z в W, причем Z и W являются нормирующими пространствами в смысле B_k для X и Y. Для решения уравнения $P(x) = 0$ применяется обобщенный модифицированный ньютоновский процесс:

$$x_{n+1} = x_n + E(x_0)P(x_n), \quad (1)$$

где $E(x_0) = \sum_{k=1}^{\nu-1} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{d^k x}{dy^k}\Big|_{y = P(x_0)} P^{(k-1)}(x_0)$,

либо $E(x_0) = \sum_{k=1}^{\nu+1} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{d^k x}{dy^k}\Big|_{y = P(x_0)} P^{(k-1)}(x_n)$.

Приводятся условия, при выполнении которых из сходимости процесса (1) для мажорантного уравнения $Q(z) = 0$ следует сходимость (1) для уравнения $F(x) = 0$. Доказательства отсутствуют.

А. Н. Балуев

2013. **Максимизация функций, порожденных вращениями; эксперименты, выявляющие быстроту диагонализации симметричной матрицы методом Якоби. Поп, Томпкинс** (Maximizing functions of rotations—experiments concerning speed of diagonalization of symmetric matrices using Jacobi's method. Pope David A., Tompkins C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 4, 459—466 (англ.)

Рассматривается диагонализация симметричной матрицы A вращением, основанная на максимизации функции $D(S_k)$ — суммы диагональных элементов матрицы S_k, где $S_0 = A$, $S_k = R_k S_{k-1} R_k'$, $\{R_k\}$ — последовательность элементарных вращений. Элементы x_{ij} и y_{ij} матриц S_{k-1} и S_k связаны соотношениями

$$y_{ii} = x_{ii} + \rho_{ij},\ y_{jj} = x_{jj} - \rho_{ij},\ y_{ij} = x_{ij}(1 - \varepsilon_{ij})\cos 2\theta,$$

где $\rho_{ij} = x_{ij}\left(\sin 2\theta - \frac{2\sin^2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta}\varepsilon_{ij}\right)$; $\varepsilon_{ij} = k_{ij} \operatorname{tg} 2\theta$,

$$k_{ij} = \frac{x_{ii} - x_{jj}}{2x_{ij}}; \quad \Delta D = 2x_{ij}^2 \left[\frac{(k_{ij}^2 - 1)\varepsilon_{ij}^2 + 2\varepsilon_{ij}}{k_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^2 + 1}\right].$$

Величина ε_{ij} является мерой релаксации процесса. Автор рассматривает 4 схемы максимизации функции D и дает доказательство сходимости их.

1 схема (метод Якоби). Угол θ, определяющий вращение, вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\theta = \frac{2x_{ij}}{x_{ii} - x_{jj}}$ и дает оптимальный результат для одного вращения.

2 схема (метод верхней релаксации). Угол θ определяется

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{x_{ij}}{2(x_{ii} - x_{jj})} \text{ или } \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sgn}\left[\frac{x_{ij}}{x_{ii} + x_{jj}}\right] \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

3 схема. Фиксируется убывающая последовательность углов и „пороговых" значений, которые служат мерой вращения: вращение допустимо для тех элементов, абсолютные значения которых не выше рассматриваемого порогового значения.

4 схема. Фиксируется последовательность углов. Мерой вращения является принадлежность ε промежут

ку (1; 2). Приводятся экспериментальные сравнения всех 4 схем. В. Н. Кублановская

2014. Задача о собственных значениях и векторах. Гивенс (The characteristic value-vector problem. Givens Wallace), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 3, 298—307 (англ.)

Продолжение работ автора (РЖМат, 1956, 6861; 8347). Рассматривается вопрос о разыскании собственных чисел и векторов несимметричной матрицы $A(n \times n)$. Матрица A последовательными вращениями приводится к виду

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n-2} & s_{1n-1} & s_{1n} \\ b_1 & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2n-2} & s_{2n-1} & s_{2n} \\ 0 & b_2 & s_{33} & \dots & s_{3n-2} & s_{3n-1} & s_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & s_{nn} \end{pmatrix} = R'_N \dots R'_1 A R_1 \dots R_N.$$

Если некоторые из b_i равны нулю (например, $b_r = 0$), то $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}$, где S_1 — матрица $(r \times r)$, S_3 — матрица $(n-r) \times (n-r)$ и характеристический полином распадается на множители:

$$f_n = \det(A - \lambda E_n) = \det(S - \lambda E_n) = \det(S_1 - \lambda E_r) \times \det(S_3 - \lambda E_{n-r}) = f_r f_{n-r}.$$

f_k определяется рекуррентно:

$$f_k = (s_{kk} - \lambda) f_{k-1} - b_{k-1} s_{k-1k} f_{k-2} + b_{k-1k-2} s_{k-2k} f_{k-3} + \dots + (-1)^p b_{k-1\,k-p} s_{k-pk} f_{k-p-1} + \dots + (-1)^{k-2} b_{k-12} s_{2k} f_1 + (-1)^{k-1} b_{k-11} s_{1k},$$

где для $j < k$ $b_{kj} = b_k b_{k-1}, \dots, b_j$.

Если $b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, то матрица S с помощью элементарных подобных преобразований приводится к виду

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n-1} \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & k_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & k_1 \end{pmatrix} = T_p \dots T_1 S T_1^{-1}, \dots, T_p^{-1},$$

где $T_p = E - kE_{ij}$, $T_p^{-1} = E + kE_{ij}$; E_{ij} — матрица, (i,j)-й элемент которой — единица, а все остальные нули; k — соответствующим образом подобранный коэффициент. Имеет место

$$(-1)^n f_n(\lambda) = \det(\lambda E_n - A) = \det(\lambda E_n - C) = \lambda^n - k_1 \lambda^{n-1} - b_{n-1} k_2 \lambda^{n-2} - \dots - b_{n-11} k_n.$$

Собственный вектор матрицы A, $X = R_1 \dots R_n Y$, где $Y = (y_1, \dots, y_n)$ (соответствующий собственный вектор матрицы S) определяется рекуррентно, если $b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ или из уравнения $(S - \lambda E)Y = 0$. Если матрица S приведена к виду C, то $Y = T_1^{-1} \dots T_p^{-1} Z$ и Z определяется рекуррентно.

Описывая опыт применения метода на быстродействующих вычислительных машинах, автор указывает, какие вычисления необходимо проводить с плавающей запятой, а также приводит подсчет операций и времени отдельно при вычислении с плавающей и фиксированной запятой. В. Н. Кублановская

2015. Определение вещественных собственных значений вещественной матрицы методом Рутисхаузера. Бандемер (Berechnung der reellen Eigenwerte einer reellen Matrix mit dem Verfahren von Rutishauser. Bandemer Hans), Wiss. Z. Martin—Luther—Univ. Halle—Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1957, **6**, № 5, 807—814 (нем.)

Описывается алгорифм QD, предложенный Рутисхаузером (РЖМат, 1956, 4916; 4917; 4926; 6862) в прогрессивной и непрогрессивной форме и приводятся иллюстрирующие его примеры на отыскание собственных чисел матриц 4-го порядка. На примерах автор показывает, что алгорифм QD со сдвигом особенно целесообразно применять для разыскания собственных значений, близких по абсолютной величине. В. Н. Кублановская

2016. Детерминантная формула для аппроксимации высшего порядка корней. Вулф (A determinant formula for higher order approximation of roots. Wolfe J. M.), Math. Mag., 1958, **31**, № 4, 197—199 (англ.)

Как известно, в методе Ньютона функция, аппроксимирующая в окрестности искомого корня данную функцию, является линейной и имеет одинаковую с данной функцией производную вблизи корня. Автор для нахождения корня выводит формулу в виде детерминанта, у которой аппроксимирующая функция вблизи корня имеет несколько первых производных, одинаковых с данной функцией В. К. Саульев

2017. Метод «первой строки»; новый способ нахождения комплексных корней полиномиальных уравнений высших степеней. Лёфлер (Die Methode der «ersten Zeile», ein neues Verfahren zur Bestimmung der komplexen Lösungen von Polynom-Gleichungen höheren Grades. Löffler E.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, №11, 434—437 (нем.)

После отделения ν вещественных и нахождения модулей комплексных корней, например по методу Грэффе, данное уравнение $x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n = 0$ делится на $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\nu)$. В результате получается уравнение четной степени, названное скелетным (Rumpfgleichung). Оно содержит $q = (n - \nu)/2$ пар комплексных корней.

Символический способ обозначения сумм и сумм произведений действительных корней, модулей и действительных частей комплексных корней позволяет получить формулу, устанавливающую прямую связь между действительными частями и модулями, с одной стороны, и коэффициентами скелетного уравнения, с другой. Выражения, полученные по этой формуле, образуют первую строку схемы, из которой получаются следующие строки, причем сумма выражений каждого столбца схемы эквивалентна соответствующему коэффициенту основного (данного) уравнения. Вычислениями по этой схеме упрощается нахождение действительных частей комплексных корней, если известны их модули и имеющиеся действительные корни, а также проверка решения. А. Б. Штыкан

2018. Метод приближенного вычисления квадратных корней. Римини (Un metodo per il calcolo approssimato di radici quadrate. Rimini Cesare), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 1, 34—37 (итал.; рез. англ.).

Получена общая формула для построения последовательности, быстро сходящейся к квадратному корню данного числа. Резюме автора

2019. О решении кубического уравнения. Кристенсен (Discussion and solution of the cubic equation. A new method for use in practical calculations. Christensen Bent. Acta polytechn. Appl. Math. and Comput. Mach. Ser., 1957, **1**, № 4, 19 pp., ill.) (англ.)

Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ несколькими подстановками приводится к виду $y + q/y^2 = 1$, где q — параметр, зависящий только от a, b и c.

Уравнение (1) решается приближенно: или с помощью логарифмической линейки, или с помощью приближенных формул (в зависимости от значения q). Для уточнения найденного значения корня предлагается метод итераций. Приведена диаграмма, дающая непосредственно значения действительных корней уравнения (1), с приложением списка необходимых формул. Рассмотрен числовой пример. А. И. Взорова

2020. **Решение алгебраических уравнений четвертой степени при помощи логарифмической линейки.** Капра (Risoluzione dell equazione algebrica di 4° grado per mezzo del regolo calcolatore logaritmico. Capra Vincenzo), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 1, 141—146 (итал.; рез. англ.)

2021. **Ускорение сходимости итерационных процессов. Уэгстейн** (Accelerating convergence of iterative processes. Wegstein J. H.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1958, **1**, № 6, 9—13, (англ.)

Для нахождения корня уравнения

$$x = f(x)] \qquad (1)$$

предлагается следующий итерационный процесс. Пусть x_n и x_{n+1} удовлетворяют соотношению

$$x_{n+1} = f(x_n). \qquad (2)$$

Тогда $\bar{x}_{n+1} = qx_n + (1-q)x_{n+1}$, где $q = a/(a-1)$, $a \approx (x_{n+1} - x_n)/(x_n - x_{n-1})$ представляет лучшее значение корня уравнения (1). Указанный итерационный процесс, как показывают приведенные числовые примеры, сходится быстрее, чем обычный процесс (2); кроме того, такая модификация процесса делает иногда сходящимся расходящийся процесс (2). В. К. Саульев

2022. **О методе хорд, построенных по узлам Чебышева. Дерендяев И. М.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 52—60

В методе хорд, применяемом для приближенного решения нелинейных уравнений, в качестве узлов интерполирования выбираются нули квадратного полинома Чебышева. Это позволяет ускорить сходимость метода, так как при таком выборе интерполяционных узлов оценка остаточного члена содержит квадратичный полином наименее уклоняющийся от нуля.

Выбирая в качестве узлов интерполирования в m-мерном евклидовом пространстве нули квадратного полинома Чебышева для отрезка $(\underline{x}_i, \bar{x}_i)$, автор получает оценку остаточного члена метода хорд в этом пространстве.

Рассматривается применение описанного метода к приближенному решению нелинейного интегрального уравнения с оператором Урысона и к приближенному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В обоих случаях доказана сходимость метода, единственность решения и даны оценки скорости сходимости. К. Е. Чернин

2023. **Заметка о формуле Эйлера-Маклорена. Манро** (Note on the Euler-Maclaurin formula. Munro W. D.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 3, 201—203 (англ.)

С целью использования уже на 1-м курсе формулы Эйлера — Маклорена для приближенного интегрирования, дается упрощенный ее вывод, основанный на формальном применении ряда Тейлора. Результат записывается в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{k=0}^{n} f(x_k) - \frac{h}{2}[f(b)+f(a)] - \frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)] + \frac{h^4}{720}[f'''(b)-f'''(a)] + \ldots, \qquad (1)$$

где $x_k = a + kh\,(k = 0,1,\ldots,n)$, $h = (b-a)/n$.

Из (1), решая относительно $\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$, выводят формулу суммирования

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(b)+f(a)] + \frac{h}{12}[f'(b) - f'(a)] + \ldots$$

С ее помощью получается

$$\log n! \approx (n+{}^1/_2)\log n - n + \frac{1}{12}n + \frac{11}{12}.$$

А. Г. Школьник

2024. **Вычисление тройного интеграла на автоматической вычислительной машине. Бержон, Ческино, Энбютт** (Calcul d'une intégrale triple sur machine automatique numérique. Bergeon René, Ceschino Francis, Hennebutte Léon), Mém. artill. franç., 1956, **30**, № 3, 695—717 (франц.)

Речь идет о приближенном вычислении интеграла типа

$$\Big[\int_0^\infty g(u)\,du\Big]^3 - 6\int_0^\infty g(u)\,du\int_u^\infty q(v)\,dv\int_{u+v}^\infty g(w)\,dw,$$

где

$$g(x) = x(\exp[-\alpha(e^{-1{,}35(x-1)} - 2{,}25\,x^{-6})] - 1).$$

2025. **Об элементарном вычислении логарифмов. Хейман** (Über die elementare Berechnung der Logarithmen. Heymann O.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957—1958, **10**, № 9, 403—407 (нем.)

Автор излагает в заметке 2 метода элементарного вычисления десятичных логарифмов.

I. Пусть $1 < n_1 < 10$; $\lg n_1 = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ Тогда характеристика десятичного логарифма числа $n_1{}^{10}$ будет как раз равна a_1. Если затем образовать число $n_2 = n_1{}^{10}/10^{a_1}$, то характеристика десятичного логарифма числа $n_2{}^{10}$ будет как раз равна a_2 и т. д.

II. Второй метод основан на представлении типа $n_1 = (\sqrt{10})^{\alpha_1}(\sqrt[4]{10})^{\alpha_2}(\sqrt[8]{10})^{\alpha_3}\ldots$, где величины α_i принимают только значения 0 и 1, что приводит к равенству $\lg n_1 = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{8} + \cdots$, т. е. к представлению $\lg n_1$ в виде двоичной дроби.

Если заготовить значения $\sqrt[2^m]{10}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, то вычисление десятичного логарифма по этому методу сводится к последовательности простых делений. Можно вместо двоичных дробей получить для $\lg n_1$ представление в виде восьмеричных дробей и т. д.

Во второй части заметки автор рассматривает вопрос об оценке погрешности обоих методов.

З. Х. Рафальсон

2026. **Методы вычисления с помощью рядов. Кено** (Méthode de calcul à l'aide de suites. Cuenod Michel. Thèse, École Polytechn. Feder., Zurich, 1955. Impr. Concorde, Lausanne, 1955, 75p.), Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 535—536 (франц.)

2027. **Суммирование и преобразование рядов** (Summation and manipulation of series), Electronic and Radio Engr, 1958, **35**, № 6, 225—228 (англ.)

Дано несколько хорошо известных примеров суммирования рядов с целью показать инженерам, не имеющим соответствующей математической подготовки, насколько полезен этот математический аппарат.

Я. И. Алихашкин

2028. Наилучшее среднее. Вернотт (La meilleure moyenne. Vernotte Pierre), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 18, 1521—1523 (франц.)

Показывается (без доказательства), что при построении ординат экспериментальной кривой наилучшие результаты получаются не по способу средних арифметических, а по способу средних взвешенных из биномиальных коэффициентов:

$$z_k = (y_k + C^1_n y_{k+1} + C^2_n y_{k+2} + \ldots + y_{k+n}) : 2^n.$$

Приводится выражение и анализ ошибки.

Ю. Ф. Харкеевич

2029. Приближенное определение с высокой численной точностью непрерывной ограниченной на конечном сегменте функции полиномом наилучшей аппроксимации порядка n в смысле Чебышева. Хорнеккер (Détermination approchée, à précision numérique élevée, du polynome de meilleure approximation d'ordre n, au sens de Tchebicheff, d'une fonction bornée continue, sur un segment fini. Hornecker Georges), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 1, 43—46 (франц.)

Показывается, что непрерывная на сегменте $[-1, 1]$ функция $f(x)$ может быть наилучшим образом аппроксимирована, если в качестве узлов интерполяции выбираются $n+2$ экстремальные точки x_k полинома Чебышева $T_{n+1}(x) = \cos[(n+1)\arccos x]$. Приводятся два примера, иллюстрирующих высокую точность аппроксимации. Вычисления могут быть проведены на электронной машине.

Ю. Ф. Харкеевич

2030. Замечание о численном дифференцировании. Майлс (A note on numerical differentiation. Miles John W.), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 1, 97—101 (англ.)

m-я производная $\mathfrak{f}^{(m)}$ от функции $\mathfrak{f} = \{f_i\}$ ($\mathfrak{f}$ — матрица значений функции $f(x)$ в точках x_i) выражается через все значения f_i по формуле

$$\mathfrak{f}^{(m)} = \mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{A}^m\,\mathfrak{S}\mathfrak{f},$$

где $\mathfrak{A}$ — есть сумма косой матрицы $[(x_i - x_j)^{-1}]$ и диагональной матрицы, образованной суммированием элементов в соответствующих строках этой косой матрицы; $\mathfrak{S}$ — есть диагональная матрица, имеющая в качестве своих элементов произведения элементов в соответствующих строках косой матрицы. Резюме автора

2031. К вопросу о методах математической обработки результатов магнитных наблюдений (сферический анализ). Анцилевич М. Г., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1958, № 3, 97—108 (рез. узб.)

2032. Методы решения задач теории упругости, при которых получаются нижние и верхние пределы для искомых величин. Свирский И. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 17—21

Пусть $\{a_{i,k}\}$, $\{b_{i,k}\}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ — эрмитовы матрицы, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} f_i \bar{f}_k \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} f_i \bar{f}_k$$

при любых f_i. Решается задача: найти область, в которой лежит элемент x_{12} эрмитовой матрицы $\{x_{i,k}\}$, удовлетворяющей неравенствам

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} f_i \bar{f}_k \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} x_{ik} f_i \bar{f}_k \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} f_i \bar{f}_k.$$

Решение используется для определения перемещения точки тела при упругой деформации. А. Н. Балуев

2033. Тонкие кольцевые пластинки с большим прогибом. Федерхофер (Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. Federhofer K.), Österr. Ingr-Arch., 1957, **11**, № 4, 252—256 (нем.)

В более ранних работах (Z. angew. Math. und Mech., 1945, **25**; Österr. Ingr-Arch., 1946, **1**, 21) автор выяснил границы применимости мембранной теории (замены тонкой пластинки мембраной) при расчете большого (сравнительно с толщиной) прогиба кольцевой пластинки с отношением радиусов внутренней и внешней окружности ρ_i под действием поперечной нагрузки, равномерно распределенной по внутренней окружности кольца. При малых ρ_i и ν^* (см. ниже) мембранная теория даст резкие расхождения с точной как при расчете прогиба пластинки, так и главных напряжений, а при больших ρ_i ($\rho_i > 0,7$) мембранная теория применима по крайней мере для расчета прогиба. В этих работах точные уравнения теории упругости решались приближенно — методом Галеркина с подбором лишь одного параметра, в связи с чем и выводы автора о границах применимости мембранной теории не были строго доказаны. В настоящей работе уравнения теории упругости решены более точно, методом численного интегрирования для случая $\rho_i = 0{,}1$, $\nu^* = 4$ ($\nu^* = P(\pi r_a E h)^{-1} 12\sqrt{3}\,(1-\mu^2)\times$ $\times (r_a/h)^3$, P — нагрузка, r_a — радиус внешней окружности, h — толщина пластинки, μ — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости), причем результат сравнительно хорошо согласуется с приближенным решением, полученным ранее автором, и резко расходится с решением, даваемым мембранной теорией. М. Л. Бродский

2034. Методы Монте-Карло в задачах переноса. Гёрцел, Калош (Monte Carlo methods in transport problems. Goertzel Gerald, Kalos Malvin H.), Phys. and Math. Vol. 2. London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 315—369 (англ.)

Дается обзор методов Монте-Карло, применяемых в атомной энергетике для расчета задач на перенос частиц. Предварительно дается описание понятий случайных и псевдослучайных чисел, а также приводятся различные способы их построения. Излагаются способы выборки случайных чисел, подчиненных заданному (произвольному) распределению вероятностей (как одномерному, так и многомерному). Особого внимания заслуживает метод отбрасывания (rejection technique), который состоит в простейших случаях в следующем: пусть необходимо построить случайную выборку x с плотностью $p(x)$ и пусть $\sup p(x) = p_0 < \infty$. Положим $p_1(x) = p(x)/p_0 \leqslant 1$. Выбираем случайные числа ξ_1 и ξ_2; если

$$\xi_2 < p_1(\xi_1), \qquad (1)$$

то принимаем $x = \xi_1$; если (1) не выполнено, то процесс повторяется. Приводятся примеры выборок „случайных" $\operatorname{tg} x$, $\cos x$, $\ln x$ и др.

Далее излагаются способы вычисления определенных интегралов методом Монте-Карло и даются оценки возникающей при этом статистической погрешности. Приводится построение случайных блужданий (историй) частицы, соответствующих реальному процессу переноса, а также даются некоторые модификации процесса, иногда существенно уменьшающие дисперсию. Процесс построения случайных блужданий обобщается для решения произвольных интегральных уравнений, как однородных, так и неоднородных.

Как известно, статистическая погрешность методов Монте-Карло пропорциональна величине $\sigma^2/\sqrt{N}$, где N — число испытаний и σ^2 — дисперсия. Поэтому для увеличения точности методов Монте-Карло необходимо,

наряду с увеличением числа испытаний N, выбирать такой случайный процесс, который обеспечивал бы для случайной величины возможно малую дисперсию. Поэтому важное значение в методах Монте-Карло приобретают приемы, позволяющие уменьшать дисперсию.

Среди этих методов отмечен метод существенной выборки (importance sampling), использующий предварительную информацию о решении, и метод выборки по группам (quota sampling), являющийся, по существу, комбинацией статистического и детерминистического процессов.

В конце работы приводятся и обсуждаются различные способы и конкретные расчеты задач о прохождении γ-лучей и нейтронов через вещество (задачи защиты), а также задач, возникающих при расчете ядерных реакторов. В. С. Владимиров

2035. **Приложение графического интегрирования к исчислению объемов тел, ограниченных топографическими поверхностями. Уствольская Т. И.**, Сб. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1958, вып. 158, 409—421

По формулам, выведенным автором ранее (РЖМат, 1958, 7223), определяются погрешности приближенного вычисления объемов хорошо известным способом графического интегрирования кривой, ординаты которой пропорциональны площадям параллельных сечений, предварительно находимых планиметрированием, либо графическим интегрированием. А. Б. Штыкан

2036. **Графическое решение уравнения Бульфа—Брэгга. Черногорский** (Grafické řešení Braggovy rovnice. Černohorský Martin), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1958, **30**, № 4, 155—159 (чешск.; рез. русск., англ.)

Приводится номограмма для решения уравнения Бульфа—Брэгга в интервале длин волн 0,5..., 2,3 Å.

2037. **Основы номографии и ее изучение в курсе математики общеобразовательной школы. Зимон** (Die Grundlagen der Nomographie und ihre Erarbeitung im Mathematik unterricht der allgemeinbildenden Schule. Simon Hans), Math. und Phys. Schule, 1958, **5**, 240—248 (нем.)

Даются методические указания по изучению номографии в школе. Уделено внимание вопросам подготовки к восприятию основных идей номографии путем внедрения графических методов при изучении функциональной зависимости. Предлагается ограничиться изучением основных типов номограмм. Даются указания по выбору номограммы для решения поставленной задачи. С. М. Головина

2038. **О линейной зависимости функций и методе условных производных в бесквадратурной номографии. Вильнер И. А.**, Сборник статей Всесоюз. заоч. политехн. ин-та, 1954, вып. 7, 105—128

2039 Д. **Вопросы точности графического интегрирования функций. Уствольская Т. И.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета, Л., 1958

2040 Д. **О решении уравнения Лапласа в эллиптических и эллипсоидальных областях. Взорова А. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т точной механ. и вычисл. техн. АН СССР, М., 1958

См. также: 1390, 1523, 1558, 1608, 1709

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

2041. **Проект вычислительной машины СТРЕТЧ фирмы «ИБМ». Макдоналд** (The project STRETCH computer (IBM). Macdonald Neil D.), Computers and Automat., 1957, **6**, № 4, 8—9 (англ.)

Сообщается о выполнении в ноябре 1956 г. Комиссией по атомной энергии США заказа фирмы «ИБМ» на постройку цифровой вычислительной машины под названием СТРЕТЧ (STRETCH), которая должна быть в 100—200 раз быстрее и производительней, чем наиболее совершенные современные американские цифровые вычислительные машины такие, как, например, ИБМ-704 и -705.

Указываются основные пути достижения высокой скорости и большой мощности машины: использование сверхбыстродействующих элементов, разрабатываемых в настоящее время, с перспективой разрешения в ближайшие годы некоторых новых проблем; раздробление оборудования для увеличения количества одновременно выполняемых операций с целью устранения ожидания центральным вычислительным блоком; применение более сложных команд для уменьшения количества шагов в вычислениях.

Машина СТРЕТЧ будет иметь несколько секций. Одна из них—секция ввода-вывода для связи с блоками магнитных лент, другая представляет собой промежуточную последовательную вычислительную машину, осуществляющую организацию движения входных и выходных данных. Третья секция является центральной вычислительной машиной параллельного действия, осуществляющей наиболее быстрым способом вычислительные операции задачи. Коды чисел и команд будут иметь от 12 до 15 десятичных разрядов.

Промежуточная последовательная цифровая вычислительная машина будет работать как в двоичной, так и в десятичной системе счисления, с фиксированной или с плавающей запятой. Она будет выполнять сложение за 2—3 мксек, а умножение за 5÷15 мксек. Логические операции, являющиеся более сложными, чем в современных машинах, будут выполняться за 2 мксек. Скорость этой машины будет в 5—10 раз выше скорости машины ИБМ-704 или-705.

Центральная параллельная вычислительная машина будет получать в 1 сек. миллион или более команд, подготовленных последовательной машиной, и выполнять сложение и вычитание с фиксированной запятой за 0,2 мксек, а с плавающей запятой—за 0,6 мксек. Умножение будет занимать 1,2 мксек. Передача между шинами будет осуществляться за 0,2 мксек. Предполагается, что полная емкость запоминающих устройств на ферритах, магнитных барабанах и лентах составит 100 млн. чисел и команд.

Последовательная машина будет иметь быстродействующее параллельное запоминающее устройство емкостью 8192 64-разрядных двоичных числа. Его полный цикл работы составит 2 мксек., причем считывание займет всего 0,8 мксек.

Центральная параллельная машина будет иметь параллельную быстродействующую память емкостью 512 чисел с циклом работы 0,5 мксек.

Машина СТРЕТЧ будет иметь систему автоматического контроля, средства для обнаружения и указания ошибок и частично автоматическую коррекцию ошибок и будет построена на полупроводниковых триодах, работающих с частотой 10 *мгц*. Б. И. Стрелков

2042. Цифровые вычислительные машины для самолетов и ракет (Digital computers earn their wings), Control Engng, 1957, **4**, № 9, 26—27, 29—31 (англ.)

Центром испытания ракет во Флориде было проведено 13 успешных испытаний ракеты «X-10», в состав системы навигации которой входит цифровой дифференциальный анализатор. Отмечается, что идея о применении цифровой вычислительной машины для управления ракетным самолетом возникла 9 лет тому назад в связи с тем, что применявшиеся тогда аналоговые устройства перестали удовлетворять требованиям к точности и гибкости управления при сверхзвуковых скоростях. Основной задачей было снизить размеры цифровой машины, которая в 1948 г. занимала целый зал и имела тысячи электронных ламп. Предполагалось, что машина будет в течение полета многократно решать задачи навигации и управления и при этом не будет требовать большого объема памяти благодаря малому числу исходных параметров и малому числу разрядов. Многократность решения упрощала вопросы контроля, так как предполагалось, что сделанная однажды ошибка будет исправлена в следующем цикле.

В 1950 г. фирма «Нортроп» (Northrop) разработала цифровой дифференциальный анализатор, который состоял из 22 интеграторов, занимал объем 0,17 $м^3$ и обладал примерно половиной необходимой для решения навигационных задач емкости. Следующим шагом в развитии цифровых дифференциальных анализаторов было выполнение их на полупроводниковых триодах. Первый такой образец был изготовлен фирмой «Норт Америкен» в 1955 г. Цифровой дифференциальный анализатор, установленный на ракете «X-10», занимает объем 0,08 $м^3$, весит 65,8 *кг*, потребляет мощность 100 *вт*, имеет 93 интегратора и решает дифференциальные и тригонометрические уравнения.

Наряду с цифровыми дифференциальными анализаторами, в навигационных системах используются также универсальные цифровые машины, обладающие большей гибкостью. Высказывается мнение, что в настоящее время и в ближайшем будущем примерно в половине случаев будут использоваться универсальные машины.

В 1954 г. фирма «Хьюз Эйркрафт» (Hughes Aircraft) построила универсальную вычислительную машину ДИДЖИТАК, которая была достаточно мала для того, чтобы ее можно было установить на самолете. Но эта машина не включалась в систему управления. Как и в предыдущем случае, решающую роль сыграло применение полупроводниковых триодов. Вариант ДИДЖИТАК на полупроводниковых триодах был установлен на борту самолета F-102, который первым был оборудован универсальной цифровой вычислительной машиной. В 1955 г. фирма «Филко» (Philco) разработала универсальную машину «С-1100», имеющую 3 900 полупроводниковых триодов, 2 300 сопротивлений и 280 конденсаторов.

Отмечается, что вычислительные машины не используются в настоящее время на самолетах гражданского флота ввиду своей высокой стоимости (50—75 тыс. долл.); однако скорости современных реактивных лайнеров достаточны для применения именно цифровых машин, и, кроме того, актуальной задачей для них является расчет наиболее экономичных режимов полета.

Приводится список фирм, работающих в области цифровых самолетных устройств. Фирма «Хьюз Эйркрафт» разрабатывает в настоящее время дополнительное оборудование для бомбардировщиков и ракет. Фирма «Норт Америкен» разрабатывает цифровой дифференциальный анализатор на полупроводниковых триодах. Фирма «Либраскоп» (Librascope Inc.) разрабатывает цифровые вычислительные машины для морской авиации на миниатюрных электронных лампах. Фирма «Филко» построила три универсальные цифровые машины на полупроводниковых триодах для морских штурмовиков. Цифровые вычислительные машины для самолетов разрабатываются также фирмами ИБМ, «Литтон» (Litton Industries), «Рамо-Вулдридж» (Ramo Wooldridge) и «Белл» (Bell Telephone Labs). Использованием цифровых машин занимаются фирмы «Миннеаполис-Хониуэлл» (Minneapolis-Honeywell) и «Локхид» (Lockheed Aircraft Corp.).

А. В. Шилейко

2043. Конструирование устройства управления электронной цифровой вычислительной машины. Уилкс, Ренуик, Уилер (The design of the control unit of an electronic digital computer. Wilkes M. V., Renwick W., Wheeler D. J.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1958, **B105**, № 20, 121—128. Discuss., 144—146 (англ.)

Функцией устройства управления электронной вычислительной машины является выработка последовательности импульсов, которые поступают на запоминающее устройство, арифметическое устройство и другие устройства машины для обеспечения определенного порядка выполнения программы. В статье обсуждается несколько путей для построения гибкого устройства управления вычислительной машины. Для одного типа устройств управления порядок выполнения команд определяется размещением диодов в диодной матрице, для другого — соответствующей прошивкой проводов в матрице ферритовых сердечников. В первой части рассмотрен логический расчет устройства управления, во второй — практический расчет устройства, использующего ферритовую матрицу, аналогичного устройству управления одноадресной машины ЭДСАК-II, в котором числа и команды размещены в одном запоминающем устройстве. Расчет может использоваться и для вычислительных машин других типов.

Диодное устройство управления имеет дешифратор, который управляет двумя матрицами, из которых матрица *A* управляет арифметическим и другими устройствами машины, а матрица *B* определяет следующее число, выбираемое дешифратором, причем код матрицы *B* передается на входной регистр дешифратора либо при помощи линий задержки, либо посредством дополнительного буферного регистра. Кроме того, в матрице *B* некоторые линии должны иметь разветвления, которые необходимы, например, при операции умножения, когда следующий шаг команды выбирается в зависимости от двоичной цифры данного разряда множителя, или при необходимости перехода не к следующей команде, а к какой-либо другой в зависимости от результата предыдущей операции.

Для устранения буферного регистра предлагается схема переменного устройства управления, где дешифратор и диодные матрицы разбиты на две части и выход первой части матрицы *B* связан со входным регистром второй части дешифратора, и наоборот.

Диодные матрицы выгодно использовать в устройствах управления машин с относительно простыми командами, но если команды становятся сложными, то число диодов становится очень большим. В этих случаях более выгодным является применение матриц из ферритовых сердечников.

Используется прямоугольная матрица ферритовых сердечников, управляемая двумя регистрами *X* и *Y*. Сердечники работают с постоянным смещением. Имеются две системы выходных проводов. Прошивка первой системы выполнена в соответствии с матрицей *A* диодной схемы и используется для управления арифметическим и другими устройствами машины, а выхода второй системы используются для управления входными регистрами. Там, где необходимо разветвление на пересечении координатных проводов, помещается 2 сердечника, имеющих по 1 дополнительной обмотке запрещения, питаемых от специального триггера, устанавливающего выбор одной из них. В другом варианте для получения разветвления некоторые ряды матрицы делаются двойными и

выбор ветви ряда производится в зависимости от положения управляющего триггера.

Рассматривается также работа матриц иных конфигураций, например треугольной, позволяющей сократить число оборудования. При конструировании больших матриц становится выгодным разбиение на меньшие подматрицы, прошитые более сложным путем. Так, матрицу 32×32 разбивают на 64 подматрицы двух типов прошивки, расположенных в шахматном порядке и связанных последовательно так, что в результате получается матрица, эквивалентная матрице прямой прошивки, имеющей в 64 пересечениях по 4 сердечника, в 128 пересечениях по 2 сердечника, в 512 пересечениях по 1 сердечнику и не имеющей сердечников в 320 пересечениях. Для системы с разветвлением рядов приводится прямоугольная матрица, имеющая 11 рядов и 16 колонок. Один ряд разветвляется на 4 параллельных ветви, два ряда имеют по 2 ветви и восемь по одной. Приводится схема семиразрядного дешифратора, применяемого для управления подобными схемами.

Проводится подробный теоретический расчет токов выборки и тока смещения и приводятся экспериментальные данные для 8-*мм* сердечников, используемых в машине ЭДСАК-II, обосновывается выбор витков обмоток и токов ламп формирователей. Исследовались возможности построения больших матричных схем управления, исходя из соотношения полезных сигналов и сигналов помехи. При работе на матрице 6×8 сигнал помехи был равен 0,1 *в* на виток, а полезный сигнал 3 *в* на виток, причем время обращения для хороших сердечников могло быть сокращено до 1,5 мксек. Авторы считают, что при введении компенсации сигналов помехи объем матрицы может быть увеличен до 1024 сердечников.

Годичный опыт эксплуатации матрицы управления машины ЭДСАК-II размером 8×6 дал очень хорошие результаты. О. В. Бачин

2044. Быстрое цифровое умножение. Леман (High-speed digital multiplication. Lehman M.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 3, 204—205 (англ.)

Предлагается новый метод умножения двоичных чисел, названный «Modified, Short-Cnt». Метод удобен для цифровых машин, в которых длительность выполнения операций зависит от типа операции и от обрабатываемых чисел; следующая операция начинается сразу же после завершения предыдущей. При этом отсутствует синхронизирующее устройство, размечающее определенные длительности тактов. Известен принцип ускоренного умножения в таких машинах, который основан на том, что двоичный множитель представляется в особой системе счисления, в которой каждый разряд представляется одной двоичной значащей цифрой и знаком. Общее число разрядов получается на единицу больше, чем в обыкновенном двоичном числе. Такое своеобразное «троичное» кодирование двоичного числа можно формализовать соотношением

$$2^{-n}\cdot\sum_{t=0}^{m} b_t\cdot 2^t = 2^{-n}\cdot\sum_{t=0}^{m+1}(-1)^{s_t}c_t\cdot 2^t. \qquad (1)$$

Здесь в левой части равенства стоит исходное двоичное число, причем коэффициент 2^{-n} введен для того, чтобы число, представляемое суммой, было целым. Число исходных двоичных разрядов равно $m+1$. Величины c_t являются значащими двоичными цифрами преобразованного числа, s_t — параметры, определяющие знаки преобразованных разрядов. Умножение множимого на такой множитель состоит в многократном сложении со сдвигами, причем множимое прибавляется к частичной сумме каждый раз, когда $(-1)^{s_t}\cdot c_t = +1$. Если это выражение равно —1, то производится вычитание множимого (т. е. прибавление дополнения).

Если $c_t = 0$, то никакой операции не производится. Таким образом, при этом методе на умножение нужно столько тактов, сколько имеется членов в правой части (1), отличных от 0. Между b_t, c_t и s_t могут, вообще говоря, существовать различные соотношения. В статье рассматривается вариант описанного метода, дающий, по мнению автора, минимальную длительность сложения. Связь между b_t, c_t и s_t при этом задается следующими соотношениями:

$$c_t = [(b_t\cdot\bar{b}_{t-1})\wedge(\bar{b}_t\cdot b_{t-1})]\,\bar{c}_{t-1}, \qquad (2)$$

$$s_t = (b_{t+1}\cdot b_t)\wedge\{[(b_{t+1}\cdot\bar{b}_t)\wedge(\bar{b}_{t+1}\cdot b_t)]\cdot s_{t-1}\} =$$

$$= (c_t\cdot b_{t+1})\wedge(\bar{c}_t\cdot s_{t-1}).$$

Знак «·» обозначает логическое умножение, знак «∧» — логическое сложение. Среднее число тактов, требующихся на операцию умножения, при этом оценивается величиной

$$\frac{1}{9}\left\{3m+4-[9-(-1)^m]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right\},$$

которая при наиболее употребительных значениях m равна приблизительно $m/3$. Из (2) следует, что максимальное число тактов не может быть больше, чем $(m+2)/2$, причем каждый раз требуется сдвиг множимого не менее чем на два разряда. Если реализовать схему сдвига на два разряда, то соотношение (2) упрощается:

$$c_t = (b_t\cdot\bar{b}_{t-1})\wedge(\bar{b}_t\cdot b_{t-1}).$$

Это дает дополнительное сокращение времени умножения на 30%. Библ. 5 назв. В. А. Брик

2045. Логика реверсивных двоичных счетчиков. Голе (The logic of bidirectional binary counters. Golay Marcel J. E.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 1, 1—4, 60 (англ.)

Рассматривается логика реверсивных двоичных счетчиков, отличающихся от обычных реверсивных счетчиков наличием в каждом разряде двух триггеров и специальных передающих логических схем, управляющих состояниями триггеров в определенной зависимости от их предыдущих состояний и от состояния триггеров младшего разряда. Один из триггеров каждого разряда играет роль «истинного», показывающего истинное состояние счета, а другой — «ложного», который используется для запоминания предыдущего значения разряда. Сравнивается два вида таких счетчиков, в одном из которых для связи между разрядами используется только один из двух триггеров разряда, а в другом связь осуществляется с использованием обоих триггеров. Счетчики первого вида могут быть сделаны реверсивными с помощью двух дополнительных межкаскадных передающих логических схем, управляемых двумя отдельными командами для прямого и обратного счета. Счетчики второго вида могут быть сделаны реверсивными с помощью четырех дополнительных передающих логических схем, обладающих свойством самоопределения направления счета, что позволяет счетчику менять направление счета без специальных на то команд. Вход и выход такого счетчика имеет вид двух двоичных каналов.

Такие самонаправляющиеся реверсивные двоичные счетчики могут быть использованы в преобразователях положения вала в цифровую форму, так как они обладда-

ют еще одним важным свойством — устранять неопределенность счета, возникающую при переходе с одного квантованного уровня на другой. Еще одним важным применением таких реверсивных счетчиков является подсчет разности двух серий импульсов Б. И. Стрелков

2046. Лемма для автоматического оптимального программирования на ИБМ-650. Уагнер (A lemma for automatic optimum programming on the IBM 650. Wagner Harvey M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 58, 101—104 (англ.)

Приводится краткое описание запоминающего устройства машины ИБМ-650, ее адресов и структуры команд. Принятая на машине система адресов команд дает возможность использовать принцип оптимального программирования.

Формулируется лемма, связанная с созданием программы автоматического присвоения оптимальных адресов числам и командам в программах, составленных на ИБМ-650. Содержание леммы таково: Пусть n и k — целые положительные числа. Тогда последовательность (а) $\sim 1, 1+n, 1+2n, 1+3n \ldots$ по модулю $(nk+1)$ полностью исчерпывает числа $(1, 2, 3, \ldots nk+1)$ до того, как начнут повторяться числа последовательности. Аналогичное справедливо для последовательностей:

(б) $\sim 1,1+n, 1+2n, 1+3n \ldots$ по модулю $[n(2k+1)+2]/2$ при n — четном и

(в) $\sim 1,1+n, 1+2n, 1+3n \ldots$ по модулю $[n(2k+1)+1]/2$ при n — нечетном.

Приводится несколько примеров использования леммы. Дается краткое описание возможного варианта программы автоматического присвоения оптимальных адресов (оптимизирующей программы) для обработки программ, составленных на ИБМ-650. Максимальный выигрыш во времени получается в том случае, когда приказы в исходной программе записаны в последовательности, близкой к истинному чередованию команд. В этом случае также облегчается исправление и дополнение программ.

Для обработки с помощью оптимизирующей программы рабочая программа составляется в истинных барабанных адресах. Младшая цифра адреса (8 или 9) определяет, должен или нет изменяться этот адрес на оптимальный. К оптимизирующей программе составляется «информационная карта», в которой указываются начальный и конечный адреса в программе и начальный адрес будущей оптимальной программы.

Оптимизирующая программа состоит из двух частей. В первой части вычисляется общее количество занятых ячеек памяти и составляется оптимальная последовательность адресов ячеек памяти по заранее выбранному модулю n, в соответствии с одним из случаев приведенной леммы. Во второй части производится замена адресов программы на оптимальные и печать оптимальной программы.

Степень оптимизации не зависит от числа команд, уже оптимально расположенных. Вводя различные n и k, можно выбрать их оптимальные значения. Автором составлена оптимизирующая программа на 100 ячейках памяти, использующая случай (а) приведенной леммы, позволяющая оптимизировать программу со скоростью 100 карт в 1 мин. З. Д. Доброхотова

2047. На языке вычислительных машин. Хамблин (Computer languages. Hamblin C. L.), Austral. J. Sci., 1957, 20, № 5, 135—139 (англ.)

Рассматриваются общие вопросы автопрограммирования. Описаны две системы написания логических формул, не содержащие скобок и удобные для обозначения последовательности действий в алгебраических выражениях. Автором введен ряд новых символов, расширяющих возможности применения латинского и греческого алфавитов при программировании. Обсуждается условное обозначение наиболее трудных в этом отношении команд условного и безусловного перехода, а также операций с накоплением. Библ. 3 назв. А. Ф. Смирнов

2048. Решение задачи Дирихле на машине ОРДВАК, Янг (ORDVAC solutions of the Dirichlet problem. Young David M.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 137—161 (англ.)

Отмечается, что недостаточно широкое применение электронных машин для решения уравнений в частных производных эллиптического типа методом сеток объясняется большой работой, которую необходимо предварительно проделать в каждом частном случае для того, чтобы решить задачу на машине. В связи с этим ставится задача создания алгоритма, пригодного для решения как можно более широкого класса задач, который позволит свести работу подготовки исходного материала для решения конкретной задачи к заданию информации о типе уравнения, области определения, граничных значениях, точности и т. д.

Такая информация могла бы вводиться в машину с отдельной ленты, в то время как общая программа алгоритма, записанная на другой ленте, оставалась бы неизменной от задачи к задаче.

Описываются возможности программы, изготовленной для машины ОРДВАК, которая представляет первый шаг в этом направлении, и рассчитана на решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В качестве конечноразностных аналогов уравнения Лапласа в программе используется либо формула (1), либо (2):

$$u_{m,n} = \frac{1}{4}(u_{m+1,\,n} + u_{m-1,\,n} + u_{m,\,n+1} + u_{m,\,n-1}), \quad (1)$$

$$u_{m,\,n} = {}^1/_{20}\begin{cases} 4(u_{m+1,\,n} + u_{m-1,\,n} + u_{m,\,n+1} + u_{m,\,n-1}) + \\ + u_{m+1,\,n+1} + u_{m+1,\,n-1} + u_{m-1,\,n+1} + \\ + u_{m-1,\,n-1} \end{cases} \quad (2)$$

Программа пригодна для областей таких конфигураций, которые соответствуют любому семейству узлов сетки с координатами (mh, nh), где $m, n = 1, 2, 3, \ldots, 19\,(h > 0)$, а граница состоит из отрезков прямых или диагоналей сетки.

Для решения уравнений в конечных разностях используется модифицированный метод итераций Гаусса — Зейделя, который состоит в следующем. Вводится так называемый релаксационный множитель (relaxation factor) ω. В качестве нового, улучшенного значения функции на некотором шаге итерации берется предыдущее значение, сложенное с разностью предыдущего значения и значения, вычисленного, например, по форме (1), причем разность умножается на ω.

Приведены экспериментальные таблицы, показывающие, что надлежащий выбор $\omega\,(1 \leqslant \omega \leqslant 2)$ позволяет уменьшить число итераций, необходимых для достижения заданной точности, в несколько раз (в некоторых случаях в 10 раз) по сравнению с обычным методом итераций. Дана формула для вычисления этого оптимального ω_b для формулы (1):

$$\omega_b = 1 + \frac{\lambda}{(1+\sqrt{1-\lambda})^2},$$

где λ — спектральная норма линейного преобразования определяемого методом Гаусса — Зейделя.

Предлагается несколько способов приближенного определения ω_b в процессе счета. Эмпирический метод основан на том, что около ста итераций достаточно для определения λ и, следовательно, ω_b ($\lambda = \sigma_{n+1} / \sigma_n$; σ_n — максимум абсолютной величины невязки при n-й итерации). Другой метод основан на том, что в качестве

ω берется ω_b для квадрата, покрывающего область. Третий метод состоит в использовании ω_b, вычисленного для равновеликого по площади квадрата (для квадрата λ легко вычислить).

Приведенный в статье экспериментальный материал показывает, что наилучшие результаты дает метод равновеликих квадратов. Даются также результаты экспериментального исследования зависимости точности решения от шага сетки и краевых условий.

Л. Н. Королев

2049. Научные проблемы, решаемые на машине УНИВАК (Scientific problems solved through UNIVAC), J. Franklin Inst., 1958, 265, № 3, 255—257 (англ.)

Сообщение института Франклина о некоторых научных проблемах, решавшихся на вычислительной машине УНИВАК в вычислительном центре этого института в течение первого года работы машины.

При решении различных проблем часто приходилось решать системы линейных алгебраических уравнений, число которых доходило до 25. Для решения линейных уравнений была создана специальная программа, использующая метод Гаусса. Время решения системы уравнений с n неизвестными равно

$$\frac{0{,}07}{6}\,[2n + 6n - 1] \text{ сек.}$$

О. В. Бачин

2050. Малая экспериментальная транзисторная вычислительная машина (A small experimental transistor digital computer), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 7 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 2) (англ.)

В Манчестерском университете сконструирована малая экспериментальная транзисторная вычислительная машина с магнитным барабаном, использующая точечные транзисторы. Машина предназначена для опробования транзисторных схем и исследования их поведения в вычислительной машине. Арифметический узел собран по последовательной схеме.

Тактирующие импульсы для работы машины получаются с маркерной дорожки магнитного барабана, на которой записано 3072 импульса, что дает частоту следования 125 *кгц*. Операции производятся над 48-разрядными двоичными числами. Накопитель и инструкционные регистры выполняются на регенеративных дорожках барабана, на которых считывающая и записывающая головки расположены на одной дорожке, но смещены на длину одного кода. Все транзисторы работают в схемах, имеющих 2 устойчивых состояния. Для клапанирования сигналов используются точечные диоды с последующим усилением сигнала транзистором. Усилители записи и чтения выполнены на лампах. Потребление мощности 100 транзисторами и 600 диодами равно 75 *вт*.

После некоторого периода эксплуатации замечено, что некоторые транзисторы меняют свою характеристику.

В. Д. Князев

2051. Цифровая машина для решения дифференциальных уравнений «Диджилог» (Computers. Wang Laboratory), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 11 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 2) (англ.)

Ванговская лаборатория (Wang Laboratory) объявила о выпуске новой цифровой машины для решения дифференциальных уравнений «Диджилог» (Digilog), не требующей программирования. На ней можно решать линейные и нелинейные дифференциальные уравнения, системы дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных и интегральные уравнения. Точность вычисления машины составляет 5 десятичных знаков. Система состит из нескольких типов вычислительных блоков и блока управления. Все вычислительные блоки соединяются подобно вычислительным блокам моделирующих устройств. Вывод данных производится при помощи электрической пишущей машинки, перфоратора или вычерчивателя кривых.

В. Д. Князев

2052. Еще об автоматической обработке данных (More automatic data handling), Automat. Control, 1957, 7, № 3, 68—69 (англ.)

Авиационная компания «Дуглас» проектирует автоматическую цифровую систему по обработке информации, получаемой во время летных испытаний самолета. В системе предусматриваются два полукомплекта, один из которых помещается в носовой части фюзеляжа, другой — на аэродромной летно-испытательной станции. Необходимость создания такой системы была вызвана следующими обстоятельствами: а) сложность установки и обслуживания большого числа записывающих и телеизмерительных устройств, необходимых для испытания самолета; б) значительная трата времени на калибровку приборов до и после полета; в) обработка пленок и лент с записью данных летных испытаний; просмотр и считывание данных и их подготовка для ввода в вычислительную машину также отнимают много времени. Все это тормозило внесение необходимых конструктивных изменений в испытываемую машину и затрудняло планирование дальнейших испытаний.

Для проектируемой системы данные летных испытаний должны поступать в цифровой форме и записываться на магнитной ленте. В период испытания данные о поведении самолета передаются по телеметрической системе в наземную станцию. Здесь с выхода преобразователя данные передаются в форме, позволяющей непосредственно вводить их в вычислительную машину, минуя промежуточную обработку. В вычислительную машину вводится также программа летного испытания.

В проектируемой системе, в частности, предусмотрены специальные блоки для «беглого просмотра», позволяющего одновременное сканирование 100 каналов, по которым передаются летно-испытательные данные. Один из таких блоков установлен на самолете, два других на аэродромной летно-испытательной станции. «Беглый просмотр» позволяет выделять из последовательности передаваемых данных участки, представляющие наибольший интерес для последующего внимательного изучения.

Подсчитано, что вместо двух недель, необходимых для подготовки информации существующими методами, потребуется лишь два дня. Внедрение такой системы, как ожидают, приведет к четырехкратному сокращению человеко-часов. Описаны требования, которым должны удовлетворять как самолетный полукомплект, так и наземное оборудование. Приведены эскизы аэродромной летно-испытательной станции с автоматической системой обработки информации и разрез носовой части фюзеляжа с самолетным полукомплектом. Описания узлов системы нет, возможные схемные решения также не приводятся.

Г. К. Москатов

2053. Логические вычислительные машины и логическая релейная вычислительная машина Института низкочастотной техники при Венской высшей технической школе. Земанек (Logistische Rechenmaschinen unter besonderer Berücksichtigung der logistischen Relaisrechenmaschine des Instituts für Niederfrequenztechnik der Technischen Hochschule Wien. Zemanek Heinz), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 207—212 227, Diskuss., 212 (нем.; рез. англ.)

Обзорная статья, посвященная современным логическим релейным вычислительным машинам. В начале статьи кратко излагаются элементы алгебры логики в применении к синтезу, анализу и упрощению вычислительных релейно-контактных схем. Показана возможность классификации истинностных функций, основанная на представлении истинностной функции в совершенной дизъюнктивной форме. В соответствии с этим

указаны принципы классификации анализирующих логических машин. В выражениях алгебры логики кратко поясняются понятия, связанные с конструкцией и работой современных релейных логических машин, облегчающих и ускоряющих проектирование переключающих схем. Цель изобретения подобных машин — практическая передача истинностных функций в виде релейно-контактных схем с минимальной затратой элементов (реле) и времени, необходимого для отыскания решения задачи путем рассмотрения всех возможных случаев. Машины для упрощения должны находить эту минимальную форму посредством рассмотрения ее логических условий.

Приведены некоторые основные данные 5 логических машин, а также подробное описание их схем и фото. Первая машина этого рода построена в 1947 г. Калином и Буркхартом. Она графическим методом осуществляет полный анализ любой истинностной функции. В машинах фирмы «Ферранти» и Венской высшей технической школы два управляющих переключателя производят 2^n полных соединений. Машина Венской высшей технической школы, по мнению автора, отличается более совершенной конструкцией по сравнению с машиной фирмы «Ферранти»: выпрямители заменены реле; осуществляется автоматический контроль хода вычислений; машина останавливается, если незначительно эксплуатационное напряжение.

Машина Шеннона и Мура фирмы «Белл» задумана для облегчения проектирования релейно-контактных схем (РЖМат, 1954, 5289).

Машина Боброва является первым шагом в создании машин упрощения, но дает не все упрощения. Однако, например, для случая 4 логических переменных можно менее чем через 5 сек. после начала счета получить упрощенную схему непосредственно по сигналам неоновых ламп.

Недостатком этих машин является то, что минимальное решение они находят случайно, посредством проб не указывая метода его нахождения. Кроме того, они непригодны для доказательства того, что это решение является действительно минимальным. В конце статьи приводится дискуссия. И. Ф. Шелихова

2054. О механической конструкции машины системы ЕРМА. Мельвилл (Mechanical design consideration in the ERMA system. Melville Richard W.), IRE Trans. Prod. Techn., 1957, 2, Apr., 115—124 (англ.)

ЕРМА — электронная машина для подсчета и записи, а также проверки счетов в банках. При разработке машины основной упор делался на надежность работы и легкий доступ к отдельным узлам при эксплуатации и в случае ремонта, а также большое внимание уделялось стандартизации элементов. В машине используются релейные узлы, печатный монтаж, переходные вставки для проверки и отладки схем непосредственно в машине.

Имеются специальные каналы для проводов межпанельного монтажа.

Подчеркивается преимущество неспаянного монтажа между отдельными узлами и использование для этой цели разъемных контактов. Дается описание метода охлаждения электровакуумных ламп и деталей, начиная от поступления воздуха по воздуховодам и кончая системой водяного охлаждения нагретого воздуха. Вся система построена таким образом, что охлаждение идет по замкнутому кругу. При этом используется электростатический воздушный фильтр. В машине установлено также специальное оборудование; такое, как магнитный барабан, переключающие блоки и механизм подачи ленты.

Отмечается, что когда разрабатывается любое сложное устройство, например, такое как ЕРМА, то нельзя заранее предусмотреть конструкцию и схемное выполнение всех узлов. Всегда в процессе конструирования, когда функциональные взаимоотношения между отдельными узлами становятся более ясными, возможны изменения, которые очень часто приводят к усложнению конструкции.

В ходе конструирования следует точнее предусматривать расположение межпанельного монтажа, в противном случае это ведет к неудобствам при эксплуатации и ремонте.

В статье приводится 16 фотографий, характеризующих конструкцию машины ЕРМА. Б. А. Сепп

2055. Вычислительная система ИБМ-650 РАМАК («Computerama Company» IBM RAMAC 650), J. Mach. Account., 1957, 8, № 10, 17—55 (англ.)

На конкретном примере разбираются возможности системы ИБМ-650 РАМАК для обработки данных. Система состоит из: вычислительного устройства 650, устройства управления 652, считывающего устройства и перфоратора 533, запоминающего устройства на магнитном барабане 653, табулятора 407, запоминающего устройства на магнитных дисках 355, двух справочных станций 838 и блока питания 655. Для обслуживания машины используется также сортировка 83, перфоратор 24 с механизмом самоконтроля и перфоратор с печатающей машиной 824.

В статье рассматривается работа этой системы для обработки приказов продажи, счетов дебиторов, для инвентаризации товаров и анализа продажи некоторой гипотетической фирмы, которая характеризуется следующими цифрами: 2000 покупателей, 5000 наименований товаров, 200 приказов продажи в день по 5 предметов в каждом приказе, 100 поставщиков.

Машина способна выдавать справки по любой записи в любое время дня с помощью 2 справочных станций. Одна станция используется при инвентаризации, вторая для получения информации в течение дня.

Исходные данные задачи вводятся в машину с помощью перфокарт. При обработке приказов покупателей на товары перфокарта содержит номер счета, дату заказа покупателя, номер заказа, номер товара, число предметов, количество каждого товара и общее количество.

Номера товаров и счетов записываются пятизначным числом, причем цифра в младшем разряде используется для контроля.

В результате обработки приказов продажи выявляются ошибки, производятся необходимые вычисления и печатается накладная в 2 экземплярах на каждый приказ. Накладная разделяется на две части: слева перечисляются товары с указанием цены, внизу указывается предыдущий баланс счета, общая стоимость товара по накладной и новый баланс счета; данные справа предназначены для склада.

Память на магнитных дисках емкостью 6 млн. цифр используется менее, чем на 50%, из них отводится 1,2 млн. — для записей покупателей (600 цифр каждая запись), 1,5 млн. — для записей товаров (300 цифр на запись), 0,6 млн. — для поставщиков и 0,6 млн. — для программы. Запись в память и выборка из нее производится через вычислительное устройство 650.

Для каждого вида работы машины в статье приведена схема движения обрабатываемых документов. Имеются также образцы перфокарт с расположением соответствующих данных, накладная, инвентаризационная ведомость, счет дебитора и другие документы. Всего приведено 11 различных документов. М. С. Саплин

2056. Электронная банковская система (An electronic bank deposit system), J. Mach. Account., 1958, 9, № 2, 30—31 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «ИБМ» о выпуске электронной системы для обработки банковских счетов. Ос-

новной частью системы служит электронная вычислительная машина ИБМ-650, дополненная запоминающим устройством большой емкости РАМАК на магнитных дисках, что достаточно для ведения 40 000 счетов. Запись входных данных производится на чеках магнитными чернилами специальным записывающим устройством со скоростью до 3000 чеков в 1 час в зависимости от квалификации оператора. В машине производится сортировка чеков со скоростью 900 чеков в 1 мин. и автоматически подсчитывается состояние счета клиента. О. В. Бачин

2057. Как сортирующее устройство на четыре ленты упрощает запоминающее устройство. Каннинг (How the four-tape sorter simplifies storage. Canning Richard G.), Control Engng, 1957, **4**, № 2, 95—97 (англ.)

Большинство цифровых систем для обработки данных в настоящее время использует запоминающие устройства на магнитной ленте. Для уменьшения времени выборки информации в таких системах важно иметь устройства для сортировки данных. Некоторые фирмы выпускают устройства для сортировки данных, записанных на магнитных лентах, в виде отдельных дополнительных блоков к счетным машинам. Но в большинстве систем требуется, чтобы сортировка производилась при помощи программирования работы счетной машины (при этом обычно используется перевод данных на перфокарты). Одна из фирм (Datamatic) ввела специальные команды сортировки для увеличения эффективности сортировки машиной данных с ленты. В статье описывается один из методов сортировки, называемый методом «слияния». Он состоит в следующем. Имеется электронное сортирующее устройство и четыре магнитных ленты—две входных (*A* и *B*) и две выходных (*C* и *D*). Данные вводятся с одной или обеих входных лент, где данные записаны в произвольной последовательности. Задача состоит в том, чтобы переписать все данные на одну ленту в порядке возрастания величин этих данных. Для сортировки данные многократно пропускаются через сортирующее устройство. После каждого такого прохождения входная и выходная пара лент меняются своими функциями. Процесс состоит в том, что данные переписываются на одну из выходных лент в порядке их возрастания. Когда дальнейшее возрастание становится невозможным, сортирующее устройство переключается на вторую выходную ленту и начинает записывать данные на нее тоже в возрастающей последовательности. Принцип работы разъясняется на следующем примере. Пусть на *A* записаны по порядку величины 13, 25, 9 и 7, а на *B* — величины 6, 3, 47 и 32. Сортировка производится следующим образом. На *C* переписывается наименьшая из величин 13 и 6 (т. е. 6). Одновременно 6 записывается в регистр временного хранения *P*. Дальше величина 3 передвигается в ленте *B* на место, где раньше было записано 6. Сортирующее устройство сравнивает величины 13 (из *A*), 3 (из *B*) и 6 (из *P*). Так как 3 меньше 6, то на *C* передается величина 13 (вслед за 6). Затем на *C* передается 25. Затем 9 занимает на *A* место, где было 25. Оба входных числа 9 и 3 теперь меньше 25 и устройство переключается на ленту *D*, где и записывается 3, затем 9 и 47 тем же способом. После этого 7 и 32 оказываются меньше 47 и снова происходит переключение на *C*, где приписываются 7 и 32. (После первого цикла на *C* записано 6, 13, 25, 7 и 32, а на *D* —3, 9 и 47). Во время второго цикла входные и выходные ленты меняются функциями. Перепись данных идет по тем же правилам, и к концу цикла данные оказываются записанными на двух лентах следующим образом: 3, 6, 9, 13, 25, 47 и 7, 32. После третьего цикла все 8 чисел выстраиваются в порядке величин. Таким образом устройство все время сравнивает две входные текущие величины и одну только что переданную. Рассматривается, как описанный принцип сортировки можно использовать в универсальной цифровой вычислительной машине. Отмечается, что этот способ является одним из наиболее быстрых и эффективных. В. А. Брик

2058. Вычислительная машина «Вихрь 1» (Whirlwind 1). J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 11 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2). (англ.)

Приводятся данные эксплуатации вычислительной машины «Вихрь 1» за 20-недельный период. Общее рабочее время за этот период составляло 2675 час., из которого было потеряно из-за повреждений машины 244 часа. В среднем рабочее время между повреждениями 10,6 часа, а среднее время на устранение неисправности 22,8 мин.

Эти данные относятся к вычислительной системе, содержащей 6500 ламп, и к вспомогательному оборудованию, содержащему 4200 ламп, при круглосуточной работе 6 дней в неделю. Время, затрачиваемое на профилактику в течение суток, 1,25 часа. В. Д. Князев

2059. Вычислительная машина ПКК. Гатридж, Янделл (The programme-controlled computer. Guttridge E. J., Yandell R. P. B.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, Suppl. № 2, 217—227, Discuss., 242—246 (англ.)

Описывается конструкция вычислительной машины ПКК фирмы «Паурс-Сеймас» (PCC — Programme Controlled Computer), предназначенной для коммерческих расчетов (РЖМат, 1956, 5558, 7749). Приводятся блок-схемы запоминающего и арифметического устройств, устройства управления, сумматора с коррекцией, а также схемы связи с входными и выходными устройствами. Б. И. Стрелков

2060. Быстродействующая универсальная вычислительная машина ДЭЮКЕ. Хейли (DEUCE: A high-speed general-purpose computer. Haley A. C. D.), Proc. Instn. Electr. Engrs. 1956, **B103**, Suppl. № 2, 165—173 (англ.)

Описывается универсальная цифровая вычислительная машина ДЭЮКЕ (РЖМат, 1955, 4740). Рассматривается применение оптимального программирования с целью уменьшения времени ожидания при выборке из оперативного запоминающего устройства на ртутных линиях задержки. Приводится система кодов команд, количество которых уменьшено с целью упрощения программирования, и блок-схема работы машины.

Дается структура устройств ввода и вывода данных, скорость которых составляет 10 000—20 000 десятичных цифр в 1 мин.

Приведена краткая характеристика электронных схем машины и методика их профилактического контроля. Отмечается, что применяемые схемы позволяют использовать нестабилизованные источники питания. В качестве примера задач, решаемых описываемой машиной, указывается на вычисление матриц с помощью специальных интерпретативных программ. Б. И. Стрелков

2061. Первая в мире дешевая электронная вычислительная машина (World' first low-priced electronic computer), J. Mach. Account., 1958, **9**, № 2, 34 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Монро» (Monroe Calculating Machine Co.) о выпуске новой вычислительной машины «Монробот IX» стоимостью 10 000 долларов. Запоминающее устройство машины выполнено на магнитном барабане. Имеется также 14 накапливающих регистров на 18 разрядов. Число деталей сведено до минимума. Многие лампы выполняют двойную роль, широко применены печатные схемы, и твердые соединения проводов заменяют дорогостоящую рудную пайку.

Все части машины изготовлены из стандартных блоков. О. В. Бачин

2062. Вычислительная машина «Элеком 50» (Underwood Corporation, Electron 50), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 10 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2). (англ.)

Сообщается о демонстрации вычислительной машины «Элеком 50» фирмы «Ундервуд» (Underwood Corp.) — дешевой вычислительной машины для бухгалтерских расчетов (РЖМат, 1956, 4940). Она имеет внутреннее запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 50 кодов. Программа задается при помощи металлических перфолент, информация с которых считывается электростатическим способом. В машину можно заложить 16 программных лент, причем каждая из них содержит до 100 оперативных шагов. Скорость вычислений равна 15 операциям в 1 сек. Имеется входное устройство в виде десятиклавишной панели и выходное устройство, печатающее информацию на лист. В. Д. Князев

2063. Вычислительные машины CEA (SEA — Société d' électronique et d' automatisme, France), J. Assoc. Machinery, 1955, **2**, № 2, 13—14 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

Сообщается об испытании французской большой быстродействующей универсальной вычислительной машины КУБА (CUBA — Calculatrice Universelle Binare de l' Armement). Приводятся технические данные вычислительной машины КАБ 2022 (CAB 2022) (РЖМат, 1956, 9153). В. Д. Князев

2064. Вычислительная машина фирмы «Эллиот» типа 402 (Elliott-402 Electronic Digital Computer), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 2, 12 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

См. РЖМат, 1956, 2504.

2065. Экспериментальная вычислительная машина МЕГ Манчестерского университета (Manchester University Experimental Computer «Megäcycle»), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 2, 7 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7** „№ 2) (англ.)

Приводятся некоторые данные, относящиеся к вычислительной машине Манчестерского университета МАРК II. В. Д. Князев

2066. Электронная вычислительная машина Вейцмановского института (Weizmann Institute of Science-Electronic computer), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 2, 7 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

В Вейцмановском институте (Weizmann Institute of Science) (Израиль) создается вычислительная машина, подобная машине «ИАС» (IAS). Предполагается установить на вычислительную машину ферритовое запоминающее устройство, емкостью 4096 кодов фирмы «Интернейшнл Телеметр» (International Telemeter Corp.)

В. Д. Князев

2067. Вычислительная машина ДЕЮКЕ (DEUCE digital computer (English Electric Co.)), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 3, 221—222 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2). (англ.)

Приводятся подробные технические данные английской цифровой вычислительной машины ДЕЮКЕ.

В. Д. Князев

2068. Вычислительные машины фирмы «Монробот» (Computers. Monrobot Corporation), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 2, 7 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

Сообщается о поставке фирмой «Монробот» вычислительной машины «Монробот V» (Monrobot V) (РЖМат, 1956, 8400) Армейскому вычислительному центру (США). Машина предназначена для обработки результатов съемки местности и составления карт. Она приспособлена для перевозки, амортизирована от ударов и толчков, защищена от проникновения пыли и не зависит от больших изменений температуры и влажности воздуха. Машина имеет собственную систему охлаждения. Вес машины 600 *кг*. Потребление электроэнергии 4 *квт*.

«Монробот VI» похож на «Монробот V», но несколько отличается по форме и имеет двойную арифметику для контроля вычислений. В. Д. Князев

2069. Электронная вычислительная машина «Метровик 950» (The Metrovick 950), Business Digest (India), 1957, **5**, № 8, 47—48 (англ.)

См. РЖМат, 1958, 4287.*

2070. Первая финская счетная машина ЭСКО (Suomalainen matematiikkakone ESKO), Tekn. aikakauslehti, 1955, **45**, № 10, 234 (фин.)

2071. Запоминающее устройство «Мнемотрон» (The International Telemeter Corporation, Mnemotron), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 2, 10 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

Сообщается об изготовлении фирмой «Интернейшнл Телеметр» (International Telemeter Corp., Los Angeles, California) ферритового запоминающего устройства «Мнемотрон» (Mnemotron) для вычислительной машины «Джонниак» (Johnniac). Емкость запоминающего устройства 4096 сорокаразрядных двоичных чисел. Время выборки составляет 6 мксек. Матрица имеет 32×128 сердечников. Выборка адресной шины вдоль короткой стороны матрицы призводится при помощи ламп, вдоль длинной стороны — при помощи коммутатора на магнитных сердечниках. Всего в запоминающем устройстве используется 1207 ламп.

Той же фирмой испытывается запоминающее устройство с магнитным барабаном емкостью 12 000 кодов.

В. Д. Князев

2072. Проектирование и применение логических устройств с насыщающимися магнитными сердечниками. Скарротт, Харвуд, Джонсон (The design and use of logical devices using saturable magnetic cores. Scarrott G. G., Harwood W. J., Johnson K. C.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, Suppl. № 2, 302—312. Discuss., 327—330 (англ.)

Статья посвящена элементам для последовательных цифровых машин, которые разработаны фирмой «Феранти» на основе одноходового (single-stroke) магнитного усилителя, состоящего из насыщающегося магнитного сердечника и диода. Излагается принцип действия одноходового магнитного усилителя и методика осуществления логических операций этим усилителем с помощью нескольких входных обмоток. Входным обмоткам придаются «веса» +2, + 1, — 1, — 2, и появление или неявление сигнала на выходе определяется алгебраической суммой весов возбужденных входных обмоток: сигнал появляется, если эта сумма превышает $1^1/_2$, и не появляется в противном случае.

Рассматриваются способы стандартизации выходного сигнала усилителя. Приводятся соображения по выбору сердечников и диодов. Рассчитывается число витков в обмотках. Представлены семейства экспериментальных кривых, характеризующие работу различных логических схем. Эксперименты производились с элементами, в которых использованы ферритовые сердечники, применяемые обычно в запоминающих устройствах, и точечноконтактные диоды, обладающие малым прямым сопротивлением. На сердечник наматывались обмотки: выходная (80 витков провода диаметром 0,05 *мм*), продвигающая (40 витков провода диаметром 0,06 *мм*), три входные обмотки по 4 витка и одна 2-витковая обмотка. Выходная мощность элемента достаточна для возбуждения двух таких же элементов. Элемент потребляет среднюю мощность 0,5 *вт*. Рабочая частота 100 *кгц*. Для питания используется 2-фазная система продвигающих импульсов, а чтобы повысить устойчивость, устраивается перекрытие этих импульсов и вводится напряжение смещения в петлю связи. Благодаря этому помехи, уровень которых не превышает $^1/_3$ номинальных вольтсекунд сердечника, подавляются элементом полностью, а для получения полноценного сигнала на выходе достаточно входного изменения потока, составляющего $^2/_3$ от номинальных вольтсекунд. Логические устройства с насыщающимися сердечниками реализуют несколько булевых функций двух

и трех переменных, например $X\&Y$, $X \vee Y$, $X \vee (Y\&Z)$, $X\& \overline{Y \vee Z}$ и т. д. Рассматриваются вопросы логического синтеза схем из таких устройств. Стандартизация импульсов в каждом устройстве позволяет вести логический синтез более независимо от физического синтеза, чем в случае схем, где логическими устройствами служат диоды, а усилительными—лампы или транзисторы. В заключение приведено несколько вариантов схемы полусумматора, двоичных сумматоров-вычитателей и двоично-десятичного сумматора-выключателя. Н. П. Брусенцов

2073. **Заметки о новом в промышленности. Бернетт** (Industry news notes. Burnett Ed), Computers and Automat., 1957, **6**, № 11, 24 (англ.)

Фирма «Дженерал Транзистор» (General Transistor Corp.) объявила о создании 4 новых типов германиевых сплавных триодов с переходом NPN для усиления малых сигналов и быстрого переключения. Частота отсечки у новых триодов от 0,5 до 9 *мгц*, а коэффициент усиления по току для малых сигналов от 15 до 125. О. В. Бачин

2074. **Профилактический или текущий ремонт. Ньюман** (Preventive or curative maintenance. Newman E. A.), Automat. Digital Comput. London, 1954, 235—237. Discuss., 237—238 (англ.)

Рассматриваются вопросы надежности работы вычислительных машин и, в частности, некоторые вопросы конструкции машины с точки зрения надежности работы. Поднимается вопрос об оптимальном размере блоков Утверждается, что опыт работы машины «Ace Pilot Model» показывает, что лучше применять более крупные блоки, причем в самих блоках следует предусматривать легкую смену ламп. А. Н. Зимарев

2075. **Устройство для ввода и установки бланков счетов** (Introducteur pesitionneur de comptes), Rev. mécanogr., 1957, **11**, № 122, 375—377 (франц.)

Описание приставки к табулятору фирмы «Буль» (Bull, Франция), позволяющей производить печать выходных данных табулятора на стандартных бланках счетов размером 368 × 220 *мм*. А. В. Шилейко

2076. **Вычислительные машины фирмы «Ремингтон Рэнд»** (Computers. Remington Rand), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 9 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

Объявляется о выпуске быстродействующего печатающего устройства для вычислительной машины УНИВАК. Устройство предназначено для переписки информации на лист со скоростью 200, 400 или 600 строк в 1 мин. по 130 знаков в каждой строке и может печатать цифры, буквы и знаки пунктуации. Печатающее устройство состоит из 4 блоков: считывающего блока, который выбирает информацию с ленты блоками по 120 цифр, печатающего блока с пультом управления и двух электронных блоков, которые содержат источники питания, запоминающее устройство на газоразрядных лампах и схемы управления и контроля. Особенностью устройства является возможность составлять документы на листе от 100 *мм* до 675 *мм* шириной, причем расположение печати на листе задается при помощи штепсельной панели. Имеется возможность продвигать бумагу вхолостую со скоростью 120 строк в 1 сек. В. Д. Князев

2077. **В Институте перспективных исследований** (The Institute for Advanced Study), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 9—10 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

В институте разработан пишущий осциллоскоп для контроля за правильностью соединения машины с магнитным барабаном. На экране осциллоскопа имеется растр из 1024 точек, где указывается адрес, на котором произошло неверное соединение машины с барабаном. Разрабатывается подобное же устройство для магнитного барабана на 12 000 кодов. В. Д. Князев

2078. **Прибор для записи на магнитную ленту без записывающих головок** (Magnetic recorder), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 18 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

Сообщается, что фирмой «Либраскоп» (Librascope, Inc.) разработан прибор, позволяющий производить перепись информации на магнитную ленту без магнитных головок с первоначальных документов, на которых информация находится в виде магнитной записи. В. Д. Князев

2079. **Новое цифровое устройство для вычерчивания кривых** (New digital plotter), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 17—18 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

Сообщается о приборе фирмы «Нортроп Эйркрафт», который может вычерчивать ряд кривых со скоростью 8 точек в 1 сек., причем имеется возможность маркировать кривые различными символами, выбранными посредством входного устройства прибора. На листе шириной 250 *мм* может быть размещено 400 точек кривой вдоль ординаты. Перемещение вдоль абсциссы производится продвижением бумаги, что позволяет вести длительную запись. Прибор позволяет автоматически печатать на листе координатную сетку. В. Д. Князев

2080. **Устройство преобразования данных, записанных на осциллографической пленке, в цифровую форму** (Automatic oscillograph tape reader), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 17 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

Фирма «Нортроп Эйркрафт» (Northrop Aircraft Co., Inc.) сконструировала устройство, позволяющее считывать данные, записанные по 6 каналам на фотопленке, со скоростью 600 чтений в 1 мин. Устройство преобразует данные в цифровую форму и перфорирует их на картах. Оно выполнено в виде автономного блока и может быть придано различным вычислительным машинам.

Назначение устройства — обработка данных телеизмерений. В. Д. Князев

2081. **Преобразователь непрерывной информации в цифровую «Колман Энджиниринг»** (Coleman Engineering Company), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 224—225 (Digital Computer Newsletter, 1955 7, № 3) (англ.)

Фирма «Колман Энджиниринг» (Coleman Engineering Co., Inc.) выпускает 6-декадный преобразователь непрерывной информации в цифровую «Диджитайзер» (Digitizer), дополняющий уже имеющуюся серию 3-, 4- и 5-декадных преобразователей этого типа. Это устройство может накапливать до 1 млн. импульсов со скоростью 10, 40 или 100 импульсов на 1 оборот приемного вала. Устройство преобразует поворот вала в определенную установку контактов, через которые считывающие устройства воспринимают сигнал и передают информацию на печатающие или перфорирующие устройства.

Скорость входного вала может достигать 18 000 об/мин, причем скорость считывания будет равна 3000 единицам в 1 сек. Весит устройство менее 1,5 *кг* и занимает объем около 1 $дм^3$. В устройстве приняты меры для компенсации люфтов. В. Д. Князев

2082. **Быстродействующий преобразователь 11-разрядных двоичных чисел в непрерывную форму. Беккетт** (A rapid digital — to — analogue convertor for numbers having eleven binary digits. Beckett F.), Proc. Instn Electr. Engns, 1956, **B103**, Suppl. № 3, 427—431. Discuss., 447—449 (англ.)

Описывается электронное устройство для преобразования 11-разрядных двоичных чисел, представленных в последовательной форме, в напряжения, пропорциональные величинам этих чисел.

Принцип преобразования заключается в следующем. Преобразование состоит из двух процессов: в первом — образуется временной интервал, пропорциональный двоичному дополнению преобразуемого числа. Это осуществ-

ляется путем подачи в 11-разрядный счетчик, содержащий преобразуемое число, серии импульсов высокой фиксированной частоты и отметки моментов начала этого процесса и окончания его, когда последний разряд счетчика выдаст импульс переноса в следующий старший разряд.

Во втором процессе, начинающемся и заканчивающемся одновременно с первым, используется линейно уменьшающееся напряжение. Это напряжение начинает уменьшаться с некоторого фиксированного уровня и в момент переполнения счетчика достигает напряжения, пропорционального преобразуемому числу.

Так как временной интервал пропорционален дополнению числа и используется линейно уменьшающееся напряжение, то нулевому преобразуемому числу соответствует наиболее отрицательное выходное напряжение, а с увеличением числа выходное напряжение становится более положительным.

Указывается на два главных недостатка этого метода преобразования: требование высокой точности непрерывной части устройства (ошибка не должна превышать ±75 *мв*) и большое время, потребное для преобразования двоичного числа во временной интервал.

При используемой частоте счета 3,1 *мгц* требуется 660 мксек. для образования выходного напряжения, а остальные 700 мксек. периода преобразования используются для визуальной индикации результата, восстановления генератора линейно изменяющегося напряжения и ввода следующего преобразуемого числа.

Приводятся блок-схема устройства и принципиальная электрическая схема одного разряда быстродействующего двоичного счетчика. Дается описание схем устройства. Отмечается возможность использования описываемого устройства при некоторых видоизменениях и для преобразования из непрерывной формы в цифровую.

На основании эксперимента утверждается возможность преобразования 11-разрядных двоичных чисел с помощью описываемого устройства в непрерывную форму без потери точности.

Указывается, что преобразование из цифровой формы в непрерывную с помощью метода суммирования токов или напряжений практически возможно только с точностью до 7—8 двоичных знаков.

Однако комбинированное применение этого метода с описанным позволит повысить как точность, так и скорость преобразования.

Работа выполнена на фирме «Эриксон Телефон» (Ericsson Telephone, Ltd.). Б. И. Стрелков

2083. Анализ некоторых ошибок электронных моделирующих устройств. 1. Ограничения полосы частот. Дау (An analysis of certain errors in electronic differential analyzers, I. Bandwidth limitations. Dow Paul C., Jr), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 4, 255—260 (англ.)

Рассматривается влияние неидеальности свойств решающих усилителей электронных моделирующих установок на точность получаемого решения заданных уравнений. В данной статье рассматривается влияние ограниченности частотной характеристики усилителей; влияние наличия паразитных емкостей, шунтирующих входные сопротивления усилителя; действие паразитной емкости, шунтирующей сопротивление обратной связи суммирующего усилителя; влияние емкостной и активной паразитных связей на землю входа усилителя; влияние наличия сопротивления утечки конденсатора обратной связи интегрирующего усилителя. Форма частотной характеристики усилителя (без обратной связи) учитывается тем, что он рассматривается как инерционное звено с передаточной функцией $G(s)=G_0/(T_0s+1)$, где $\omega_0=G_0/T_0$ — частота среза частотной характеристики. Рассмотрены погрешности, вносимые при решении одного дифференциального уравнения m-го порядка и при решении системы n уравнений первого порядка (другие случаи могут быть проанализированы аналогичными методами). Показано, что после принятия некоторых допущений, указанные выше недостатки усилителей приводят к тому, что в первом случае (решение уравнения m-го порядка) на модели фактически решается уравнение $(2m+2)$-го порядка; в характеристическом уравнении оказывается $m+2$ дополнительных корня (действительных отрицательных), расположенных далеко в левой полуплоскости. Оцениваются величины этих корней. В случае системы уравнений первого порядка указанные причины вызывают увеличение порядка характеристического уравнения с n до $3n$. В обоих исследуемых случаях анализ погрешностей сводится к тому, что вычисляются не сами погрешности решения (решение может быть неизвестно), а эквивалентные изменения коэффициентов заданного уравнения. Вычислив по выведенным в статье формулам эти приращения коэффициентов уравнения, оператор может изменить установленные в модели значения коэффициентов на вычисленные приращения и, наблюдая за изменением решения, судить о том, как влияют указанные выше недостатки модели на точность получаемого решения. В конце рассмотрен пример анализа точности решения уравнения второго порядка. В. А. Брик

2084. Анализ быстродействующего регистрирующего сервомеханизма при помощи моделирования. Шварценберг (An analog study of a high—speed recording servomechanism. Schwartzenberg J. W.), Trans. ASME, 1958, **80**, № 2, 490—495. Discuss., 496 (англ.)

Описано исследование на модели электронной регистрирующей следящей системы, в которой имеются нелинейные элементы. При исследовании подбирались значения параметров системы (коэффициент передачи редуктора, инерция, нагрузка фрикциона), обеспечивающие минимальное время переходного процесса при максимальном скачкообразном возмущении на входе. Рассматривалось также несколько типов демпфирования, частотная характеристика, ошибка слежения. Отмечается, что результаты, полученные на модели, хорошо совпадают с данными испытаний экспериментального образца сервомеханизма. В. А. Брик

2085. Метод решения задачи о вероятности попадания и связанных с ней статистических задач. Ван-Хорн (An analog method for the solution of probability of hit and related statistical problems. Van Horne Thomas B.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 3, 170—175 (англ.)

Приводится описание метода построения моделирующих устройств, приближенно решающих задачу о вероятности попадания. В качестве основного элемента модели используется электронно-лучевой осциллограф, экран которого закрывается маской, имеющей прорезь по форме поражаемого пространства цели. К горизонтальным и вертикальным отклоняющим пластинам трубки осциллографа подводятся постоянные напряжения, моделирующие смещения системы и цели, и напряжения от источников шумов, обладающих нормальным или каким-либо другим распределением. При соответствующем выборе масштабов вероятность попадания оказывается пропорциональной среднему количеству времени, в течение которого луч остается в пределах прорези маски. Это количество времени может быть вычислено путем интегрирования выходного напряжения фотоумножителя, расположенного против экрана электронно-лучевой трубки. Луч в трубке может открываться периодически с помощью импульсов и в этом случае искомая величина может быть получена в форме отношения числа импульсов на выходе фотоумножителя к полному числу импульсов за данный интервал времени. Другим применением метода является исследование системы, опреде-

ляющей движение по заданному пути. Напряжение сигнала $y(t)$ и напряжение шума $x(t)$ подаются на вход нуль-органа, вырабатывающего на выходе разностное напряжение $z(t)$. Величина напряжения, равная $z(t)—y(t)$, подводится к вертикальным отклоняющим пластинам осциллографа. Луч открывается с помощью генератора импульсов, имеющих достаточно высокую частоту следования. Прорезь в маске имеет вид полосы шириной в $2a$. При этом фотоумножитель регистрирует только факты выхода луча за пределы $\pm a$. Характеристикой исследуемой системы является вероятность такого выхода за интервал времени Δt. Импульсы с выхода фотоумножителя возбуждают триггер, который сбрасывается в конце каждого интервала Δt с помощью другого генератора импульсов. Число возбужденных состояний триггера и полное число интервалов Δt за некоторый отрезок времени подсчитываются двумя отдельными счетчиками. В статье отмечается, что аналитическое определение ошибки подобной системы представляет собой задачу более сложную, чем исходная. Поэтому определение точности моделирования лучше всего производить экспериментально с помощью источника шума с известным распределением. Выводятся выражения, позволяющие определить автокорреляционную функцию выходного напряжения фотоумножителя и вычислить ожидаемую среднеквадратичную ошибку для случая любого шума, имеющего нормальное распределение. Приводятся блок-схемы устройств для решения простой задачи о вероятности попадания и для задачи о вероятности попадания для случая залпа неуправляемых ракет системы «воздух-воздух». Работа выполнена на фирме «Хьюз» (Hughes Aircraft Co.). А. В. Шилейко

2086. **Электронные вычислительные устройства непрерывного действия. Синха** (Electronic analogue computers. Sinha N. K.), Indian Constr. News, 1957, **6**, № 6, 167—170. Discuss., 170 (англ.)

В статье, носящей популярный характер, объясняются общие принципы работы электронных вычислительных устройств непрерывного действия, построенных на усилителях постоянного тока. Автор дает представление о двух классах вычислительного оборудования и определяет место описываемых аналоговых устройств среди других видов вычислительной техники, а также указывает на области их использования. Затем автор кратко описывает общие основы теории построения вычислительного устройства в целом и отдельных блоков (операционные усилители, потенциометры, устройства для перемножения двух переменных на потенциометрах и сервомеханизмах и функциональные устройства с применением электронно-лучевых трубок). В заключение перечисляются задачи, решаемые с помощью аналоговых вычислительных устройств (анализ линейных и нелинейных контуров, модуляторов, исследование шумов в линиях связи и управления и т. д.). В. В. Васманов

2087. **Универсальная моделирующая вычислительная установка «Шорт»** (The «Short» general purpose analogue computor), Distrib. Electr., 1958, **30**, № 227, 123—124 (англ.)

Краткие сведения о моделирующем устройстве английской фирмы «Шорт» (Short Brothers and Harland Ltd.) и некоторых его применениях.

2088. **ЛАКЕ—моделирующее устройство, построенное в Лутоне. Часть 2. Джонс, Ридшоу** (LACE The Luton Analogue Computing Engine). Part 2. Jones J. C., Readshaw D.), Electronic Engng, 1957, **29**, № 354, 380—385 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 2517. Описание электронных схем перемножения и функционального преобразования, входящих в состав машины ЛАКЕ (LACE—Luton Analogue Computing Engine). Схема перемножения использует метод вычисления разности квадратов суммы и разности перемножаемых величин. Квадратичная зависимость получается с помощью схемы суммирования токов от трех источников: 1) напряжения треугольной формы частоты 20 *кгц* с амплитудой, равной удвоенному максимальному значению величины, возводимой в квадрат; 2) напряжения смещения, равного максимальному значению величины, возводимой в квадрат; 3) напряжения, пропорционального этой величине. Выходное сопротивление схемы суммирования зашунтировано диодом так, что выходное напряжение отлично от нуля лишь при его отрицательном значении и имеет вид треугольников частоты 20 *кгц*, высота которых пропорциональна входному напряжению, а площадь — квадрату входного напряжения. В состав схемы перемножения входят: 4 усилителя для образования входных величин $+X$ и $\pm Y$; два усилителя для установки напряжений смещения (двух знаков); 4 схемы для возведения в квадрат, которые используются в зависимости от знаков величин X и Y и обеспечивают алгебраическое суммирование и возведение в квадрат во всех четырех квандрантах; основной суммирующий усилитель для суммирования выходных напряжений схем возведения в квадрат; фильтра и выходного развязывающего усилителя. Основной суммирующий усилитель снабжен усилителем напряжения переменного тока с вибратором по частоте 50 *гц*; остальные усилители выполнены по упрощенной схеме с усилением, равным 500. Частотная характеристика этих усилителей при работе в режиме перемены знака линейна до 40 *кгц*, дрейф нуля не превышает ± 5 *мв*, а линейность лежит в пределах 0,1% от максимума шкалы при изменении выходного напряжения в пределах ± 50 *в*. Фильтр схемы перемножения состоит из двух последовательных ячеек, каждая из которых дает фазовый сдвиг в 3° на частоте 300 *гц* и уменьшение коэффициента передачи на 0,1 *дб* на частоте 4 *кгц*. Статическая максимальная погрешность схемы перемножения равна 0,25%, а средняя погрешность равна 0,1%. Генерирование напряжения треугольной формы производится общим генератором, состоящим из спусковой схемы, интегрирующего усилителя и схемы сравнения, с точностью до 0,05%. Схема нелинейного преобразователя аппроксимирует функцию 8 отрезками и выполнена в двух вариантах. В первом варианте схема состоит из усилителя, суммирующего выходные токи элементов, состоящих из делителя для запирания диода и последовательно включенных диода и сопротивления. Во втором варианте диоды включены параллельно входным сопротивлениям усилителя, так что они обеспечивают фиксацию нижнего и верхнего уровней каждого из линейных отрезков. В состав схемы входят 8 комплектов входных сопротивлений, обеспечивающих совместно с 8 катодными повторителями и потенциометрами изменение крутизны каждого участка от 0 до 82°, и 7 комплектов диодов для задания уровней нагара и конца всех отрезков. При необходимости аппроксимации кривой отрезками парабол постоянные напряжения смещения могут быть заменены напряжениями треугольной формы частоты 20 *кгц*, при этом для усреднения выходных величин схемы добавляется трехзвенный фильтр Rc с выходным катодным повторителем. Суммирование отрезков с учетом знака угла наклона производится с помощью двух усилителей, имеющих малый дрейф нуля. Библ. 11 назв. И. М. В.

2089. **Электромоделирующая вычислительная машина специального назначения в «Дженерал Электрик Компани». Джакоби** (Special purpose analog computers in the General Electric Company. Jacobi George T.), Midwest Res. Inst. Publs, (1956), № 185, 188—190 (англ.)

2090. **Вычисление матриц при помощи электрических аналогий. Собственные значения и собственные векторы. Применение к упругим колебаниям. Каэн, Балле** (Étude des matrices par les analogies électriques

Valeurs propres et modes—application aux vibrations élastiques. Cahen, Ballet M.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 434—439. Discuss., 439 (франц.; рез. англ.)

2091. Электромоделирование и понятие строгости с точки зрения инженерных расчетов. Кено, Раншон (Le calcul analogique et la notion de rigueur chez l'ingénieur. Cuénod M., Renchon R.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 201—205. Discuss., 205 (франц.; рез. англ.)

2092. Функциональное рассмотрение электронной моделирующей установки низкой стоимости. Джонс (The functional considerations for a low cost electronic analog computer. Jones Chalmer E.), ISA Journal, 1956, **3**, № 1, 13—15, 5 (англ.)

2093. Применение электромоделирующих устройств для определения траектории летательных аппаратов. Соколов (Application des techniques analogiques au tracé des trajectoires d'avions. Sokoloff M.), Actes Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 186—190 (франц.; рез. англ.)

2094. Замечания о флаттере, о специальном применении электромоделирующих вычислительных машин и о структурной амортизации. Онде (Notes sur le flutter, sur une application particulière des machines analogiques et sur l'amortissement structural. Hondet Jean), Techn. et sci. aéronaut., 1957, № 5, 229—233 (франц.)

2095. Моделирование кручения вращающегося вала, имеющего горловину. Ренар (Étude analogique de la torsion des arbres de révolution comportant une gorge. Renard G.), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 470—473 (франц.; рез. англ.)

2096. Значение электромоделирующих вычислительных машин в промышленности. Олденбергер (The role of the analog computer in industry. Oldenburger Rufus), Midwest Res. Inst. Publs, (1956), № 185, 109—122. Discuss., 122—124 (англ.)

2097. Использование электромоделирующих устройств отделом производства компании «Эллис-Чалмерс». Линд, Кори (The use of an analog computer facility by the product departments of Allis-Chalmers. Linde L. J., Cory Hal), Midwest Res. Inst. Publs, (1956), № 185, 169—183. Discuss., 183—184 (англ.)

2098. Контроль и программирование экономики при помощи электромоделирующих вычислительных машин. Моррилл (Economic programming and control with analog computers. Morrill Charles D.), Midwest Res. Inst. Publs, (1956), № 185, 154—168 (англ.)

2099. Обзор отечественных электронных цифровых вычислительных машин. Уэйк (A survey of domestic electronic digital computing systems. Weik MartinH. Rept. Ballistic Res. Lab. Aberdeen Proving Cround, Md., 1955, № 971, iv, vii, 272 pp.) (англ.)

Аннотация технического отчета Исследовательских баллистических лабораторий Испытательного полигона Абердин, в котором рассматриваются технические характеристики, логические свойства, опыт эксплуатации, данные по стоимости и потребности в обслуживающем персонале по 84 различным американским электронным цифровым вычислительным машинам. Рассматривается также область применения вычислительных машин и тенденции к ее развитию. Отмечается, что в отчете приведены ошибочные цифры для числа разрядов в слове (11 десятичных) и числа команд в слове (2 команды) для машины ИБМ-650. R. W. Hamming

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 555.

2100. Процесс сортировки на электронной вычислительной машине и перспективы развития этих машин. Пеп (Le tri sur calculatrice électronique et les perspectives d'évolution de ces machines. Pepe P.), Bull. inform. mécanogr., 1958, № 21, 17—29 (франц.)

Автор отмечает одну из встречающихся в практике задач — расположение последовательности информаций в порядке, соответствующем какому-либо признаку. Это осуществимо для системы перфокарт, но трудно для магнитной или перфорированной ленты. Указанная задача возникает, например, при расчете зарплаты.

Существует два способа упорядочения информации, записанной на ленте:

1) По отдельным цифрам. Последовательность информаций вводится в машину. Внутренняя память машины подразделяется на десять или две зоны (в зависимости от принятой системы счисления; двоичная выгоднее). Каждая информация попадает в зону, соответствующую значению цифры в разряде единиц избранного признака. Затем данные из всех зон переписываются на одну ленту и процесс повторяется, причем используется следующий разряд и т. д.

2) По всему значению признака. Производится сравнение трех значений признака, после чего информация, соответствующая одному из них, переносится на одну из других лент. Приведена подробная система правил. После обработки всей информации процесс повторяется, и так несколько раз, тем больше, чем менее упорядочено начальное распределение признаков. Рассмотрены способы ускорения процесса. Р. Д. Бачелис

2101. Соревнование в области вычислительной техники стран других континентов. Калхун (Computer competition from other continents. Calhoun Everett S.), Automat. Control, 1957, **6**, № 4, 62—70 (англ.)

Краткий обзор развития вычислительной техники в наиболее развитых странах, сделанный автором после поездки по 20 странам.

В Индии в Мадрасском институте технологии построена вычислительная машина непрерывного действия и планируется разработка цифровой вычислительной машины. Ряд перфокартных вычислителей используется правительственными учреждениями, например Индийским статистическим институтом в Калькутте используется вычислитель ГЕК-2М Британской компании табуляторных машин (British Tabulating Machine Co.). Группа инженеров разрабатывает небольшую вычислительную машину с магнитным барабаном. Предполагается использование в ней электронно-лучевой трубки для визуального контроля за информацией, хранящейся на барабане. В качестве входных-выходных устройств будет использована телеграфная аппаратура. Значительная помощь в ходе проектирования была оказана группой советских ученых и инженеров, которые пробыли около двух месяцев в 1954 г. в Индии и прочитали ряд лекций о результатах, достигнутых в Институте точной механики и вычислительной техники АН СССР. В конце 1956 г. в Калькутту ожидалась поставка из СССР вычислительной машины «Урал». Официальными лицами в Индии было заявлено, что покупка такой машины у СССР обошлась значительно дешевле, чем если бы она была произведена в США.

Приводятся сведения о вычислительной машине БЭСМ АН СССР на основании доклада академика А. С. Лебедева, прослушанного автором на конференции в Стокгольме. Автор считает, что по своим возможностям БЭСМ схожа с машинами «Сперри Рэнд 1103» и ИБМ-704. Автор излагает состояние развития вычислительной техники в Федеративной Республике Германии, Японии, Франции, Италии, Швеции, Голландии, Бельгии и Англии. Большинство сведений по этим странам уже известны из литературы. А. Б. Залкинд

2102. Английские вычислительные машины (British-built computers), Overseas Engr, 1957, 31, № 360, 167—173 (англ.)

Приводятся основные технические данные цифровых и моделирующих вычислительных машин, изготовляемых в Англии. Ниже перечисляются описанные машины и указываются некоторые из приведенных данных.

Цифровые машины. Фирма «Бритиш Табулейтинг машин компани» (British Tabulating Machine Co.) выпускает две машины. Первая «Модель 555» — предназначена для коммерческих применений. Эта машина — параллельно-последовательного типа, электронная, работает по двоичной системе. Программа набирается на наборной панели и содержит до 150 шагов. Магнитный барабан на 105 10-значных чисел, скорость вращения 3000 об/мин. В число операций входит деление, извлечение квадратного корня. Вторая машина — универсальная электронная машина «Модель 1202» последовательного типа. Магнитный барабан на 4080 слов по 40 разрядов, скорость вращения 3000 об/мин. Ввод — сто 80-колонковых перфокарт в 1 мин. Фирма EMI Electronics выпускает машину ЭМИДЕК (EMIDEC), которая построена на магнитных сердечниках и транзисторах. Память на сердечниках, на 1024 слова; дополнительная память — на магнитных барабанах по 8192 слова каждый. Предполагаемая дата выпуска—январь 1959 г. Фирма «Эллиотт» (Elliott Bros.) выпускает машину «Модель 402E». Она работает в двоичной системе; запятая фиксированная. Магнитный барабан — на 5000 слов по 32 знака, скорость 4600 об/мин. Кроме того, имеется 16 магнитострикционных линий задержки на одно слово каждая. Время сложения и вычитания 0,2 мсек, время умножения и деления 3,57 мсек. Машина «Модель 402F» отличается от предыдущей возможностью работы с плавающей запятой. Упоминается также машина «Модель 405» той же фирмы. Фирма «Инглиш Электрик» (English Electric Co.) выпускает машину ДЭЮКЕ (сложение и вычитание производится за 64 мксек, умножение и деление — за 2 мсек) и специализированную машину «Kinetic Heating Simulator», предназначенную для решения уравнений вида $q=A_0X_0\pm A_1X_1\pm A_2X_2\pm A_3X_3\pm A_4X_4$; здесь A_0X_0, A_1X_1 и т. д. суть 8-значные двоичные числа, устанавливаемые на быстродействующих реле (знак любого произведения устанавливается вручную); q — 17-значное двоичное число со своим знаком, также представляемое на быстродействующих реле. Время срабатывания реле 3 мсек. Машина решает 60 уравнений в 1 сек. Фирма «Феррранти» (Ferranti) выпускает известные электронные машины «Меркурий» (сложение и вычитание за 180 мксек, умножение за 300 мксек) и «Пегас» (сложение и вычитание за 0,3 мсек, умножение за 2 мсек, деление — за 5,5 мсек). Английская фирма ИБМ (I.B.M. United Kingdom) выпускает универсальную машину ИБМ-650 с запоминающими устройствами на магнитных сердечниках, барабане и магнитных дисках. Скорость работы — 7800 сложений или вычитаний, 5500 умножений, 3700 делений, 138 000 логических операций в 1 мин. Машина ЛЕО-II фирмы «Leo Computers» — последовательного типа, имеет запоминающее устройство на ртутных трубках на 2048 слов, а также 8 магнитных барабанов, на 8192 слова каждый. Могут использоваться также блоки записи на магнитную ленту. Время сложения и вычитания 0,34 мсек, умножения — от 0,6 до 3,5 мсек, деления и извлечения квадратного корня 3,5 мсек. Фирма «Метрополитен-Виккерс» (Metropolitan—Vickers Electrical Co.) выпускает машину «Модель 950», которая может выполнить 32 двухадресные команды. Запоминающее устройство — на магнитном барабане (4096 слов) и линии задержки (8 слов). Время выборки 10 мсек, умножения 8 мсек, сложения 3 мсек. Логические схемы построены на транзисторах. Машина «Националь-Эллиотт-405» (National-Elliott 405) фирмы «Националь» (National Cash Register Co.) имеет внутреннее запоминающее устройство на никелевых линиях задержки, магнитный барабан и др.; ее внешняя память — магнитная пленка. Фирма «Пауэрс-Самас» (Powers-Samas Accounting Machines) выпускает машину PCC, предназначенную в основном для коммерческих работ. Последняя может работать в десятичной системе или прямо в величинах денежных сумм (в фунтах стерлингов). Кроме магнитного барабана, в ней имеется быстродействующее запоминающее устройство. Емкость главного запоминающего устройства составляет 160 чисел, содержащих 16 десятичных или «стерлинговых» разрядов и знак в каждом. Программа задается путем установки небольших сменных панелей с печатным монтажем. Вся программа может содержать до 160 шагов. Имеются встроенные стандартные подпрограммы, которые можно включать в общую программу при помощи одной команды в набираемой программе. Фирма «Саузерн Инструментс» (Southern Instruments) выпускает для решения небольших задач портативную машину «Дециплекс» (Deciplex), работающую в десятичной системе и использующую трубки «декатрон». Перемножение двух 12-значных чисел производится за 4 — 5 сек., деление — за 7 сек. Фирма «Стандард Телефонс энд Кейблс» (Standard Telephones and Cables) разрабатывает машину «Зебра МК-1» (Zebra Mk. 1.), работающую в двоичной системе последовательного типа. Главное запоминающее устройство — магнитный барабан на 8192 слова, вращающийся со скоростью 6999 об/мин. Кроме того, для запоминания используются ферритовые сердечники и магнитная лента. Время сложения и вычитания 312 мксек, умножения 11 мсек, вычисления косинуса 80 мсек, операции над десятичными числами с плавающей запятой 30 мсек (в среднем).

Моделирующие установки. Специализированная установка «450 Cable Problem» фирмы «Эддиссон» (Addison Electtric Co.) предназначена для решения задач распространения тепла в электрических кабелях. Модель «Флайт Симулятор» (Flight Simulator) фирмы «Эйр Трейнерс» (Air Trainers Link) предназначена для обучения полету на самолете начинающих пилотов. В установке имитируются все условия реального полета. Универсальная моделирующая установка ЭМИАК-II (EMIAC II) фирмы E. M. I. Electronics, использует усилители постоянного тока с усилением $7\cdot10^6$, с дрейфом менее 100 *мкв* и вибраторами, работающими на напряжении 50 *гц*. Имеются нелинейные элементы на диодных схемах. Фирма «Эллиотт» (Elliott Brothers) выпускает 4 модели. Универсальная модель G-PAC состоит в основном из 20 операционных усилителей с коэффициентом усиления по постоянному току 5 млн., со стабилизированным нулем (используются прерыватели, работающие на частоте 50 *гц*). Модель ND 181 предназначена для обучения технического персонала, работающего на атомных реакторах. Специализированная установка «Модель ND115» предназначена для решения задач, связанных с работой атомных реакторов; она содержит 18 усилителей постоянного тока, два сервоумножителя и другое оборудование и может соединяться для совместной работы с реальным оборудованием. Четвертая модель (ND 111) предназначена для анализа работы атомных энергоустановок. В ней используются стабилизированные усилители постоянного тока. Пассивные элементы подобраны с точностью 0,1%. Эта модель также может работать вместе с реальным оборудованием. Моделирующая установка ЛАКЕ Мк-II (Lake Mk. II) фирмы «Инглиш Электрик» (English Electric Co.) пригодна для решения нелинейных тепловых задач, анализа шумов, решения задач по методу Монте-Карло. Состав модели: 12 усилителей, 2 генератора функций, 2 множительных устройства, 12 буферных усилителей для изменения знака и др. Частота повторения ре-

шений—от 0,1 до 10 *гц*. Фирма «Эвершед энд Виньоль» (Evershed and Vignoles) выпускает установку ER-92, которую можно включать в контур системы регулирования, например для поддержания регулируемой величины на определенном уровне. В установке выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в квадрат и извлечения корня. Выходной величиной модели является постоянный ток, изменяющийся в диапазоне от 0 до 15 *ма*. Универсальная модель ФЭАК (FEAC) фирмы «Фэйри Авиэйшн» (Fairey Aviation Co.) содержит усилители постоянного тока, выполненные с помощью печатного монтажа. Общий коэффициент усиления равен $45 \cdot 10^6$, усиление по постоянному току 60 000. Дрейф, приведенный ко входной сетке, составляет около 150 *мкв*. Используются сервоумножители. Моделирующая установка «Модель 952X» фирмы «Метрополитен-Виккерс» может использоваться для решения дифференциальных уравнений в электрических, механических, гидравлических, тепловых и ядерных задачах. Усилители модели имеют два выхода — положительный и отрицательный. Имеются два десятиоборотных потенциометра. Модель находится в стадии разработки. Разрабатываются нелинейные элементы, множительные устройства, генераторы функций. Специализированная установка «Анализатор жидких сетей» (Fluid Network Analyser) фирмы «Нэш энд Томпсон» (Nash and Thompson) может использоваться для решения задач распределения потоков в водяных, газовых, нефтяных, воздушных сетях. В модели используются электрические сопротивления. Аналоговое устройство фирмы «Саундерс-Роу» (Saunders-Roe) может работать в реальном времени и в других режимах. Усилители модели имеют коэффициент усиления по постоянному току $2 \cdot 10^7$. Имеется множительно-делительное устройство, генератор функций на диодных схемах и др. Вторая модель этой же фирмы «Минипьютер» (Miniputer) — предназначена для решения линейных дифференциальных уравнений. «Минипьютер» может работать в реальном времени или с периодизацией; содержит 20 усилителей, 10 потенциометров. Фирма «Шорт энд Харленд» (Short Brothers and Harland) выпускает универсальную модель (General Purpose Computer), в которой используются усилители постоянного тока со стабилизацией дрейфа и с общим коэффициентом усиления $12 \cdot 10^6$. Имеется множительное устройство и другие нелинейные блоки. Установка «Фильм-анализатор K1001» (Film Analyser K1001) фирмы «Саузерн Инструментс» (Southern Instruments) может выполнять сложение, вычитание, умножение, вычисление среднеквадратичных значений, средних величин и др. Применяется для обработки записей непрерывных величин. Специализированная модель на сопротивлениях (Resistance Network Computer) фирмы «Санвик» (Sunvic Controls) предназначена для решения тепловых задач, связанных с паровыми и газовыми турбинами, других тепловых задач, а также задач диффузии и др. В состав модели входят 200 специальных потенциометров и другое оборудование. Приведены фотографии 22 из перечисленных машин. В. А. Брик

2103. Рынок для машин непрерывного действия (The market for analog computers), Computers and Automat., 1957, **6**, № 11, 18—19 (англ.)

В настоящее время в нефтяной промышленности используется около 15 универсальных вычислительных машин непрерывного действия, стоимостью от 50 000 до 150 000 долл. на общую сумму 2 000 000 долл., что составляет менее 2% от общей стоимости вычислительных машин в нефтяной промышленности.

Ожидается, что производство непрерывных вычислительных машин будет расти в ближайшее время быстрее, чем производство цифровых машин, и на каждую машину ИБМ-650 будет выпускаться оборудование для машин непрерывного действия на 50 000 долл., а на каждую ИБМ-700 на 100 000 долл. и в ближайшие 5 лет общая стоимость вычислительных машин непрерывного действия для нефтяной промышленности достигнет 5 ÷ 30 млн. долл., что составит около 5% общей стоимости вычислительных машин.

В нефтяной промышленности непрерывные машины могут выполнять большой круг задач, из которых важнейшие: проблемы каталической регенерации, получение высокооктановых продуктов, выделение определенных газов, протекание крекинг-процесса, моделирование физических процессов, использование резервуаров, управление рабочими процессами и т. д.

Во многих случаях непрерывные машины в нефтяной промышленности оказываются лучше цифровых по стоимости, по времени решения задачи, большей простоте в эксплуатации и из-за возможности одновременно получать ответ по нескольким переменным.

О. В. Бачин

2104. Языки, логика, обучение и вычислительные машины. Карр III (Languages, logic, learning, and computers. Carr John W., III), Computers and Automat., 1958, **7**, № 4, 21—22, 25—26 (англ.)

Приводится содержание лекции, прочитанной автором на симпозиуме по вычислительным машинам 15 ноября 1957 г. Дается определение «языка» и рассматривается проблема эквивалентности выражений и перевода их с одного языка на другой. В частности, задача «перевода» программ с «языка» одной вычислительной машины на «язык» другой рассматривается на примере решения одних и тех же задач на машинах ИБМ-650, ИБМ-701 и ИБМ-704. Отмечая работы советских специалистов Янова, Канторовича, Маркова и Разумовского, автор указывает на отставание США в области автоматического программирования и автоматического математического анализа. Рассматриваются также проблемы «обучения» машины и теория универсальных машин Тюринга. А. В. Шилейко

2105. Ручное использование автоматически записанных данных. Эттингер (The manual use of automatic records. Oettinger A. G.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 33—38. Discuss., 38—39 (англ.)

Рассматриваются вопросы использования данных, обрабатываемых и записываемых на автоматических вычислительных и счетноаналитических машинах. Проблема, возникающая в этом случае, состоит в согласовании скорости автоматической обработки данных со скоростью их ручного использования, т. е. характеристиками входного и выходного оборудования и возможностями запоминающих устройств машины.

Рассматриваются способы уменьшения влияния ручного использования данных на эффективность машины. Вводится понятие «преимущества автоматизации» как меры относительной эффективности автоматической системы обработки данных в отношении скорости, точности, стоимости и т. д. На примерах банковских операций показывается необходимость иметь в таких машинах запоминающие устройства с произвольной выборкой. Указывается также на необходимость более четкого определения требований к разрабатываемым машинам для обработки информации. Б. И. Стрелков

2106. Проблема сравнения цифровых вычислительных систем. Мак-Ганн (Comparing digital computing systems: an increasing problem. McGann John A.), Computers and Automat., 1958, **7**, № 2, 10—13 (англ.)

Рассматривается вопрос о выборе потребителем среди всех изготовляемых вычислительных машин машины для его конкретных задач. В недавнем прошлом такой выбор не был трудным: разные марки машин имели строго разграниченные сферы действия и возможности, и эти сферы действия не перекрывали друг друга. Но развитие различного вспомогательного оборудования

расширило области применения машин изменило их стоимость и сделало выбор нужной машины сложным. В частности, увеличились возможности машин средней величины, снабженных дополнительным оборудованием, и они стали конкурировать с большими машинами. Часто бывает трудно сделать выбор между одной большой и двумя или тремя средними машинами, обладающими вместе теми же возможностями, что и большая. Проблема выбора машины рассматривается в статье на примере выполнения различными машинами задачи инвентаризации. Отмечается, что большие возможности выбора машин имеют свои положительные стороны. В частности, потребитель может больше сосредоточить внимание на своих потребностях, в то время как раньше ему часто приходилось пересматривать и изменять свои планы и требования, чтобы они соответствовали ограниченным возможностям имеющихся машин. В. А. Брик

2107. Инженерный подход к методам вычислений с помощью электронных машин. Арон (The engineer's approach to electronic computing methods. Aron Joel D.), Highway Res. Board Bull., 1957, № 157, 44—50 (англ.)

Статья общего характера о вычислительных машинах, главным образом цифровых, имеющая целью помощь инженеру, который хочет оценить возможность применения электронной вычислительной техники для решения интересующих его конкретных задач. Отмечается значение предварительной работы, которую необходимо провести перед установкой машины: подготовку персонала и особенно программистов. Указывается, что нужно иметь от 4 до 15 программистов и машинных операторов, работающих полный рабочий день в течение 12—18 месяцев до пуска машины. Время на установку машины, по словам автора, составляет от 15 до 24 месяцев.

В. А. Брик

2108. Введение в цифровые вычислительные устройства. Часть 1. Обзор типов вычислительных устройств. Надлер (Úvod do číslicových počitačů. Část I.: Přehled typů počitačů. Nadler Morton), Aplikace mat., 1957, **2**, № 6, 409—423 (чешск.; рез. русск., англ.)

Описаны различные классические вычислительные пособия и разъяснена их классификация по аналоговому и цифровому принципу. Дается обзор современных типов аналоговых вычислительных устройств. В работе также содержится довольно подробный разбор различных цифровых вычислительных машин — универсальных и предназначенных для вычислений только одного типа. Основа программ для универсальных машин разбирается с учетом разницы между машинами, применяемыми к научно-техническим расчетам, и машинами для обработки данных. В заключение оцениваются различные типы машин с точки зрения организации их применения в устройствах различного характера. В работе содержится также заметка о взаимоотношении между этой новой областью и классической математикой. Резюме автора.

2109. Вычислительные машины. Пейдж (Computers. Page Carl), Michigan Technic., 1957, **76**, № 1, 26—28, 46—47, 70 (англ.)

Приводится краткий исторический очерк развития вычислительных машин. Отмечается, что за последние 10 лет более миллиарда долларов было вложено в 3000 универсальных вычислительных машин, находящихся ныне в эксплуатации или в проектировании. Приводится классификация вычислительных машин. Описывается принцип действия основных узлов цифровых вычислительных машин: входных устройств, устройств управления, арифметических устройств, запоминающих устройств, выходных устройств. Дается краткое описание принципа действия операционных узлов моделирующих установок непрерывного действия. Рассматриваются возможности электронных цифровых и моделирующих устройств и примеры использования цифровых вычислительных машин для банковских и административных целей. Кратко излагаются перспективы использования вычислительных машин. Г. Г. Рабинович

2110. Они строят роботы... (Sie bauen die Roboter...), Orion, 1955, **10**, № 23—24, XII (нем.)

Сообщается о встрече ученых из 20 стран с целью обмена опытом в области конструирования и применения электронных вычислительных машин, происходившей в конце октября 1955 г. в Дармштадте. В заседании принимало участие около 600 математиков, физиков и специалистов по технике слабых токов. В докладах были затронуты вопросы, связанные с конструкцией, назначением и использованием современных больших вычислительных машин, а также вопросы автоматического программирования на больших цифровых машинах. Всего было заслушано 15 докладов, в которых отмечалось особенно широкое развитие и применение электронных вычислительных машин за последнее десятилетие в США (в настоящее время около 100 действующих автоматов), Англии, Германии. Указывалось также на все возрастающее значение счетных автоматов в области организации и планирования для бухгалтерских расчетов, в статистике и для выполнения переводов с одного языка на другой. Приводятся некоторые данные относительно следующих машин: ПЭРМ (Мюнхен), ДЭРА (Дармштат), «Z5» и ЭРМЕТХ (Цюрих), БЭСК (Стокгольм), IRSIA-FERS (Бельгия), САПО (Прага), упомянуты 4 счетные машины в Геттингене и 5 строящихся автоматов в Нидерландах. И. Ф. Шелихова

2111. Программа по вычислительным машинам для высшей школы. Букман (A high school digital computer program. Buchman Aaron L.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 3, 176—180 (англ.)

Автор считает нужным ввести курс по вычислительной математике в цикл математических дисциплин, преподаваемых в высшей школе. Сообщается о программе курса, разработанной для Хатчинсоновской центральной технической школы (Hutchinson Central Technical High School, Buffalo, N. Y.). Курс включает теоретические занятия и лабораторные работы на действующих вычислительных машинах. Изложено содержание и распределение времени по отдельным темам.

А. Ф. Смирнов

2112. Основные термины, символы и схемы, используемые в цифровых вычислительных машинах. Хаскей (Basic descriptive terms, symbols and circuits used for computing machines. Huskey H. D.), Electr. Manufact., 1955, **56**, № 6, 140—142 (англ.)

Даются определения основных терминов: сумматора, арифметического узла, двоично-десятичного кода, двоичной цифры, двоичной системы счисления, переноса, гашения регистра, синхронизирующего сигнала, импульса команды, счетчика, входного устройства, запоминающего устройства, программы вычислений, импульса, регистра вообще, регистра А (аккумулятора), регистра Р (регистра множителя), сдвига. Приводятся схемы элементов машин: схема И для отрицательных входов, схема И для положительных входов, схема усилителя, схема ИЛИ, схема двоичного счетчика, буферного усилителя, катодного повторителя, линии задержки, триггера, клапана, схемы запрета, инвертора, кипп-реле, генератора, формирователя и импульсного трансформатора. Г. Х. Новик

2113. Рост отдела вычислительных машин. Часть 1. Янг (The growth of a computer department. Part 1. Young P. L.), Electr. Manufact., 1958, **2**, № 10, 18, 20 (англ.)

История развития производства вычислительных машин английской фирмой «Феррранти». В частности, кратко описана разработка цифровых машин MADAM, ФИНАК (FINAC). В. А. Брик

2114. **Электронные вычислительные машины с программным управлением. Хубер** (Programmgesteuerte elektronische Rechenmaschinen. Huber A.), Funk-Technik, 1958, **13**, № 6, 171—173 (нем.)

Одна из серии статей по вычислительной технике. Рассмотрены некоторые узлы вычислительной машины и устройства ввода и вывода с изложением принципа действия и составных частей: схема переписи с перфокарт на магнитные сердечники, скоростное печатающее устройство, преобразователь непрерывных величин в дискретные с кодовым диском, устройство управления одноадресной машины и его составная часть — распределитель импульсов. А. Ф. Смирнов

2115. **Современные вычислительные машины в лаборатории. Часть 3. Бут** (Modern calculating machines in the laboratory. Part 3. Booth A. D.), Lab. Practice, 1956, **5**, № 12, 444—447, 456 (англ.)

Части 1, 2 см. РЖМат, 1957, 6062, 6063.

2116. **Иллюстрированное руководство по вычислительным машинам. Часть 1.** (A pictorial manual on computers. Part 1), Computers and Automat., 1957, **6**, № 12, 10—13, 15—17, 19—24, 28, 30 (англ.)

Помещены фотографии ряда машин, деталей, цехов завода вычислительных машин и их оборудования (28 фото).

2117. **Иллюстрированное руководство по вычислительным машинам. Часть 2** .(A pictorial manual on computers. Part 2), Computers and Automat., 1958, **7**, № 1, 12—17, 20—22, 24, 26—27 (англ.)

Продолжение (22 фото). Ч. I см. реф. 2116.

2118. **Британская техника в области электронных автоматических вычислительных машин в свете недавнего конгресса в Лондоне. Эрколи, Сачердоти, Вакка** (La tecnica britannica nel campo delle calcolatrici elettroniche automatiche alla luce del recente Congresso di Londra. Ercoli Paolo, Sacerdoti Giorgio, Vacca Roberto), Ricerca scient., 1956, **26**, № 8, 2321—2339 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Обзорная статья по материалам Конгресса по вычислительной технике, происходившего в Лондоне 9—14 апреля 1956 г.

2119. **По поводу извлечения корней на счетной машине. Олива** (Zum Wurzelziehen mit der Rechenmaschine. Oliwa Gotfried), Österr. Z. Vermessungswesen, 1955, **43**, № 2, 54—55 (нем.)

В вычислительной практике для извлечения квадратного корня нередко используется следующий способ последовательных приближений. Установив на счетчике результатов данное число a, делят его на число b_0 (b_0 — полученное тем или иным способом приближенное значение $\sqrt{a}$), поставленное на установочных рычагах, и получают на счетчике оборотов b'_0. Если b_0 выбрано так, что первые r цифр ($r \geqslant 2$) в числах b, b_0 и b'_0 (b — искомое значение корня) совпадают, то в числе b_1, определяемом равенством

$$b_1 = {}^1/_2 (b_0 + b'_0), \qquad (1)$$

совпадут с числом b'_1, полученным аналогично b'_0, последующие r цифр. Доказывается, что способ допускает обобщение для m-й степени. Принимая в этом случае

$$b_1 = \frac{1}{m}[(m-1)b_0 + b'_0], \qquad (2)$$

автор приводит общее выражение для ошибки приближения. Извлечение кубического корня по рассматриваемому способу (в этом случае, согласно (2), $b_1 = \frac{1}{3}(2b_0 + b'_0)$) удобно выполнять на двойном арифмометре. Последний также удобен для вычисления по этому способу выражений вида $b_1\sqrt{a_1} + b_2\sqrt{a_2} + \ldots$

М. Л. Рудштейн

2120. **Вычисление квадратного корня и остатка в применении к восьмиразрядным числам. Караччоло** (Il calcolo della radice quadrata e del resto: applicazione su numeri di otto cifre. Caracciolo Carlo), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, **3**, № 14, 10—19 (итал.)

Описывается способ точного вычисления квадратного корня и остатка с использованием только операций вычитания, сложения и сдвига, пригодный для счетно-аналитических машин. Способ представляет собой видоизменение обычного „школьного" способа численного извлечения корня с использованием свойства суммы первых n нечетных чисел натурального ряда

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2,$$

где n — порядковый номер нечетного числа. Число, из которого необходимо извлечь квадратный корень, разбивается справа налево на группы по две цифры. При этом в крайней левой группе может оказаться две или одна цифра. Затем из крайней левой группы цифр последовательно вычитаются числа 1, 3, 5.... Вычитание продолжается до получения первой отрицательной разности. Число операций вычитания, при которых разности еще оставались положительными, записывается в качестве первой цифры результата, а к последней положительной разности, которая представляет собой результат вычитания из исходного числа величины $(n00\ldots0)^2$ (где n — число вычитаний), приписывается справа следующая по порядку группа цифр исходного числа. Из полученного таким образом приближенного значения первого остатка последовательно вычитаются числа вида $p\alpha$ (α приписывается справа к числу p), где p — уменьшенное на единицу значение вычитаемого, давшего в первой серии вычитаний первую отрицательную разность, а $\alpha = 1, 3, 5\ldots$ (число p, очевидно, равно удвоенному значению первой цифры результата. *Прим. реф.*). Первое вычитаемое может быть образовано в результате операции вида

$$\left(p\underbrace{000\ldots0}_{m} - 9\underbrace{000\ldots0}_{m-1}\right)\cdot\frac{1}{10},$$

где количество нулей m равно количеству цифр в еще не использованных группах исходного числа. Вычитания снова продолжаются до получения первой отрицательной разности, затем описанным образом формируется второй остаток и т. д. Вычисления заканчиваются после использования последней (крайней правой) группы цифр исходного числа. Последняя положительная разность представляет собой остаток. В некоторых табуляторах число 0 представляется в виде 999...9 и рассматривается как отрицательное. Для того чтобы избежать ошибки, которая может возникнуть в этом случае при извлечении корня из чисел, представляющих собой точные квадраты, предлагается уменьшать первые вычитаемые в каждой серии вычитаний на единицу, а затем вычитать эту единицу из каждого остатка.

В статье подробно описываются программы извлечения корня описанным способом на табуляторе ИБМ-421 и дается схема соединений наборной доски. Для реализации программы извлечения корня из восьмиразрядных чисел используется 4 селектора на 10 каналов, 5 селекторов на 4 канала и 40 разрядов итоговых счетчиков. А. В. Шилейко

2121. **Вычислительные машины фирмы «Брунсвига». Платен** (Die Brunsviga-Rechenmaschinen. Platen Jürgen von), Vermessungstechn. Rundschau, 1955, **17**, № 1, 7—16 (нем.)

Дается краткий исторический обзор развития счетных машин, начиная с арифмометра Паскаля. Фирма «Брунсвига» изготавливает счетные машины с 1892 г. Самой распространенной современной моделью машин, выпускаемых фирмой, является ручной арифмометр BRK с 10 разрядами на установочном механизме, 8 разрядами на счетчике оборотов и 13 разрядами на счетчике результатов. Более емкой моделью является ручной арифмометр «Брунсвига-20». Удобен двойной арифмометр «Брунсвига D13R» также с ручным приводом. Кроме того, фирма выпускает небольшую электрическую вычислительную машину «Брунсвига 11E» и десятиклавишные суммирующие машины.

С. Л. Хубларова

2122. **Арифмометр для тригонометрических вычислений. Короновский** (Arytmometr do obliczén trygonometrycznych. Koronowski Ryszard), Przegl. geod., 1955, **11**, № 2, 46—48 (польск.)

Описано устройство специального арифмометра, избавляющего от необходимости пользоваться таблицами натуральных значений тригонометрических функций при решении задач геодезии. Н. М. М.

2123. **Первый алгебраический двойной арифмометр и его применение в геодезии. Каднер** (Prvni algebraický dvojitý počítací stoj. Kadner Otakar E.), Geod. a kartogr. obzor, 1955, **1/43**, № 10, 198 (чешск.)

Краткое описание арифмометра конструкций шведской фирмы «Однер» (модель 135) с указанием на целесообразность его применения при геодезических работах.

2124. **Печать адресов на трех строках с одной перфокарты с помощью табулятора ИБМ-421** (Stampa di indirizzi su tre linee con una sola scheda — Tabulatrice IBM 421 senza MLP), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, **3**, № 14, 29—30 (итал.).

Приводится описание метода печати данных по нескольким строкам с одной перфокарты на табуляторе ИБМ-421. Рассматривается размещение материала на перфокартах и последовательность операций.

А. В. Шилейко

2125. **Перфоленты. Бене** (Bandes perforées. Benay J.), Rev. mécanogr., 1957, **11**, № 122, 349—353 (франц.)

Продолжение статьи, посвященной описанию различных средств вычислительной техники. Рассматриваются некоторые вспомогательные устройства для работы с перфолентами фирм «ИБМ», «Буль» и др.

А. В. Шилейко

2126. **Исследования, направленные к улучшению винтовой логарифмической счетной линейки. Виндиш** (Untersuchungen zur Verbesserung der logarithmischen Rechenharfe. Windisch O.), Vermessungstechnik, 1955, **3**, № 8, 151—152 (нем.)

Указывается, что винтовая линия имеет большие достоинства при конструировании логарифмической счетной линейки, так как при небольших размерах на ней можно нанести несколько длинных шкал. Так, на валике диаметром 3,5 *см* и длиной 30 *см* можно нанести логарифмические шкалы длиной 2 *м* с характеристиками от 0 до 1 и от 1 до 2. Такая небольшая по размерам винтовая счетная линейка позволяет получать четырехзначные результаты и избежать двойной установки, что неизбежно при вычислениях на обычной логарифмической линейке.

Указывается, что этот прибор может применяться при вычислениях триангуляций низших классов и область его применения значительно шире, чем обыкновенной логарифмической линейки, шкала которой в 8 раз короче шкалы описываемого прибора.

Описывается прибор, состоящий из валика диаметром 11 *см* и длиной 95 *см*. Основные шкалы прибора — логарифмические; они нанесены на валик в шесть рядов Поверх этих шкал на пленке-рубашке нанесена шкала синусов от 21′ до 90°. В качестве бегунка служит кольцо с индексом в виде штриха.

2127. **«Калкола». Витке** (Calcola. Wittke H.), Vermessungstechn. Rundschau, 1954, **16**, № 10, 383—385 (нем.)

Описывается «Калкола» — новое счетное устройство, состоящее из круглой прозрачной основной пластины, вращающейся прозрачной шайбы и вращающегося бегунка. «Калкола-Покс» — прибор карманного формата, диаметром 76 *мм*, позволяет выполнять умножение, деление, возведение в квадрат, извлечение корня; имеет 6 различных шкал. «Калкола-Стандарт», диаметром 120 *мм*, так же как и «Калкола-Покс», применяется для различных вычислений, имеет 9 шкал. «Калкола-Универсал», диаметром 162 *мм*, позволяет грубо измерять углы, имеет 14 различных шкал. Указываются назначения шкал. Даются указания о применении приборов. Приводятся фотографии шкал и иллюстрируется выполнение отсчетов. М. А. Гиршберг

2128. **Гамбургская вычислительная машина «Интегромат». Коллац, Мейер, Веттерлинг** (Die Hamburger Integrieranlage «Integromat». Collatz L., Meyer A., Wetterling W.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 5-6, 234—235 (нем.)

2129. **Математическая теория словообразования. Фукс** (Mathematical theory of word formation. Fucks Wilhelm), Inform. Theory 3rd London Sympos., 1955, London, 1956, 154—168. Discuss., 168—170 (англ.)

Исследуются статистические закономерности процесса образования слов из слогов. Кривые зависимости p_i от i (где $p_i = \frac{z_i}{k}$, z_i — число i-сложных слов, k — число слов в тексте, i — число слогов; $1 \leqslant i \leqslant I$) для текстов различных авторов, пишущих на одном языке, сходны, тогда как для различных языков существенно различны. Для 9 языков (английский, немецкий, эсперанто, арабский, греческий, японский, русский, латинский, турецкий) рассматривается среднее распределение $\overline{p}_i$, полученное усреднением распределений частот для многих авторов; каждый язык характеризуется средним числом $\overline{i}$ слогов в слове ($\overline{i} = \sum_{i=1}^{I} i\overline{p}_i$), эта характеристика меняется от 1,35 в английском до 2,46 в турецком. Описывается статистический прибор, который позволяет получать приближения к кривым распределения. Для распределения $\overline{p}_i$ выводится формула:

$$\overline{p}_i = \frac{e^{-(\overline{i}-1)}(\overline{i}-1)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad \overline{i} > 1.$$

Рассматриваются также моменты μ_2, μ_3, μ_4, стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\mu_2}$, коэффициент асимметрии $\rho_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, коэффициент эксцесса $\rho_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ и энтропия. Приводится обобщение описанного метода для получения других статистических распределений, в частности, для описания процесса образования слогов из звуков. Теоретические распределения (характеристики, перечисленные выше), полученные по выведенным формулам, сопоставляются с наблюдаемыми в литературных текстах.

Отмечается, что словообразование есть частный случай общей проблемы образования лингвистических элементов из компонент, причем следует различать два класса элементов: «небескомпонентный» класс и класс, который не удовлетворяет условию: «хотя бы один компонент». Последний является более общим, для не-

го приведена формула распределения без вывода, который дается автором в другой работе.

Изложение иллюстрируется многочисленными графиками и таблицами.

Приводится краткое изложение обсуждения доклада.

О. С. Кулагина

2130. Рекомендации к механическому переводу. Чеккато, Маретти (Suggestions for mechanical translation. Ceccato Silvio, Maretti Enrico), Inform. Theohy 3rd London Sympos., 1955. London, 1956, 171—180 (англ.)

Отмечаются трудности, которые являются основными для машинного перевода.

Первая трудность состоит в том, что в языке, на который переводят, могут отсутствовать названия некоторых предметов или понятий, хотя эти названия существуют в языке, с которого переводят. Такие предметы приходится при переводе пояснять описательно.

Вторая трудность проявляется тогда, когда несколько предметов имеют в языке, на который переводят (выходной язык) различные названия, а в языке, с которого переводят (входной язык), одно общее. Это затрудняет не только перевод, но и понимание текста. Нужное значение устанавливается путем анализа всей ситуации.

Третья трудность связана с тем, что в различных языках для обозначения одного и того же употребляется различное число слов (здесь слово — sound-scratch — комплекс букв, отделенный от других пробелами), поэтому слово одного языка может соответствовать либо части слова, либо нескольким словам другого языка (итальянское „per", английское „in order to"), причем эти последние могут быть даже разделены другими словами (немецкое „um ... zu"). Кроме того, в различных языках различный порядок слов. Соотношения между словами в различных языках и в различных случаях выражаются по-разному, иногда изменением слов, иногда введением некоторых вспомогательных слов.

Все это делает невозможным пословный перевод и требует употребления грамматики при переводе. Рассматривается вопрос о том, каким образом соотношения между понятиями выражаются в словах и как можно представить себе наиболее общее определение грамматики. Отмечается, что машину нельзя обучить грамматике так, как учат человека иностранному языку (с помощью примеров, ассоциаций и т. п.), поэтому механический перевод требует создания специальных грамматических правил.

О. С. Кулагина

2131 К. Межвузовская конференция по применению физического моделирования в электротехнических задачах и математического моделирования, 9—16 мая 1957 г. Информационные материалы. Ред. Тетельбаум И. М., Литкенс И. В., Моск. энерг. ин-т, М., 1957, 192 стр., беспл.

2132 П. Система передачи данных для цифровых вычислительных машин. Колс, Эллиотт, Хилл, Херсом, Тиндейл (Data transmission system for digital calculating machines or the like. Coales J. F., Elliott W. S., Hill N. D., Hersom S. E., Tindale J.). Пат. США, 2659072, кл. 340—354, 10.11.53

На движущейся бумажной ленте записана в двоичной системе какая-либо математическая функция так, что значение функции, соответствующее определенному значению аргумента, записывается поперек ленты в виде колонки кодов. Лента движется с заданной скоростью, проходя мимо устройства, просвечивающего ленту лучом электронно-лучевой проекционной трубки. Напряжение развертки перемещает луч трубки поперек движения ленты. С другой стороны ленты имеется чувствительный элемент, фиксирующий коды, считанные с ленты. Сигналы последнего стробируются вентильной схемой, на которую подаются стробирующие импульсы, синхронные с разверткой трубки.

На ленте, кроме того, хотя бы через несколько колонок, располагаются метки для определения правильности совпадения развертки луча с колонкой кодов. В случае несовпадения на вторые отклоняющие пластины трубки подаются напряжения, сдвигающие луч в направлении движения ленты.

В. Н. Лаут

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

2133. Введение центральной вычислительной машины в систему для резервирования авиационных билетов. Мак-Авой (A central computer installation as a part of an air line reservations system. McAvoy R. A.), Res. and Engng, 1957, 3, № 8, 9—13 (англ.)

Применение вычислительной машины для резервирования авиационных билетов отличается от обычных применений вычислительных машин следующими особенностями: вычислительной машине не надо выполнять большого количества одинаковой работы, как при обработке ведомостей на зарплату, банковских расчетах и т. д. Входные устройства не должны использовать перфокарты или магнитную ленту. Персонал, работающий на входных и выходных устройствах, не обучен работе с вычислительными машинами.

Задачи, которые должна решать вычислительная машина, в основном можно свести в три группы: 1) контролировать продажу билетов в различных городах так, чтобы предотвратить продажу нескольких билетов на одно место; 2) свести до минимума количество свободных мест в полете; 3) снабжать агентов по продаже точной и быстрой информацией о имеющихся свободных местах.

Фирма «Armour Air Lines» собирается в качестве центральной машины системы поставить универсальную вычислительную машину УНИВАК Файл Компьютер модели 1. Система будет работать 22 часа в сутки все семь дней недели и будет обслуживать 125 станций по продаже билетов. Центральная машина будет установлена в Нью-Йорке. Ввод в действие системы предполагается в июне 1958 г. Ожидается, что число станций продажи билетов в 1959 г. возрастет до 600.

О. В. Бачин

2134. Применение вычислительных машин в нефтяной промышленности (Computer applications in the oil industry), Computers and Automat., 1957, 6, № 11, 19—21 (англ.)

Приводятся примеры применения вычислительных машин в самых разнообразных отраслях нефтяной промышленности. Вычислительный центр фирмы «Ремингтон Рэнд» провел для одного крупного нефтяного района около 800 расчетов по бурению, эксплуатации скважин, прокладке трубопроводов. Имея данные о расположении, качестве нефти, давлении на дне скважины и сифонном давлении, вычислительная машина определяет количество продукции, необходимое число заводов по обработке, наилучшее место для размещения их, наивыгоднейшую прокладку трубопроводов, оптимальную длину линий диаметр труб и стоимость каждого варианта строительства. Широко применяется для расчетов машина LGP-30, на которой решались задачи взаимодействия нескольких нефтяных полей, лежащих на одном водяном слое, задачи анализа газа, задачи наиболее выгодной программы извлечения различных продуктов перегонки, причем лучшая полученная программа давала по сравнению с худшей более 1 млн. долл.

На машине ИБМ-650 решались задачи наиболее правильного управления рабочими процессами на газовых

заводах в 100 раз быстрее, чем ручным способом, задачи расчета резервуаров для хранения нефти и т. д.

Более 1 млн. долл. экономии дало применение машины ИБМ-705 для расчетов и исследования в области комплексной очистки нефтепродуктов. С помощью этой машины проводился расчет стоимости продукции в 8—12 раз дешевле, чем другими способами, расчет стоимости производства, а также расчеты, связанные со сбытом продукции.

Система «Datamatic», связанная с масс-спектрометром, позволила проводить более быстрый и более точный анализ сырой нефти, что позволило улучшить качество смазочных масел.

В нефтяной промышленности используются и другие вычислительные машины как универсальные, так и специализированные, например фирма «Texas Instrument» выпустила машину «SeisMAC» специально для сейсмологических исследований, связанных с добычей нефти.

О. В. Бачин

2135. Переработка нефти за год (The refinery of the year), Computers and Automat., 1957, **6**, № 11, 21—23 (англ.)

Описывается автоматизация нового крупного нефтеобрабатывающего завода фирмы „Tidewater oil" в штате Делавер, выпускающего 20 млн. литров продукции в день.

Центральная система управления этого завода занимает 8 комнат и состоит из 13 отдельных частных систем, связанных с 4700 измерительными пунктами; информация большинства из них поступает непрерывно и непрерывно автоматически обрабатывается.

Характерным является то, что большинство сигнальных устройств основано на пневматических принципах, так как большинство обслуживающего персонала более знакомо с пневматическими устройствами, чем с электрическими, и расстояния от пунктов измерения до центральных пунктов невелико. В некоторых случаях имеется электронное сигнальное оборудование.

Стоимость всей системы около 1 млн. долл. Для обработки данных, необходимых для управления, применяется вычислительная машина ИБМ-650. О. В. Бачин

2136. Строительные каркасы рассчитываются с помощью вычислительной машины. Брандон (Building frame analyzed by computer. Brandon E. S.), Engng News Rec., 1957, **159**, № 25, 34—35 (англ.)

Фирмой «Datics Corp». (Техас, США) по заказу строительной фирмы «W. C. Kruger» разработана программа для расчета на цифровых вычислительных машинах каркасов двухэтажных железобетонных строений методом распределенных моментов.

Стоимость составления программы — 500 долл. Стоимость расчета одного строения составляет 250 долл. за аренду машины. Ручное выполнение этих расчетов потребовало бы 10 дней работы квалифицированного инженера. Машинное решение занимает 3 дня, включая и время на посылку задачи и получение ответа. Разработанная программа гибка и может быть легко применима и к другим аналогичным задачам. Таким образом будущие задачи оправдают расходы на программирование, а получаемая экономия рабочего времени играет значительно большую роль, чем небольшая денежная выгода, получаемая при машинном расчете. О. В. Бачин

2137. Вычислительная машина рассчитывает тепловые потоки для планирования ремонта турбины. Уитмер, Стивенс (Computer calculates heat rates to set economic turbine overhauls. Whitmer C. F., Stephens W. M.), Electr. World, 1958, **149**, № 1, 44—46 (англ.)

Использование электронной цифровой вычислительной машины ИБМ-650 фирмой „Georgia Power Co". (США, штат Джорджия) для расчетов, связанных с выявлением необходимости проведения капитального ремонта турбин В. А. Брик

2138. Автоматический расчет потокораспределения. Глим, Старг (Automatic calculation of load flows. Glimn A. F., Stagg G. W.), Power Appar. and Systems, 1957, № 32, 817—825. Discuss., 825—828 (англ.)

Обсуждаются результаты расчета потокораспределения в сложных сетях на цифровой вычислительной машине ИБМ-650. В основу расчетов положен метод узловых уравнений в форме

$$E_s = \frac{(P_s + jQ_s)/E_s^* + \Sigma_r y_{sr} E_r}{\Sigma_r y_{rs}}$$

где E_s — вектор напряжения s-й узловой точки, E_s^* — комплексный сопряженный вектор напряжения, P_s — реактивная мощность, Q_s — реактивная мощность, потребляемая или генерируемая в s-й узловой точке, y_{sr} — проводимость ветви между узловыми точками s и r.

Программа расчетов состоит из 13 подпрограмм. Для ускорения сходимости итерационного процесса используется метод линейной экстраполяции по формуле

$$E_s^{(i)} = \left(E_s^{(i)} - E_s^{(i-1)}\right)\alpha + E_s^{(i-1)}.$$

Множитель ускорения α_a вещественной части этого выражения принимался равным 1,6, а множитель ускорения мнимой части 1,6 и 1,7.

В расчетах потокораспределения в реальных сетях с числом узлов от 30 до 46 и числом линий от 42 до 92 требовалось не более 20—30 итераций. Для контроля окончания расчетов вычисляются небалансы между заданной и вычисленной мощностью во всех узловых точках. Указан метод учета изменения коэффициентов трансформации по сравнению с номинальными значениями. Р. М. К.

2139. Цифровая вычислительная машина производит расчет потокораспределения. Сент-Клэр, Старг, Черне (Digital computer takes over load flow calculations. St. Clair H. P., Stagg G. W., Tschernе Maria), Electr. World, 1957, **148**, № 14, 60—61 (англ.)

Описывается опыт применения вычислительной машины ИБМ-704 фирмой „American Gas and Electric Service Corp". для расчета потокораспределения. На вычислительной машине рассчитывались 13 вариантов распределения, причем время расчета одного варианта занимало от 3,5 до 8 мин. Обычное решение тех же задач заняло бы 7 дней и стоило бы по меньшей мере 2 800 долл. Стоимость расчета на машине 1 300 долл. Расчеты проводились в вычислительном центре фирмы „ИБМ" в Нью-Йорке О. В. Бачин

2140. Решение двухгрупповых уравнений реактора на перфокартной машине УНИВАК. Ламарш, Райдаут (Reactor two-group equations on the UNIVAC punch-card computer. Lamarsh J. R., Rideout S.), Nucleonics, 1956, **14**, № 8, 100—101 (англ.)

Для расчета критических размеров и масс при конструировании реакторов требуется в основном определение нейтронного потока по всему реактору. В общем виде решение очень сложно, но для тепловых реакторов вычисления могут быть упрощены. Решение упрощенных уравнений может быть осуществлено на серийной вычислительной перфокартной машине УНИВАК-409. Эта машина, получая входные данные с перфокарт, работает по программе, заданной на коммутационной доске, и выдает данные также на перфокарты. На одной коммутационной доске набирается до 40 инструкций арифметических действий. Внутреннее запоминающее устрой-

ство хранит от 6 до 12 10-значных десятичных чисел (число запоминающих ячеек зависит от модели машины). Решение даже упрощенных уравнений реактора требует сотен арифметических операций и большого объема запоминающего устройства. Однако в машинах УНИВАК-409 можно использовать технику программирования на перфокартах, позволяющую получить достаточную скорость и точность. В этом случае инструкции, управляющие развитием процесса вычислений, содержатся в массиве карт. Число таких инструкций неограничено, а объем внутреннего запоминающего устройства достаточен для хранения нескольких чисел, поскольку промежуточные результаты и входные данные могут быть даны на тех же самых программных картах. Такое использование перфокарт возможно благодаря конструкции входного устройства, которое ощупывает при чтении все отверстия в перфокарте одновременно. Контакты замыкаются через пробитые отверстия и удерживаются в этом положении до конца операции. Замкнутые контакты в части перфокарты, указывающей операцию, позволят расшифровать ее и выполнить.

Сообщается, что в США около 500 машин УНИВАК-409 используются для коммерческих целей. В. П. Кузнецова

2141. Цифровой метод управления длительностью и последовательностью временных интервалов. Клейн, Вильямс Морган (Digital time and sequence control. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1956, **29**, № 12, 2403—2407 (англ.)

Сообщается об использовании элементов цифровой техники для управления длительностью и последовательностью событий во времени. Подробно разбирается управление следующей последовательностью четырех событий: контролируемая аппаратура выключена в течение 16 сек., затем включена в течение 16 сек., затем выключена в течение 60±4 сек. и снова включена в течение 16 сек., после чего следует интервал времени, необходимый для восстановления схемы, и цикл повторяется вновь. Последовательность и длительность интервалов устанавливается оператором, в случае ее нарушения вырабатывается сигнал ошибки, использующийся в цепи управления для изменения порядка переключения аппаратуры. Предлагается экономичный способ построения такой схемы. Описывается разработанный для управления длительностью и последовательностью событий прибор ВИАК (VIAC—Variable-Interval Automation Controller), в котором используются управляемые матричные линии и бинарно соединенные переключатели; последовательность событий задается шаговым искателем, а в случае необходимости увеличения быстродействия может быть использована электронная схема.

З. Д. Доброхотова

2142. Инерциальная навигация. Аркс, Бригем (Inertial navigation. Arx E. F. von, Brigham Kon), Computers and Automat., 1958, **7**, № 1, 6—7, 10 (англ.)

Кратко описываются работы фирмы «Сперри» в области систем инерциальной навигации, предназначенных для ракет дальнего действия, сверхзвуковых самолетов, атомных кораблей и подводных лодок.

Приводятся некоторые данные о принципе работы таких систем и требования к точности основных элементов, участвующих в измерении и интегрировании ускорений: гироскопов, акселерометров, интеграторов и тригонометрических преобразователей.

Особый раздел посвящен организации производства сверхпрецизионных поплавковых гироскопов, являющихся основой системы, и созданию в цехах особых условий кондиционирования и очищения воздуха от пыли (воздух очищается от всех частиц пыли больших, чем 0,3 микрона), так как ничтожные пылинки, попавшие в устройства, могут вызвать недопустимые погрешности.

И. Д. Алимов

2143. Счетные машины получают признание. Лейден (Getting acceptance for computerprocessed results. Laden H. N.), J. Mach. Account., 1957, 8, № 4, 10—11, 33 (англ.)

Использование вычислительных машин железнодорожной компанией «Чизапик-Огайо» (США).

Л. М. Голубева

2144. Использование быстродействующих универсальных электромоделирующих вычислительных машин для конструирования и работы инженерных систем. Пейнтер (The use of high-speed general-purpose analog computers for the design and operation of engineering systems. Paynter Henry M.), Midwest Res. Inst. Publs, (1956), № 185, 17—32. Discuss., 32—33 (англ.)

2145. Гравиметрические приближения с помощью электронных вычислительных машин. Куккамяки (Gravimetric reductions with electronic computors. Kukkamäki T. J.), Publs Isostatic Inst. Internat. Assoc. Geod., 1955, № 30 (англ.)

См. РЖАстр, 1955, 5088.

2146. К электронной эре в страховании. Финетти (Verso l'era elettronica nell' assicurazione? Finetti Bruno de), Giorn. Ist. ital. attuari, 1956, **19**, 31—43 (итал.)

2147. Международное совещание по вопросу применения электронных вычислительных машин для обработки статистических данных. Белкин Н., Вестн. статистики 1957, № 3, 86—89

Сообщение о международном совещании по вопросам применения электронных вычислительных машин для обработки статистических данных, происходившем в Женеве с 21 по 24 января 1957 г.

Совещание представляло собой первую попытку обобщения опыта применения электронных вычислительных машин в статистике. Значительное внимание было уделено эксплуатационным характеристикам машин и применению их для обработки материалов переписи населения, промышленных и торговых переписей. В материалах, представленных совещанию делегацией США, содержатся сведения о применяемой в Бюро переписей США машины УНИВАК. Анализ, проведенный Центральным статистическим управлением Норвегии, показал, что для обработки статистических материалов в условиях Норвегии (200 млн. цифр ежегодно) целесообразно иметь машину средней стоимости с вводом данных с магнитной ленты. Предполагается создание статистических картотек на магнитной ленте, исчисление индексов оптовых цен, разработка материалов статистики промышленного производства и т. д. В Англии вычислительные машины с перфокартным вводом данных используются для вычисления себестоимости, составления платежных ведомостей по заработной плате и премиям и т. д.

В общей дискуссии приняли участие делегаты СССР Ю. Я. Базилевский, Б. В. Гнеденко и Н. В. Белкин. Совещанием признано желательным создание постоянной рабочей группы по вопросам применения электронных машин для обработки статистических материалов.

А. Б. Залкинд

См. также: 1298

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абрамян Б. Л. 1569
Авадишвили В. И. 1923
Александров И. А. 1406, 1427 Д
Александров П. С. 1132
Алексеев В. М. 1549
Альтшулер И. С. 1925
Андрунакиевич В. А. 1281
Анисимова Е. П. 1917
Анцилевич М. Г. 2031
Аржаных И. С. 1559

Б

Баскаков В. С. 1932 К
Белкин Н. 2147
Беляев Н. Г. 1915
Березин Ф. А. 1699
Березкина Э. И. 1126
Берман С. Д. 1259
Билимович А. 1880
Боголюбов Н. Н. 1721 К
Боровиков В. А. 1545 Д
Бредихин Б. М. 1221
Брудно А. Л. 1638
Будак Б. М. 2006
Булдырев В. С. 1573
Бычков Б. П. 1147

В

Вакарчук Б. С. 1914, 1916
Веденяпин Д. В. 1957
Вейцман И. Б. 1152
Венков Б. А. 1137
Взорова А. И. 2040 Д
Виленкин Н. Я. 1651
Вильнер И. А. 2038
Винкельбауэр К. 1713
Виноград Р. Э. 1472
Виноградов В. С. 1547 Д
Виноградов И. М. 1207, 1210
Власова В. М. 1504
Войт С. С. 1574
Волк И. М. 1474
Воробьев А. В. 1341, 1342

Г

Гаврурин М. К. 1704
Гагаев Б. М. 1108
Гайдук Ю. М. 1151
Галустян С. Б. 1448
Гартштейн Б. Н. 1744
Гельфонд А. О. 1602 К
Гельчинский Б. Я. 1566
Герус А. П. 1155
Гихман И. И. 1809
Глушков В. М. 1132
Го Мо-жо 1106
Горбунов А. Д. 2006
Гохберг И. Ц. 1595
Грабовская Р. Г. 1441
Груз Д. М. 1950, 1951
Гуань Чжао-чжи 1290
Гукасян Г. Л. 1158

Д

Данилюк И. И. 1544 Д
Дембовский Я. 1109
Дерендяев И. М. 2022
Джавадов М. Г. 1546 Д
Долапчиев Б. 1433
Долидзе Д. Е. 1563
Дринфельд Г. И. 1242 К
Дун Мин-дэ 1598

Е

Евграфов М. А. 1401
Ермаков В. С. 1658
Еругин Н. П. 1439, 1440

Ж

Жигадло В. Ф. 1163
Жмудь Э. М. 1265

З

Заблоцкая Н. И. 1612
Заездный А. М. 1631
Зайденварг М. А. 1926
Зарипов Р. Х. 1593, 1594
Зморович В. А. 1630
Зубов В. И. 1480 К

И

Иванов А. В. 1658
Имнадзе М. П. 1548

К

Кабаков Ф. А. 1348
Кабулов В. К. 2007
Калашников А. С. 1540
Клементьев З. И. 1710, 1712
Клиот-Дашинский М. И. 1608
Кованцов Н. И. 1944
Козлова З. И. 1353
Колмогоров А. Н. 1133, 1339
Конюков М. В. 1579
Коробов Н. М. 1209, 1211
Кострикин А. И. 1282
Ко Чжао 1232
Красносельский М. А. 1133, 1351, 1478
Красовский Н. Н. 1477
Крацовская Е. С. 1628
Крейн М. Г. 1595
Крейн С. Г. 1478
Крейнин Я. Л. 1356, 1357
Кривенков Ю. П. 1525
Круминг А. А. 1403, 1404
Куклес И. С. 1450, 1451
Купцов Н. П. 1659
Куракин К. И. 1666
Курош А. Г. 1301

Л

Лабунцов Д. А. 1575
Лаврук Б. Р. 1535
Ладыженская О. А. 1498
Лебедев Т. С. 1139
Левин Б. Я. 1415
Левинсон И. Б. 1995
Легостев Н. И. 1248
Лившиц Ф. 1130
Линник Ю. В. 1739
Литвинчук Г. С. 1592
Литкенс И. В. 2131 К
Ловитт У. В. 1602 К
Лопатинский Я. Б. 1483
Лопшиц А. М. 1249
Лу Вэнь-дуань 1232
Лыкова О. Б. 1463

М

Макаров И. П. 1118
Малаховский В. С. 1946, 1953 К
Мальцев А. И. 1299
Марков А. А. 1177
Масленников М. В. 1599
Мацкин М. С. 1927
Мельник Д. П. 1534
Меньшов Д. Е. 1378
Минасян Р. С. 1493
Мирер В. С. 1531
Михайлов Л. Г. 1591
Морозова Т. В. 1875Д
Мосєєнков Б. І. 1572
Мочульский Е. Н. 1285
Муравьев П. А. 1446

Н

Несмеянов А. Н. 1104
Никитин П. П. 1888К
Николаев В. Ф. 1376
Никольский В. Н. 1677
Норден А. П. 1135

О

Овсянников Л. В. 1560
Огиевецкий И. И. 1641
Огурцов А. И. 1473

П

Парно И. К. 1160
Пашковский С. 1390
Пекелис А. С. 1268
Плисс В. А. 1465
Плотников В. И. 1607
Погорелов А. В. 1978
Покало А. К. 1428Д
Постников А. Г. 1218
Пугачев В. С. 1855
Пурышев М. М. 1879

Р

Расулов М. Л. 1490, 1491
Репин И. И. 1417
Ривкинд Я. И. 1716
Рихтер В. 1752
Розанов Ю. А. 1748
Розенфельд Б. А. 1135, 1956
Романовский П. И 1341
Рофе-Бекетов Ф. С 1449
Рутицкий Я. Б. 1351
Рутман М. А. 1489
Рыбин П. П. 1604Д

С

Сакович Г. Н. 1122
Сапаров В. Е. 1934Д
Свирский И. В. 2032
Селиханович В. Г. 1143К
Сендов Б. 1352
Сидоров О. П 1561

Симаика Я. 1742
Скрипов Л. С. 1924
Скорняков Л. А. 1298
Скороход А. В. 1765
Смирнов М. М. 1526
Смолицкий Х. Л. 1623
Соболевский П. Е. 1478, 1479
Соколин А. С. 1676
Соколов Ю. Д. 1565
Степанов В. В. 1481К
Ступина И. Д. 1354, 1355
Сунь Хэ-шэн 1999Д
Сюй Ли-чжи 1370

Т

Тарнопольский В. Г. 1672
Телеман К. 1985
Телеман С. 1568
Терлецкий Я. П. 1576
Тетельбаум И. М. 2131К
Толстов Г. П. 1379
Топурия С. Б. 1643
Топчиев А. В. 1105

У

Уствольская Т. И. 2035, 2039Д

Ф

Федоренко Б. В. 1144Д
Фет А. И. 1605
Филиппов А. Ф. 1430
Филиппов П. В. 1928
Филиппович Е. И. 1720

Х

Хаймович А. 1682
Халитова Н. А. 2012
Хан Хен-Гон 1313
Харасахал В. 1459, 1468
Харламова Е. И. 1482Д
Хилберт Д. 1912
Хрущев Н. С. 1102
Хусу А. П. 1811

Ц

Цвид Ф. А. 1154
Цейтин Г. С. 1206
Церетели О. Д. 1350
Цлаф Л. Я. 1146
Цутикура 1385

Ч

Ченцов Н. Н. 1753
Черников В. В. 1405
Чжан Чжен-чжун 1293, 1333
Чжан Ши-сюнь 1691
Чжоу Сюэ-гуан 1332
Чиплис И. В. 1995
Чобанов И. 1433
Чупона Г. 1272
Чэн Цин-минь 1308

Ш

Шафаревич И. Р. 1137
Шварц А. С. 1325, 1326
Ширков Д. В. 1721К
Широков П. А. 1955
Шмыгун А. Н. 1612
Шрагин И. В. 1603 Д
Штелик В. Г. 1466
Шувалова Э. З. 1398

Э

Эйдельман С. Д. 1522 1533
Эйдус Д. М. 1504

Ю

Ющенко А. П. 1872К

Я

Яглом И. М. 1135
Яновский С. В. 1588

A

Abrams J. W. 1842
Acrivos A. 1825
Adler A. 1979
Albrecht R. 1411
Albuquerque J. 1359
Albuquerque L. M. de 1311
Alexander M. N. 1845
Alexandroff P. S. 1165 K, 1317
Allamigeon A.—C. 1986
Allan D. 1524
al-Salam W. A. 1615
Altman M. 1706, 1709
Aly O. 1931 K
Amerio L. 1505
Anderson O. 1773
Andersson B. J. 1621
Anscombe F. J. 1784
Antosiewicz H. A. 1818
Arf C. 1510
Arnese G. 1346
Aron J. D. 2107
Artemiadis N. 1407
Arx E. F. von 2142
Asser G. 1180
Atiyah M. F. 1338

B

Babister A. W. 1442
Baker I. N. 1414
Baldassarri M. 1891 K
Ballet M. 2090
Bandemer H. 2015
Banerjee S. K. 1793
Bankoff L. 1903
Barachet L. L. 1834
Baratta M. A. 1582
Barbalat I. 1369
Barnes S. M. 1895
Barnett I. A. 1234
Barrá J. R. 1771
Barrett L. K. 1322
Barsy G. 1874 K
Bartsch W. 1171 K
Bass J. 1166 K, 1208
Bassali W. A. 1570
Bauer H. 1715
Bauer W. 1444
Baumol W. J. 1835
Beaumont R. A. 1279
Becker H. 1558
Beckert H. 1606
Beckett F. 2082
Behnke H. 1142
Belardinelli G. 1429
Bellman R. 1576
Benay J. 2125
Bendat J. 1853
Benz W. 1994
Berberian S. K. 1697
Bergeon R. 2024
Bergmann C. 1904
Berkson J. 1788
Berstein I. 1323
Bertrandias J.—P. 1208
Bessaga C. 1680
Bielecki A. 1619
Birch B. J. 1224
Bishop E. 1685
Blanc—Lapierre A. 1757
Blasbalg H. 1815
Bledsoe W. W. 1340
Blondel J.—M. 1508
Blum M. 1856
Blutel P. R. 1173 K
Boboc N. 1316
Boclé J. 1717
Bolinder E. F. 1988
Booth A. D. 2115
Borneas M. 1719
Börsch—Supan W. 2011
Botez G. 1894
Bott R. 1335
Bottema O. 1906
Bouligand G. 1124, 1942
Bradt R. N. 1812
Brafman F. 1650
Brahana T. R. 1327, 1329
Brambilla F. 1839
Brandon E. S. 2136
Breakwell J. V. 1851
Breiman L. 1769
Brelot M. 1488
Bremermann H. J. 1425, 1426
Brigham K. 2142
de Broglie L. 1552
Browder F. E. 1707
Brown J. L., Jr 1766
Brownless V. T. 1861
Brzoska F. 1171 K
Buchholz H. 1657
Buchman A. L. 2111
Buchsbaum D. A. 1302
Bühlmann H. 1747
Burde G. 1883
Burgers I. M. 1564
Burks A. W. 1200
Burnett E. 2073
Butzer P. L. 1391
Byrne J. R. 1279

C

Cahen G. 2090
Calderón A. P. 1648
Calhoun E. S. 2101
Canning R. G. 2057
Capra V. 2020
Caracciolo C. 2120
Carlitz L. 1220, 1223
Carr J. W. III 2104
Carter D. S. 1618
Cartwright M. L. 1471
Cassina U. 1321
Castro Brzezicki A. de 1460
Ceccato S. 2130
Čech E. 1941
Černohorský M. 2036
Ceschino F. 2024
Chak A. M. 1655
Chaki M. C. 1989
Chako N. 1647
Chandrasekhar S. 1600
Chang Chen-Chung 1293
Chang Shih-hsun 1691,
Chang Su-Cheng 1333
Châtelet A. 1254
Chatterjee S. D. 1735
Chintschin A. J. 1165 K, 1767
Chisholm R. M. 1194
Chow Hung Ching 1387
Chow Sho-Kwan 1332
Christensen B. 2019
Chu W. C. 1373
Church A. 1193
Church E. T. 1936
Cinquini Cibrario M. 1494
Ciucu G. 1743
Clarke A. B. 1294
Coales J. F. 2132 П
Cohen J. W. 1859
Collatz L. 2128
Colombo G. 1456
Conforto F. 1889 K, 1892 K
Conte L. 1899
Corduneanu C. 1431
Corput J. G. van der 1231
Cory H. 2097
Courant R. 1586
Croisot R. 1271
Cube F. von 1145 Д
Cuénod M. 2026, 2091
Cuesta N. 1367
Curtis C. W. 1278
Czipszer J. 1519

D

Danzer L. 1998
Darling D. A. 1751
Davenport H. 1224
Dawoud R. H. 1570
Deaux R. 1913
Dekker T. J. 1360
Demaria D. C. 1304
De Munter P. 1797
Denis—Papin M. 1167 K
Derwidué L. 1469, 1470
De Simoni F. 1972
Dieudonné J. 1219
Dinculeanu N. 1683, 1714
Dinghas A. 1410
Doetsch G. 1662 K
Dolbeault—Lemoine S. 1967 Д
Dentot R. 1173 K
Doornbos R. 1798, 1799
Dow P. C., Jr 2083
Draim N. A. 1241
Drîmba C. 1447
Dugué D. 1730, 1749

E

Eadie G. S. 1862
Ebner M. 1159
Egerváry J. 1253
Eggleston H. G. 1343
Elbert D. 1600
Elliott W. S. 2132 П
Ercoli P. 2118
Erdös P. 1382, 1751
Evans G. C. 1345
Evans J. P. 1402, 1419
Evans W. D. 1831
Everling W. 1557
Ewald G. 1881
Eyraud H. 1375

F

Fabre de la Ripelle M. 1584
Falk G. 1244 К
Federhofer K. 2033
Fei J. C.—H. 1822
Feller W. 1758
Fenech E. J. 1825
Fényes T. 1665
Fenyö S. 1589
Ferebee J. B. 1845
Fichera G. 1423, 1487
Finetti B de 2146
Finlay A. H. 1905
Finn R. 1562
Fog D. 1153
Folks J. L. 1803
Fortet R. 1857
Foster A. L. 1295, 1296
Fourès Y. 1512
Franchetta A. 1939
Fraser D. A. S. 1787, 1790
Freud G. 1349, 1377, 1389, 1645 Д
Freudenthal H. 1878
Frey G. 1199
Friedman B. 1492
Friedman E. A. 1865
Frisch R. 1823
Fry M. 1848
Fuchs A. 1762, 1763
Fucks W. 2129
Funayama N. 2420
Funkenbusch W. W. 1613

G

Gaddum J. W. 1828
Gagliardo E. 1514
Gál I. S. 1310
Gale A. S. 1893 К
Ganelius T. 1377
Gardent P. 1838
Geisser S. 1783
Gericke H. 1142
Getoor R. K. 1756
Gheorghiu O. E. 1966
Chermanescu M. 1486
Gilbarg D. 1585
Giovannini G. 1457
Givens W. 2014
Glimn A. F. 2138
Gloden A. 1238
Goertzel G. 2034
Goffman C. 1344
Golay M. J. E. 2045
Goldberg S. 1121
Goldstine H. H. 1609
Gosselin R. P. 1383
Goto M. 1270
Graybill F. A. 1796, 1803
Greco D. 1501, 1502
Grim P. J. 1845
Gröbner W. 1626 К
Groschaftová Z. 2002
Grothendieck A. 1695
Groves A. D. 1847
Gruenbaum B. 1990
Günter N. M. 1541 К
Guttridge E. J. 2059
Gyires B. 1237

H

Haimovici M. 1884
Haldane J. B. S. 1789
Hale J. K. 1819
Haley A. C. D. 2060
Hamblin C. L. 2047
Hammersley J. M. 1755
Harish—Chandra 1698
Härlen H. 1871
Harling J. 1840
Harrop R. 1991
Hartley H. O. 1805
Hartman P. 1462, 1959
Harwood W. J. 2072
Hashimoto J. 1297
Hashizume Y. 1305
Hasse M. 1437
Hassitt A. 2000
Hauptschein A. 1866
Havel V. 1929
Heins A. E. 1506
Helfenstein H. G. 1896
Heller I. 1251
Hellman M. J. 1246
Hellwich M. 1157
Henkin L. 1182
Hennebutte L. 2024
Henstock R. 1347
Hermes H. 1724
Hersch J. 1413, 2003
Hersom S. E. 2132 П
Heymann O. 2025
Hill N. D. 2132 П
Hintikka K. 1181
Hirokawa H. 1642
Hirosawa E. 1476
Hirschfeld R. 1686
Hirschman I. I., Jr 1690
Hiz H. 1192
Hochstrasser U. 2010
Hoffman A. J. 1828
Hofreiter N. 1626 К
Höhn E. 2008
Hollingshead E. F. 1843
Hondet J. 2094
Hopf E. 1624
Hörmander L. 1527
Hornecker G. 2029
Hornich H. 1408
Hosokawa F. 1305
Hruban K. 1543 К
Hsu L. C. 1370, 1373
Huber A. 2114
Hughes D. R. 1920
Huff G. B. 1908
Huskey H. D. 2112
Hustý Z. 1435
Huth E. 1617

I

Ibáñez Carcía C. 1656
Ionescu — Tiu C. 1897
Ionescu Tulcea C. 1700
Isbell J. R. 1816
Iséki K. 1187, 1366
Iséki S. 1222
Ishihara S. 1984
Ishihara T. 1671
Ito S. 1516
Iwahashi R. 1334
Iyer R. V. 1235

J

Jacobi G T. 2089
Jacobs W. 1829
Jacobson N. 1303 К
Jain V. K. 1554, 1555
Jakubík J. 1286
Jastrzebska — Olech J. 1432
Johns M. V., Jr 1807
Johnson K. C. 2072
Johnson S. M. 1812
Jones C. E. 2092
Jones D. S. 1587
Jones J. C. 2088
Justinijanović J. 1885 К

K

Kadison R. V. 1687
Kadner O. E. 2123
Kalaba R. 1576
Kalisch G. K. 1684
Kalos M. H. 2034
Kan D. M. 1330
Karlin S. 1812
Karp S. N. 1578
Karzel H. 1269
Kasuga T. 1670
Kaufman A. 1167 К
Kautský J. 1523
Kawada Y. 1274
Kawaguchi A. 1964
Kawashiro T. 1734
Keats J. A. 1861
Kendall M. G. 1722
Keogh F. R. 1640
Kerstan J. 1276
Kertesz A. 1141
Kiefer J. 1813
Kimura N. 1270
Kinukawa M. 1386
Klamkin M. S. 1622
Klaua D. 1179
Klee V. L., Jr 1114, 1667
Klein M. L. 2141
Klingst A. 1837
Kneale W. 1725
Kodama Y. 1314
Kohlhase H. 1156
Konijn H. S. 1733
Koronowski R. 2122
Koshti M. E. 1394
Kosmák L. 1233
Kotzig A. 1306
Kovács C. 1243 К
Kozin F. 1760
Kreisel G. 1184
Krull W. 1277
Kubota T. 1273
Kuiper N. H. 1981
Kuipers L. 1649
Kukkamäki T. J. 2145
Kumari S. 1384
Kuratowski K. 1312
Kurepa G. 1358, 1372
Kurth R. 1869
Kwang Chao — chin 1290

L

La Barbera A. 1907
Lacaz Netto F. A. 1886 К
Laden H. N. 2143
Laha R. G. 1737, 1738, 1806
Lamarsh J. R. 2140
Lamens A. 1759
Lamine T. 1252
Landau H. J. 1846
LaSalle J. P. 1467
Lashof R. K. 1283
Laugwitz D. 1998
Lawden D. F. 1556
Lax P. D. 1586
Lebow L. S. 1845
Lehman M. 2044
Leipnik R. B. 1632
Lemke B. C. 2100
Lenz H. 1998
Leray J. 1511, 1536
Lewandowski A. 1454
Lewy H. 1485
Lezański T. 1708
Lichnerowicz A. 1973
Liebert F. 1610
Linde L. J. 2097
Lindley D. V. 1768
Lions J. L. 1527
Littlewood D. E. 1262, 1263
Lockwood E. H. 1909
Löffler E. 2017
Lombard J. 1860
Lombardo — Radice L. 1922
Lomnicki Z. A. 1810
Lorentz G. G. 1634
Lotze A. 1918
Louhivaara I. 1693
Ludwig O. 1727
Lytle E. J., Jr 1777

M

McAvoy R. A. 2133
Macdonald N. D. 2041
McGann J. A. 2106
Macintyre A. J. 1395
Mackey G. W. 1718
McNaughton R. 1202
Maehara S. 1186
Makar R. H. 1260, 1261
Makai E. 1443
Malarmey L. 1164, 1175 К, 1176 К
Malgarini G. 1458
Malgrange B. 1528
Malhotra P. K. 1247
Manarini A. M. 1580
Mandel J. 1849
Manne A. S. 1824
Maravall Casesnoves D. 1597, 1663
Marchionna Tibiletti C. 1258, 1267
Marcus F. 1945
Maretti E. 2130
Maritz J. S. 1864
Markowitz H. M. 1830
Markuschewitsch A. I. 1165 К
Marsaglia G. 1796
Martinelli E. 1422
Matérn B. 1804
Mathews P. M. 1571
Matić E. 1850
Matsushita S. 1675
Matthews G. 1284
Maurin K. 1532
Melis A. 1553
Melville R. W. 2054
Melzi G. 1948
Mendelson E. 1365
Méric J. 1761
Meulenbeld B. 1649
Meyer A. 2128
Michael J. H. 1324
Michal A. D. 1705
Mihailescu E. 1190, 1191
Miles J. W. 2030
Miller G. A. 1865
Miller J. B. 1660
Miranda Serrano R. 1616
Mishra R. S. 1960
Missiha S. A. 1260, 1261
Mitchell A. R. 2005
Mitra S. K. 1786
Mitsui T. 1213
Miu I. 1434
Modenov P. S. 1887 К
Moisil G. C. 1513
Molnár J. 1882
Montague R. 1182, 1195
Moór A. 1965
Moorman R. H. 1119
Mordell L. J. 1229
Morgan H. C. 2141
Morrill C. D. 2098
Morse A. P. 1340
Moser L. 1239
Mrówka S. 1309, 1669
Mulholland H. P. 1740
Müller K. 1266
Munro W. D. 2023
Muraccini L. 1950
Murakami H. 1517, 1518
Murthy M. N. 1775
Mutô Y. 1958
Mycielski J. 1300
Myhill J. 1178
Myller A. 1877
Myrberg P. J. 1424

N

Nadler M. 2108
Nagata J. 1315
Nagata M. 1275
Nakamura G. 1858
Nakamura M. 1694
Nakaoka M. 1328

Nanjundiah T. S. 1646
Naumann H. 1992
Neelley J. H. 1893 K
Neidhardt P. 1852
Newman E. A. 2074
Neyman J. 1772
Niče V. 1911 K
Nishigori N. 1287
Nitsche J. 1503
Nôno T. 1702

O

Oettinger A. G. 2105
Ogawa J. 1750
Ohasi K. 1189
Ohtsuka M. 1674
Oikawa K. 1421
Oldenburger R. 2096
Oliwa G. 2119
Omar Wahby. 1833
Ono K. 1183
Orlicz W. 1676
Ostrowski A. M. 2009

P

Page C. 2109
Pailloux H. 1661
Pakshirajan R. P. 1735
Pall G. 1397
Palmer D. S. 1726
Pan Cheng-tung 1214
Parker E. T. 1919
Parodi M. 1445
Paynter H. M. 2144
Pelikán J. 2004
Pepe P. 2100
Permutti R. 1940
Perret R. 1664
Petersen G. M. 1640, 1898
Pettineo B. 1499, 1500
Peyerimhoff A. 1416
Pfluger A. 1412
Phelps R. R. 1681
Piaget J. 1204
Picasso E. 1951
Picone M. 1596
Pina E. I. 1846
Pini B. 1515, 1521, 1530
Platen J. 2121
Pluvinage P. 1551
Pope D. A. 2013
Popescu G. 1161
Popoff K. 1550
Práger M. 1529
Prager W. 1827
Prékopa A. 1741
Prins H. J. 1799
Prodi G. 1520
Proriol J. 1551
Pucci C. 1496
Putnam C. R. 1689

R

Rado R. 1991
Ragab F. M. 1653
Rajagopal C. T. 1639
Rao C. R. 1792
Ray W. D. 1814
Readshaw D. 2088
Rečičár K. 1933 K
Rédei L. 1257, 1280
Reenpää Y. 1205
Reidemeister K. 1992
Rembs E. 1996
Renard G. 2095
Renchou R. 2091
Renwick W. 2043
Rhodes F. 1993
Richert H.—E. 1212, 1416
Richter H. 1808
Rideout S. S. 2140
Rider P. R. 1782
Rimini C. 2018
Robertson A. 1863
Robson D. S. 1785
Rocha L. M. 1890 K
Rodeanu R. 1764
Rodriguez A. E. 1601
Rogers C. A. 1740
Rogosinski W. W. 1627
Röhrl H. 1336
Rootsellaar B. Van 1611
Rosati L. A. 1937
Rose A. 1188
Rosenblatt D. 1836
Rosenblatt M. 1746
Rosenblum M. 1673
Roussopoulos P. 1583
Roy B. 1832
Roy J. 1786
Russell D. C. 1637
Ryser H. J. 1250

S

Sacerdoti G. 2118
Sakai S. 1696
Salát T. 1679
Sansone G. 1436
Santa Maria H. A. 1601
Santaló L. A. 1731
Santa Maria H. A. 1601
Sarkadi K. 1774
Satake I. 1980
Sato M. 1380, 1381
Sato T. 1538
Savage L. J. 1801
Sawaragi Y. 1476
Sawyer W. W. 1900
Scarrott G. G. 2072
Schelling G. 1943
Schinzel A. 1236
Schmidt W. 1227, 1228
Scholz H. 1461
Schreiber M. 1692
Schwartz L. 1678
Schützenberger P. 1770
Schwartz L. S. 1866
Schwartzenberg J. W. 2084
Schwarz G. 1364
Scott D. 1288
Segre B. 1982
Seifert G. 1453, 1455
Seki T. 1701
Sengupta N. D. 1581
Senturia S. 1845
Serrin J. 1585
Sexton C. R. 1240
Shapiro V. L. 1388
Shen Yuting 1196
Shepherdson J. C. 1178
Shimoda I. 1703
Shiratani K. 1264
Shirota T. 1484
Shoda K. 1291
Shukla H. S. 1652
Sierpiński W. 1236, 1368
Sikorski R. 1393
Simon H. 2037
Singer I. M. 1687
Singh V. N. 1654
Singleterry A. M. 1845
Sinha N. K. 2086
Sirokov P. A. 1954
Skolem T. 1215, 1371
Smale S. 1337
Smart D. R. 1688
Smith E. C., Jr 1289
Smith E. S. 1847
Smith P. F. 1893 K
Sodha M. S. 1554, 1555
Sokoloff M. 2093
Sokolowsky D. 1828
Sonnenburg K. 1127
Špaček A. 1723
Spampinato N. 1938
Sparre Andersen E. 1732
Spitzer F. 1745
Springer T. A. 1396
Stagg G. W. 2138, 2139
Stavroulakis N. 1987
St. Clair H. P. 2139
Steinberg D. A. 1245
Stephens W. M. 2137
Sternfeld R. 1203
Stevens W. L. 1791
Stipanić E. 1120
Stolt B. 1225
Storvick D. A. 1418
Straszewicz S. 1148, 1150
Strubecker K. 1930 K
Subieta R. G. 1197
Su Bu Chin 1125, 1947
Sulanke R. 1963
Süss W. 1997
Svoboda K. 1935
Swartz W. 1620
Świerczkowski S. 1363
Symonds B. K. 1194
Synge J. L. 1970
Szabó A. 1128
Szekeres G. 1971
Szmydt Z. 1537
Szüsz P. 1629

T

Tada K. 1848
Takács L. 1867, 1868
Takeno H. 1974—1977
Tamura R. 1778
Tanaka T. 1307, 1319
Tandori K. 1644 Д
Tarski A. 1289, 1292
Taylor S. J. 1382
Tedeschi B. 1870
Teleman C. 1420
Terai M. 1703
Thébault V. 1902
Theil H. 1802
Thiede G. 1169 K
Thiele H. 1185
Thionet P. 1780, 1781
Thom R. 1331
Thomas T. Y. 1567
Thomasian A. J. 1728, 1729
Thomson J. Y. 2005
Thron W. J. 1614
Thyssen M. 1497
Tiago de Oliveira J. 1800
Tideman M. 1633
Tindale J. 2132 П
Tits J. 1961, 1968
Tominaga A. 1319, 1320
Tomita M. 1668
Tompkins C. 1251, 2013
Treder H. 1969
Tricomi F. G. 1542 K
Trimble G. R., Jr 1625
Truksa L. 1873 K
Trybula S. 1794
Tscherne M. 2139
Tsuji M. 1590
Tukey J. W. 1776
Turner M. 1862

U

Udagawa K. 1858
Uhlmann W. 2001
Ulam S. 1131, 1817
Umegaki H. 1694
Underwood F. 1539
Uno T. 1475

V

Vacca R. 2118
Valette G. 1921
Van Horne T. B. 2085
Vaught R. L. 1292
Venugopal Rao V. 1226
Vernotte P. 2028
Vigier J.—P. 1762
Vilhelm V. 1962
Villa M. 1949
Virgopia N. 1452
Vlahavas G. N. 1901
Volkmann B. 1261, 1217

W

Wada J. 1711
Wagner E. 1162
Wagner H. M. 1820, 2046
Wajiki I. 1734
Walsh J. L. 1399, 1400, 1402, 1419
Wang Shuh-tang 1362
Wang Shuh—tang 1362
Ward L. E., Jr 1318
Watanabe S. 1854
Watanabe T. 1703
Watanabe Y. 1734
Wegel H. 1361
Wegstein J. H. 2021
Weik M. H. 2099
Weingarten H. 1795
Weiss L. 1779, 1813
Wendel J. G. 1736
Werin L. 1826
Wetterling W. 2128
Wheeler D. J. 2043
Whitmer C. F. 2137
Wicke H. H. 1819
Wilkes M. V. 2043
Willers F. A. 1172 K
Williams F. K. 2141
Windisch O. 2126
Wintner A. 1409, 1438, 1462, 1464
Wittke H. 2127
Wlodarski L. 1635
Wolfe J. M. 2016
Wolfe P. 1835
Wong Y. K. 1821

Y

Yacoub K. R. 1255, 1256
Yandell R. P. 2059
Yosida K. 1509
Young D. M. 2048
Young P. L. 2113
Young W. M. 1844
Yzeren J. van 1802

Z

Zaremba S. K. 1810
Zeller K. 1634
Zemanek H. 2053
Zieba A. 1117
Zierler N. 1198, 1230
Zin G. 1577
Zirilli F. 1952
Zisman M. 1983
Zubieta R. F. 1374
Zubieta R. G. 1197
Zygmund A. 1648